

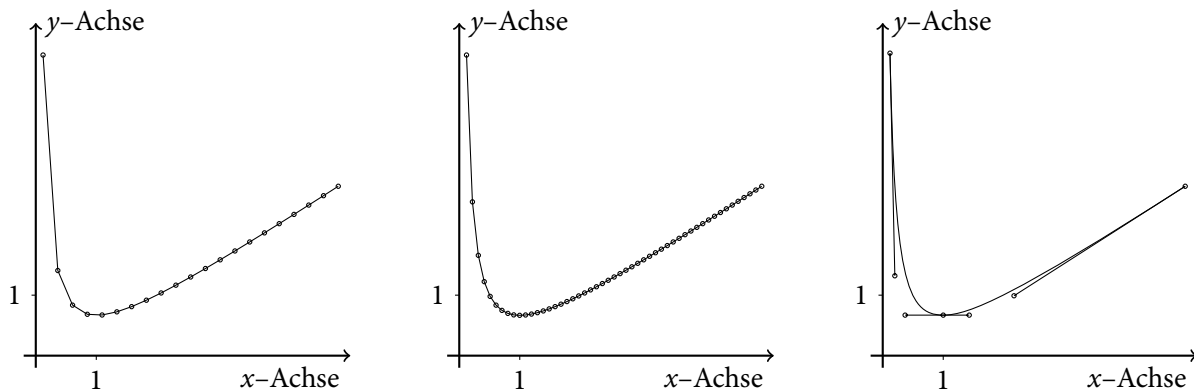
Approximation von Funktionsgraphen mit kubischen Bézierkurven

Linus Romer, Kantonsschule Glarus, linus.romer@gmx.ch

1 Motivation

Damit Funktionsgraphen in befriedigender Qualität in Vektorgraphiken dargestellt werden können, müssen oft viele Punkte in der Vektorgraphikdatei abgespeichert werden. Wenn man die Funktionsgraphen mit kubischen Bézierkurven approximiert, können häufig enorm viele Punkte eingespart werden, wodurch sich der Speicherbedarf verringert.

Im Folgenden soll als Beispiel der Graph der Funktion $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3x}$ im Bereich $x \geq 0$ und $y \leq 5$ dargestellt werden:



In der linken Darstellung wurden 21 Graphenpunkte in konstanter Horizontalabstand berechnet und durch einen Streckenzug verbunden. In der mittleren Darstellung wurde die Zahl der Graphenpunkte auf 51 erhöht. In der rechten Darstellung wurde der Graph durch zwei kubische Bézierkurven approximiert. Dafür wurden nur 7 Punkte benötigt.

Bei der Approximation ist es sinnvoll, Extrema und Wendepunkte als mögliche Zwischenpunkte in Betracht zu ziehen. Extrema helfen bei der Berechnung des optimalen Begrenzungsrechtecks der Vektorgraphik und haben für einige auf Gymnasialstufe gebräuchliche Funktionstypen (Parabeln, Hyperbeln, Sinuskurven etc.) betragsmässig maximale Krümmung. Umgekehrt haben Wendepunkte betragsmässig minimale Krümmung.

Der Autor hat ein Lua-Programm und ein dazugehöriges \LaTeX -Paket namens `bezierplot` [1] geschrieben, welches Graphen von zweifach differenzierbaren Funktionen durch kubische Bézierkurven approximiert. Dieser Artikel nimmt jedoch nur am Rande und am Ende Bezug auf `bezierplot`.

2 Polynomfunktionen bis 3. Ordnung

Graphen von Funktionen der Art $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit reellen Koeffizienten a , b , c und d können zwischen zwei beliebigen Graphenpunkten P und S *exakt* als kubische Bézierkurve dargestellt werden!

Dazu wählen wir die Kontrollpunkte Q und R so, dass $x_Q - x_P = x_S - x_R = \frac{1}{3}(x_S - x_P)$ gilt und Q auf der Tangente in P und R auf der Tangente in S liegen (siehe Abbildung rechts). Als Beweis verwendet man die oben genannten Bedingungen

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_P + \frac{1}{3}x_S \\ y_P + \frac{1}{3}(x_S - x_P)(3ax_P^2 + 2bx_P + c) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_S \\ y_S + \frac{1}{3}(x_P - x_S)(3ax_S^2 + 2bx_S + c) \end{pmatrix}$$

sowie

$$y_P = ax_P^3 + bx_P^2 + cx_P + d$$

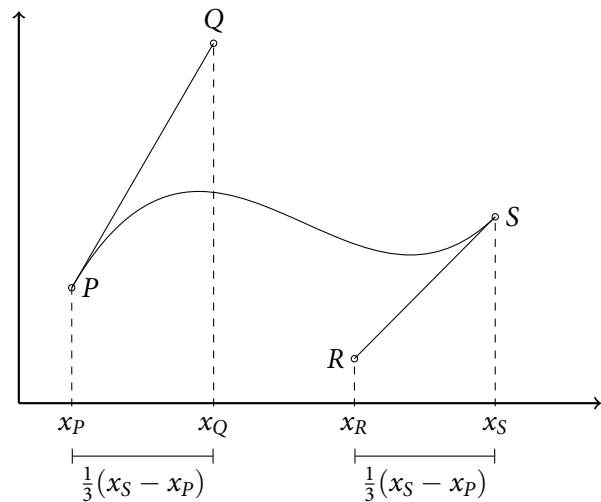
und

$$y_S = ax_S^3 + bx_S^2 + cx_S + d$$

und die Parametrisierung

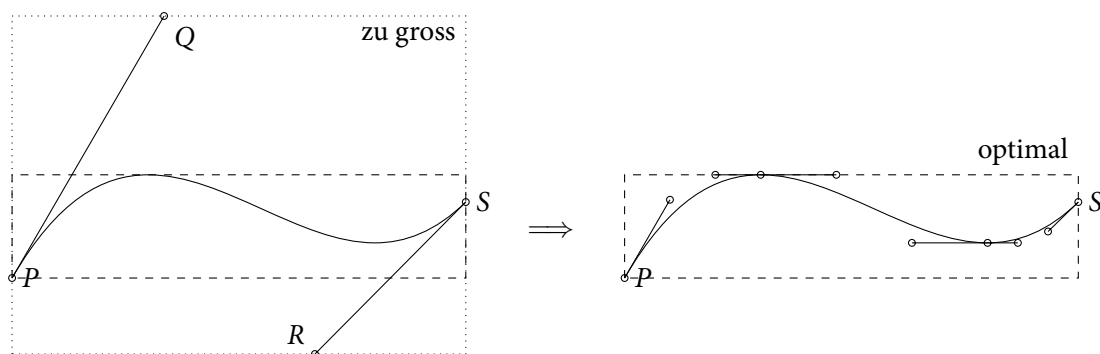
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$$

der kubischen Bézierkurve. Dadurch kann man die parametrische Darstellung der y -Koordinate wie gewünscht in $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ umformen. Das Zwischenresultat $x = (1-t)x_P + tx_S$ zeigt nebenbei, dass die Bézierkurve eine konstante Horizontalgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ hat.



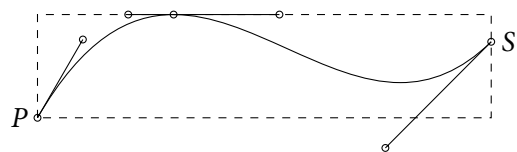
2.1 Unterteilungen in den Extrema als Hilfe für ein optimales Begrenzungsrechteck

Manche Vektorgraphikprogramme (beispielsweise das im Zusammenhang mit \LaTeX gebräuchliche TikZ) berechnen das Begrenzungsrechteck (engl. bounding box) von Bézierkurven einzig aufgrund der darin aufgeführten Punkte und Kontrollpunkte. Der abgebildete Graph hätte dann unnötigerweise ein zu grosses Begrenzungsrechteck (siehe folgende Abbildung links):

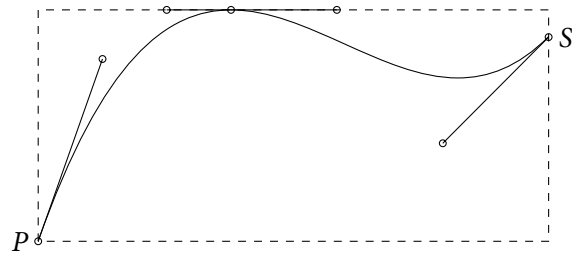


Ein möglicher Trick, um das Unvermögen dieser Programme zu umgehen, ist oben rechts abgebildet: Man unterteilt den Graphen mithilfe der lokalen Extrema in weitere Abschnitte. (In TikZ bestünde auch die Möglichkeit, mit `\clip` vorher manuell ein Begrenzungsrechteck festzulegen.)

Im vorherigen rechten Beispiel, welches den Graphen $\{(x, y) \mid y = 0.15 \cdot (x - 1.7)^2 \cdot (x - 4.7) + 2, 0.5 \leq x \leq 4.5\}$ zeigt, könnte man vielleicht auf die Idee kommen, dass die Unterteilung im Tiefpunkt unnötig ist. Ohne diese Unterteilung würde jedoch ein Kontrollpunkt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks liegen (siehe Abbildung rechts).



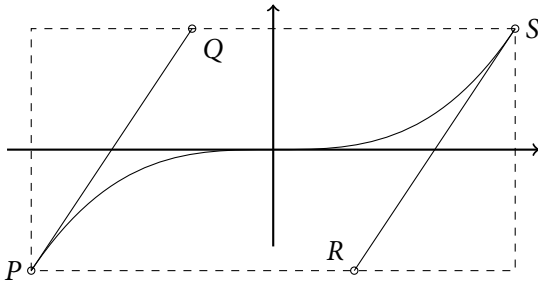
Tatsächlich muss man aber nicht immer bei allen dazwischenliegenden Extrema unterteilen, wie der im Vergleich zu vorher links erweiterte Graph $\{(x, y) \mid y = 0.15 \cdot (x - 1.7)^2 \cdot (x - 4.7) + 2, 0 \leq x \leq 4.5\}$ zeigt (siehe Abbildung rechts).



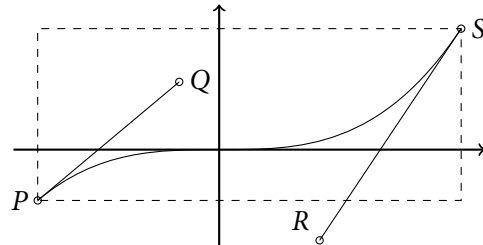
2.2 Unterteilung im Wendepunkt als Hilfe für ein optimales Begrenzungsrechteck

Eine Unterteilung im Wendepunkt kann sinnvoll sein, damit die Kontrollpunkte im optimalen Begrenzungsrechteck liegen. Wir schauen dazu im Folgenden einige Beispiele an:

Wenn zwischen den Randpunkten P und S ein Sattelpunkt liegt, ist das optimale Begrenzungsrechteck genau dann durch P und S als Eckpunkte gegeben, wenn der Sattelpunkt der Mittelpunkt von P und S ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir ohne Einschränkung den Sattelpunkt im Ursprung an und setzen $x_P < 0 < x_S$, sowie $|x_P| \leq |x_S|$. Der Graph wird dann durch $y = ax^3$ beschrieben mit $a \neq 0$.



Symmetrischer Fall: Q und R liegen innerhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

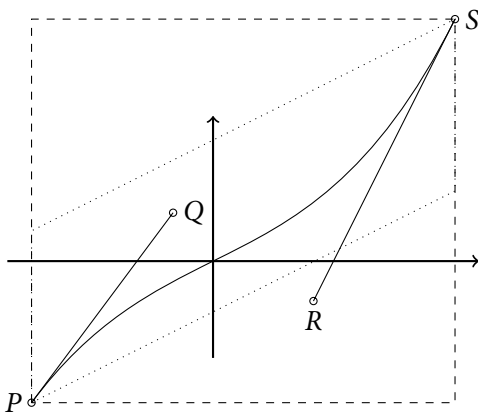


Asymmetrischer Fall: R liegt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

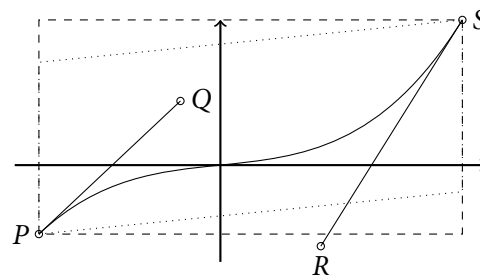
Wegen der Tangentialität gilt $\frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = 3ax_S^2$ und somit besitzt der Kontrollpunkt R die y -Koordinate $y_R = ax_S^3 - ax_S^2(x_S - x_P) = ax_S^2 x_P$.

y_R hat also das selbe Vorzeichen wie y_P und ist wegen $|ax_S^2 x_P| \geq |ax_P^3|$ auch betragsmässig mindestens so gross wie y_P . Die Gleichheit $y_R = y_P$ besteht nur im symmetrischen Fall $|x_P| = |x_S|$.

Je nach dem, wie stark wir das oben rechts abgebildete asymmetrische Beispiel vertikal scheren, liegen die Kontrollpunkte innerhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks oder eben nicht:



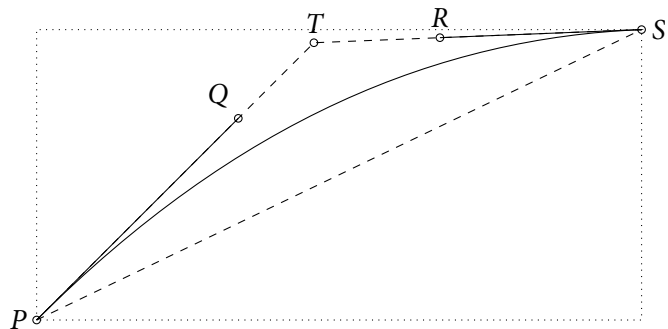
Starke vertikale Scherung: R liegt im optimalen Begrenzungsrechteck



Schwache vertikale Scherung: R liegt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

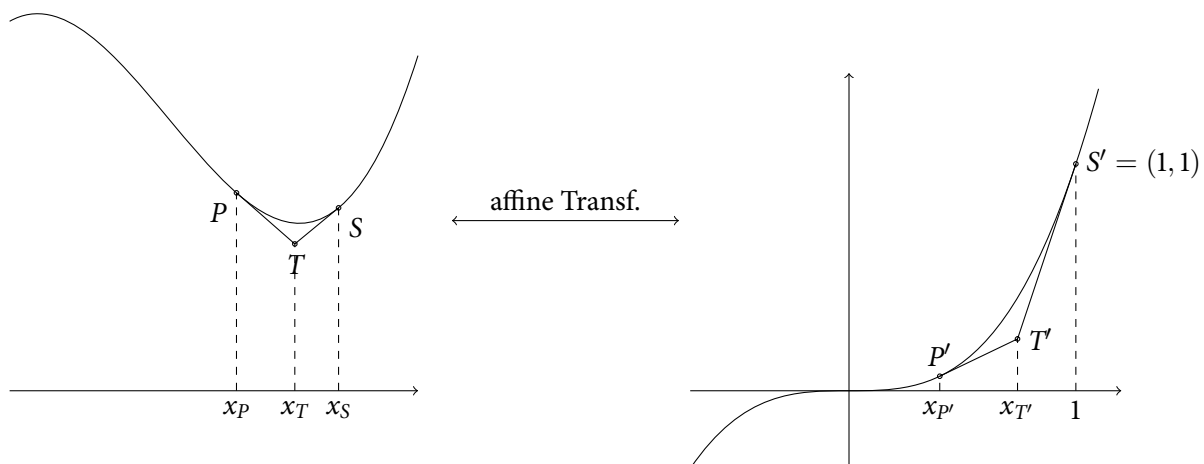
2.3 Unterteilungen in Extrema und im Wendepunkt

Man kann auf jeden Fall sagen, dass alle Kontrollpunkte innerhalb des Begrenzungsrechtecks liegen, wenn der Graph in jedem Extremum und Wendepunkt unterteilt wird. Um dies zu zeigen, schauen wir das Dreieck an, das durch die Abschnittsenden P und S und den Schnittpunkt T derer Tangenten gebildet wird (siehe Abbildung rechts). Durch unsere Unterteilung ist gewährleistet, dass innerhalb eines Abschnittes das Krümmungsvorzeichen und das Steigungsvorzeichen nicht wechselt.



Wenn wir nun zeigen können, dass die x -Koordinate von T tatsächlich zwischen den x -Koordinaten der Kontrollpunkte Q und R liegt, folgt daraus einerseits, dass der Kurvenabschnitt innerhalb des Dreiecks PST liegt und andererseits, dass die y -Koordinate von T zwischen den y -Koordinaten von P und S liegt und somit die Kontrollpunkte Q und R innerhalb des von P und S aufgespannten Begrenzungsrechtecks liegen.

Wir zeigen nun sogar noch etwas allgemeiner als vorhin gefordert, dass die x -Koordinate x_T des Tangentenschnittpunkts T zwischen den x -Koordinaten x_Q und x_R der Kontrollpunkte Q und R liegen, wenn P und S auf der gleichen horizontalen Seite des Wendepunkts liegen oder einer der beiden Punkte P oder S der Wendepunkt ist. Dazu bilden wir den Graphen der Ausgangsfunktion $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mithilfe einer affinen Transformation auf $y = x^3$ so ab, dass P oder S auf $(1, 1)$ zu liegen kommt. Konkret geschieht das durch die Verschiebung des Wendepunkts auf den Ursprung, durch eine anschließende vertikale Scherung, sodass der Wendepunkt zum Sattelpunkt wird, und durch darauffolgende horizontale und vertikale Streckungen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass S auf $(1, 1)$ abgebildet wird, $x_{P'}$ ist dann automatisch ≥ 0 .



Die Tangenten in S' respektive P' können mittels $y = 3x - 2$ respektive $y = x_{P'}^2(3x - 2x_{P'})$ beschrieben werden. Dadurch erhält man $x_{T'} = \frac{2}{3} \left(\frac{x_{P'}^2 + x_{P'} + 1}{x_{P'} + 1} \right)$ und somit das Verhältnis

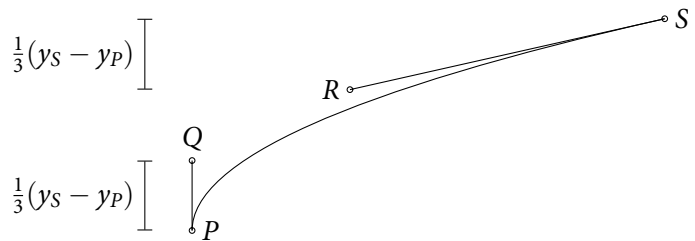
$$\frac{x_{T'} - x_{P'}}{x_{S'} - x_{P'}} = \frac{x_{P'} + 2}{3(x_{P'} + 1)}.$$

Die Verhältnisfunktion $\frac{x_{P'} + 2}{3(x_{P'} + 1)}$ liegt im Bereich $0 \leq x_{P'} \leq 1$ zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, somit ist auch $\frac{1}{3} < \frac{x_{T'} - x_{P'}}{x_{S'} - x_{P'}} < \frac{2}{3}$. Da affine Transformationen Teilverhältnisse bewahren, haben wir unsere Behauptung bewiesen:

$$\frac{1}{3} < \frac{x_T - x_P}{x_S - x_P} < \frac{2}{3}$$

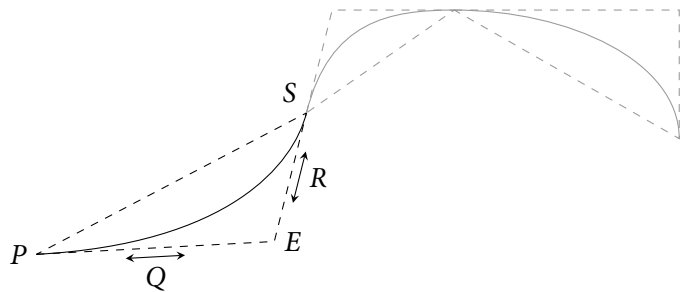
3 Umkehrfunktionen von Polynomfunktionen bis 3. Ordnung

Eine Funktion, deren Umkehrung eine Polynomfunktion der Ordnung ≤ 3 ist, kann automatisch auch exakt als kubische Bézierkurve dargestellt werden. Die Kontrollpunkte Q und R müssen dann so gewählt werden, dass $y_Q - y_P = y_S - y_R = \frac{1}{3}(y_S - y_P)$ und Q auf der Tangenten in P und R auf der Tangenten in S liegen. Das rechte Beispiel zeigt den Graphen von $y = \sqrt{x}$.



4 Weitere zweifach differenzierbare Funktionen

Nach einer Unterteilung des Graphen durch Extrema und Wendepunkte befinden sich die zu approximierenden Kurventeile jeweils innerhalb nichtspitzwinkliger Dreiecke, welche durch die Tangenten gegeben sind. Unter Variation von Q respektive R über die Strecke \overline{PE} respektive \overline{SE} kann man Q und R so bestimmen, dass der Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen minimal wird.



Dabei sollte bewusst darauf verzichtet werden, Q oder R jenseits von E zu positionieren. Denn dann könnte die Bézierkurve plötzlich zusätzliche Extrema oder Wendepunkte aufweisen, welche der originale Graph nicht besitzt. (Ohne genauere Analyse wissen wir nur, dass Bézierkurven sicherlich innerhalb der konvexen Hülle des Kontrollpolygons liegen [5].)

Wenn der minimale Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen zu gross ist, kann man rekursiv den Graphen in weitere Teile unterteilen.

Natürlich besteht die Möglichkeit, dass der Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen noch kleiner wird, wenn die Tangentialität in P und S aufgegeben wird. Dadurch hätte die Bézierkurve allerdings Extrema und Wendepunkte eventuell an einem anderen Ort als der originale Graph.

Statt mit der oben genannten Variation könnte man P und Q direkt so berechnen, dass die Bézierkurve zusätzlich auch in der 2. Ableitung übereinstimmt.

Für Graphen, welche stark gekrümmte Extrema haben, ist eine Bézierkurven-Approximation üblicherweise visuell klar im Vorteil gegenüber einer Streckenzug-Approximation. Im folgenden Beispiel wird der Graph $\{(x, y) \mid y = 5e^{-\frac{x^2}{2}}, -5 \leq x \leq 5\}$ mit 19 Punkten links mit Bézierkurven und rechts mit einem Streckenzug approximiert:



5 Das Programm `bezierplot` und vergleichbare Programme

Funktionsplotter wie `gnuplot` [2], der in TikZ implementierte Plotter [3] oder der Funktionsplotter des Vektorgraphikprogramms *Inkscape* [4] können Graphen zwar durch kubische Bézierkurven glätten ohne aber «unnötige» Graphenpunkte zu entfernen.

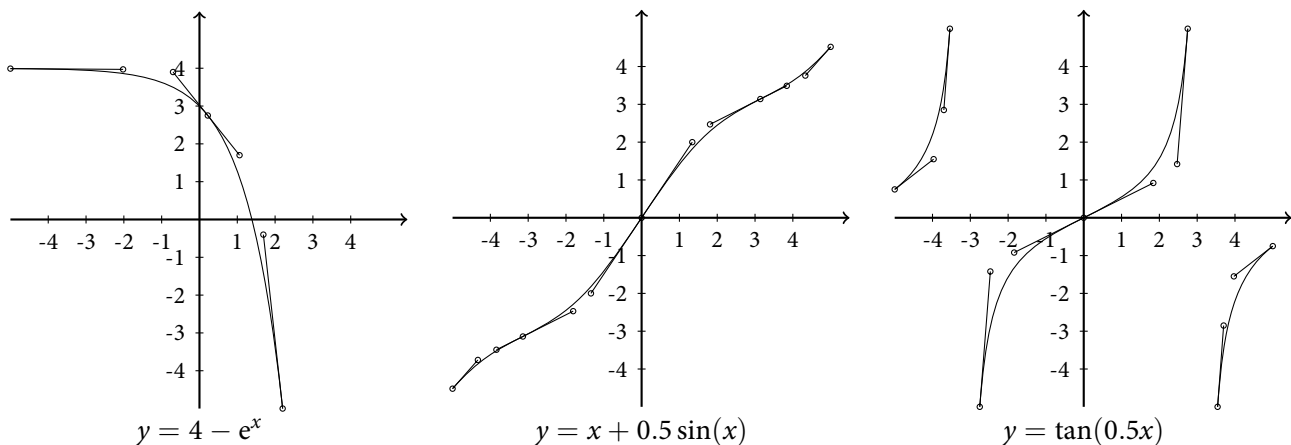
`bezierplot` ist ein auf den in diesem Artikel vorgestellten Grundlagen erstelltes Programm. Um `bezierplot` direkt mit Lua \LaTeX nutzen zu können, wurde es in der Programmiersprache Lua geschrieben (ausserdem ist Lua im Vergleich zu anderen Skriptsprachen schnell). Als Eingabe erwartet `bezierplot` einen Funktionsterm wie " x^2 " und allenfalls Angaben über das x - und das y -Intervall. Der ausgegebene Pfad entspricht der Notation von TikZ bzw. METAPOST.

Eingabe	Ausgabe im Bereich $(x, y) \in [-5, 5]^2$
<code>sqrt(x)</code>	<code>(0,0) .. controls (0,0.7454) and (1.66667,1.4907) .. (5,2.2361)</code>
<code>1.1*x+1.9</code>	<code>(-5,-3.6) -- (2.8182,5)</code>

Bei der Verwendung des (Lua) \LaTeX -Pakets wird die Ausgabe üblicherweise direkt an TikZ bzw. METAPOST weitergeleitet und bleibt verborgen.

5.1 Einige Beispielgraphen

Die folgenden Graphen wurden mit `bezierplot` approximiert. Aus Visualisierungsgründen wurden die Punkte der Bézierkurve zusätzlich hervorgehoben.



Literatur

- [1] Romer, Linus. *bezierplot* (\LaTeX -Paket mit Dokumentation auf ctan.org/pkg/bezierplot), 2018
- [2] Williams, Thomas und Kelley, Colin. *gnuplot 4.2 – An Interactive Plotting Program*, 2004
- [3] Tantau, Till. *The TikZ and PGF Packages*, 2015
- [4] Bah, Tavmjong. *Inkscape: Guide to a Vector Drawing Program*, 2017
- [5] K. A. Semendjajew et al. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teubner, 2003