

# Géométrie et nombres complexes

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

## 1. Problématique

Dans le plan, un point  $P(x; y)$  peut être associé à un nombre complexe  $z_P = x + yi$  (appelé *affiche* de  $P$ ) et les transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, symétries centrales et axiales) peuvent être décrites simplement par des fonctions complexes. Les nombres complexes fournissent ainsi un bel outil algébrique pour démontrer des résultats de nature géométrique. Ceux que nous démontrons ici ont pour point commun la construction de triangles équilatéraux ou de carrés sur chacun des côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère.

## 2. Carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère

On construit un carré externe sur chacun des côtés d'un quadrilatère et on considère le quadrilatère formé par les centres de ces carrés (voir fig.1) :

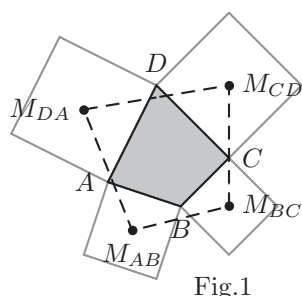


Fig.1

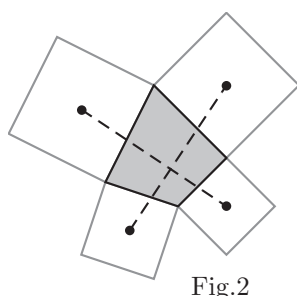


Fig.2

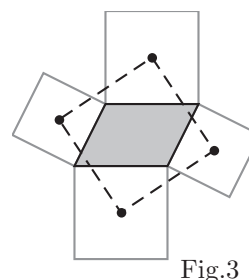
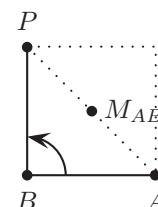


Fig.3

Nous allons montrer que les diagonales du quadrilatère construit ont la même longueur et se coupent à angle droit (*théorème de Van Aubel*<sup>1</sup>, fig.2). De plus, le quadrilatère construit est un carré si, et seulement si le quadrilatère initial est un parallélogramme (*théorème de Thébault*<sup>2</sup>, fig.3). Ces résultats sont encore valables pour des quadrilatères non convexes ou si on construit des carrés internes mais ces cas sont difficiles à illustrer car les carrés se chevauchent.

Une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine revient à multiplier un nombre complexe par  $i$ . Ainsi, si on fait tourner de  $90^\circ$  un point  $A$  autour d'un point  $B$ , on obtient le point  $P$  d'affixe  $z_P = (z_A - z_B)i + z_B$ . Le milieu  $M_{AB}$  du segment  $AP$  admet pour affixe la moyenne de  $z_A$  et  $z_P$  :

$$z_{M_{AB}} = \frac{1}{2}(z_A + z_B + (z_A - z_B)i) = \frac{1}{2}((1+i)z_A + (1-i)z_B).$$



On considère un quadrilatère dont les sommets  $A, B, C$  et  $D$  sont notés dans le sens positif. Les centres des carrés externes construits sur les côtés sont alors  $M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}$  et  $M_{DA}$  (fig.1).

1. Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906), mathématicien néerlandais, professeur à Anvers.

2. Victor Thébault (1882-1960), mathématicien français, surtout connu pour ses trois problèmes de géométrie.

**Théorème.** Les segments  $M_{AB}M_{CD}$  et  $M_{BC}M_{DA}$  sont perpendiculaires et ont la même longueur (Van Aubel). Ils ont de plus le même milieu si, et seulement si le quadrilatère initial est un parallélogramme (Thébault).

**Preuve.** Le vecteur  $\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}}$  correspond au nombre complexe

$$z_{CD} - z_{AB} = \frac{1}{2}((1+i)(z_C - z_A) + (1-i)(z_D - z_B))$$

et une rotation de  $90^\circ$  donne

$$\begin{aligned} (z_{CD} - z_{AB})i &= \frac{1}{2}((i-1)(z_C - z_A) + (i+1)(z_D - z_B)) \\ &= \frac{1}{2}((1+i)(z_D - z_B) + (1-i)(z_A - z_C)) = z_{DA} - z_{BC}, \end{aligned}$$

ce qui correspond au vecteur  $\overrightarrow{M_{BC}M_{DA}}$ . Démontrons maintenant la deuxième assertion. Les segments considérés ont des milieux d'affixes respectifs

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(z_{AB} + z_{CD}) = \frac{1}{4}((1+i)(z_A + z_C) + (1-i)(z_B + z_D)) \\ &= \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D + i(z_A - z_B + z_C - z_D)) \end{aligned}$$

et  $z_2 = \frac{1}{4}(z_B + z_C + z_D + z_A + i(z_B - z_C + z_D - z_A))$  par permutation circulaire (de  $A, B, C$  et  $D$ ). On a alors les équivalences  $z_1 = z_2$ ,  $z_A - z_B + z_C - z_D = 0$ ,  $z_A - z_B = z_D - z_C$ ,  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ , le quadrilatère initial est un parallélogramme.  $\square$

**Remarque.** Pour démontrer l'analogie en construisant des carrés internes, il suffit de noter les sommets du quadrilatère dans le sens négatif.

### 3. Triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle

Nous voulons démontrer le *théorème de Napoléon*<sup>3</sup> : sur chacun des côtés d'un triangle, on construit un triangle équilatéral externe ; les centres de gravité des triangles construits forment alors un triangle équilatéral (voir le schéma ci-contre). Ceci reste valable si on construit des triangles internes. Nous utilisons la notation  $\text{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ .

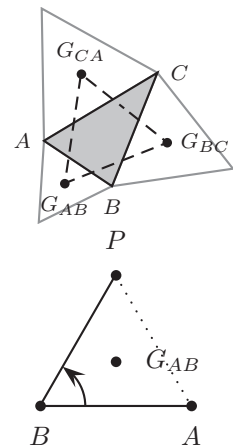
Si on fait tourner de  $60^\circ$  un point  $A$  autour d'un point  $B$ , on obtient le point  $P$  d'affixe  $z_P = (z_A - z_B) \text{cis}(60^\circ) + z_B$ . Comme  $1 - \text{cis}(60^\circ) = \text{cis}(-60^\circ)$ , on peut aussi écrire  $z_P = z_A \text{cis}(60^\circ) + z_B \text{cis}(-60^\circ)$ . Le centre de gravité  $G_{AB}$  du triangle  $ABP$  admet ainsi l'affixe

$$z_{AB} = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_P) = \frac{1}{3}((1 + \text{cis}(60^\circ))z_A + (1 + \text{cis}(-60^\circ))z_B).$$

Comme  $1 + \text{cis}(60^\circ) = \sqrt{3} \text{cis}(30^\circ)$  (et  $1 + \text{cis}(-60^\circ) = \sqrt{3} \text{cis}(-30^\circ)$  par conjugaison), on a

$$z_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\text{cis}(30^\circ)z_A + \text{cis}(-30^\circ)z_B).$$

On considère un triangle dont les sommets  $A, B$  et  $C$  sont notés dans le sens positif (resp. négatif). Les centres des triangles équilatéraux externes (resp. internes) construits sur les côtés sont alors  $G_{AB}$ ,  $G_{BC}$  et  $G_{CA}$ .



3. L'énoncé apparaît pour la première fois quatre ans après la mort de Napoléon (1769-1821) mais un mathématicien italien a prétendu en 1911 que l'empereur aurait posé le problème à Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

**Théorème de Napoléon.** Le triangle  $G_{AB}G_{BC}G_{CA}$  est équilatéral.

**Preuve.** Le vecteur  $\overrightarrow{G_{AB}G_{BC}}$  correspond au nombre complexe

$$z_{BC} - z_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\operatorname{cis}(30^\circ)(z_B - z_A) + \operatorname{cis}(-30^\circ)(z_C - z_B))$$

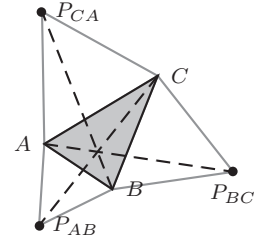
et une rotation de  $60^\circ$  donne  $(z_{BC} - z_{AB}) \operatorname{cis}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} (i(z_B - z_A) + \operatorname{cis}(30^\circ)(z_C - z_B))$ . En remplaçant  $i$  par  $\operatorname{cis}(30^\circ) - \operatorname{cis}(-30^\circ)$ , on obtient

$$(z_{BC} - z_{AB}) \operatorname{cis}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\operatorname{cis}(30^\circ)(z_C - z_A) + \operatorname{cis}(-30^\circ)(z_A - z_B)) = z_{CA} - z_{AB}$$

ce qui correspond au vecteur  $\overrightarrow{G_{AB}G_{CA}}$ .  $\square$

## 4. Point de Torricelli

Dans le contexte précédent, nous pourrions montrer que les droites  $AG_{BC}$ ,  $BG_{CA}$  et  $CG_{AB}$  se coupent en un point (appelé *point de Napoléon*) mais nous préférons démontrer que les segments en traitillés dans le schéma ci-contre ont la même longueur et sont supportés par des droites concourantes qui forment des angles de  $60^\circ$ . De plus, nous donnerons une interprétation concrète de leur point d'intersection lorsque le triangle initial n'admet aucun angle supérieur à  $120^\circ$ .



On note  $P_{AB}$  le point d'affixe  $z_{P(AB)} = z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ)$  comme déjà vu et on définit de manière analogue  $P_{BC}$  ainsi que  $P_{CA}$ .

**Théorème.** Les segments  $AP_{BC}$ ,  $BP_{CA}$  et  $CP_{AB}$  ont la même longueur et sont supportés par des droites concourantes qui forment un angle de  $60^\circ$  les unes avec les autres.

**Preuve.** Si on fait tourner le vecteur  $\overrightarrow{AP_{BC}}$  de  $120^\circ$ , on obtient le vecteur  $\overrightarrow{BP_{CA}}$  car le nombre complexe résultant est

$$\begin{aligned} z &= (z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(120^\circ) = (z_B \operatorname{cis}(60^\circ) + z_C \operatorname{cis}(-60^\circ) - z_A) \operatorname{cis}(120^\circ) \\ &= -z_B + z_C \operatorname{cis}(60^\circ) - z_A \underbrace{\operatorname{cis}(120^\circ)}_{=-\operatorname{cis}(-60^\circ)} = z_C \operatorname{cis}(60^\circ) + z_A \operatorname{cis}(-60^\circ) - z_B \\ &= z_{P(CA)} - z_B \end{aligned}$$

De manière analogue, en faisant tourner le vecteur  $\overrightarrow{BP_{CA}}$  de  $120^\circ$ , on obtient le vecteur  $\overrightarrow{CP_{AB}}$ . Montrons maintenant que les trois droites sont concourantes. Soit  $I$  le point d'intersection des droites  $AP_{BC}$  et  $BP_{CA}$ . Il existe alors des nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $z_I = z_A + \lambda(z_{P(BC)} - z_A)$  et  $z_I = z_B + \mu(z_{P(CA)} - z_B)$ . Multiplions la première relation par  $\operatorname{cis}(60^\circ)$ , la seconde par  $\operatorname{cis}(-60^\circ)$  et ajoutons les deux résultats :

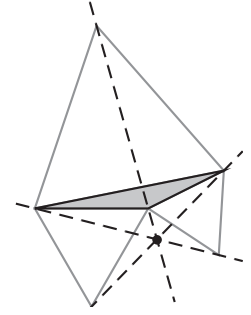
$$z_I = z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + \lambda(z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ) + \mu(z_{P(CA)} - z_B) \operatorname{cis}(-60^\circ).$$

Comme  $(z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(60^\circ)$  et  $(z_{P(CA)} - z_B) \operatorname{cis}(-60^\circ)$  sont égaux à  $z_C - z_{P(AB)}$ , on obtient

$$\begin{aligned} z_I &= z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ) + (\lambda + \mu)(z_C - z_{P(AB)}) \\ &= z_{P(AB)} + (\lambda + \mu)(z_C - z_{P(AB)}), \end{aligned}$$

ce qui montre que le point  $I$  se trouve aussi sur la droite  $CP_{AB}$ .  $\square$

Le point d'intersection des droites  $AP_{BC}$ ,  $BP_{CA}$  et  $CP_{AB}$  est appelé *point de Torricelli*<sup>4</sup>(ou de Fermat<sup>5</sup>). Lorsque tous les angles du triangle initial sont inférieurs à  $120^\circ$ , il s'agit du point situé à l'intérieur du triangle à partir duquel on voit chaque arête sous un angle de  $120^\circ$ . Si le triangle initial présente un angle de  $120^\circ$ , le point de Torricelli est le sommet associé à cet angle. Si un angle est supérieur à  $120^\circ$ , le point de Torricelli se trouve à l'extérieur du triangle initial comme illustré ci-contre.



**Théorème.** Si aucun angle du triangle initial n'excède  $120^\circ$ , le point de Torricelli minimise l'expression  $f(P) = \|\overrightarrow{PA}\| + \|\overrightarrow{PB}\| + \|\overrightarrow{PC}\|$ .

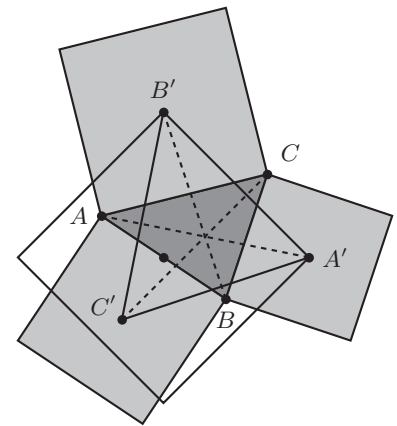
**Preuve.** On note  $T$  le point de Torricelli du triangle  $ABC$ ,  $a = \|\overrightarrow{TA}\| = |z_A - z_T|$ ,  $b = \|\overrightarrow{TB}\| = |z_B - z_T|$ ,  $c = \|\overrightarrow{TC}\| = |z_C - z_T|$ ,  $\varphi = \arg(z_A - z_T)$  et  $j = \text{cis}(120^\circ)$ . Si aucun angle n'excède  $120^\circ$ , alors  $z_A - z_T = a \cdot \text{cis}(\varphi)$ ,  $z_B - z_T = b \cdot \text{cis}(\varphi)j$  et  $z_C - z_T = c \cdot \text{cis}(\varphi)j^2$ , donc

$$\begin{aligned} (a + b + c) \text{cis}(\varphi) &= (z_A - z_T) + (z_B - z_T)j^2 + (z_C - z_T)j \\ &= (z_A + z_B j^2 + z_C j) - z_T(1 + j + j^2). \end{aligned}$$

Comme  $1 + j + j^2 = 0$ , on peut remplacer  $z_T$  par n'importe quel nombre complexe  $z$ , donc  $(a + b + c) \text{cis}(\varphi) = (z_A - z) + (z_B - z)j^2 + (z_C - z)j$ . En considérant le module et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient  $a + b + c \leq |z_A - z| + |z_B - z| + |z_C - z|$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

## 5. Carrés construits sur les côtés d'un triangle

On note  $A' = M_{BC}$ ,  $B' = M_{CA}$  et  $C' = M_{AB}$  les centres des carrés externes construits sur les côtés d'un triangle  $ABC$  (voir formule §2). Le lecteur intéressé peut démontrer que  $M_{B'A'}$  est le milieu du segment  $AB$  (*théorème de Neuberg*<sup>6</sup>) et que les segments  $AA'$  et  $B'C'$  sont perpendiculaires et ont la même longueur. On en déduit que la droite  $AA'$  est une hauteur du triangle  $A'B'C'$  et que les trois droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  se coupent en un point (appelé *point de Vecten*<sup>7</sup>).



4. Evangelista Torricelli (1608-1647), physicien et mathématicien italien, inventeur du baromètre.

5. Pierre de Fermat (?-1665), magistrat et mathématicien français.

6. Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840-1926), mathématicien luxembourgeois qui prit la nationalité belge.

7. mathématicien peu connu dont on sait juste qu'il a enseigné au lycée de Nîmes dans les années 1810-1818.