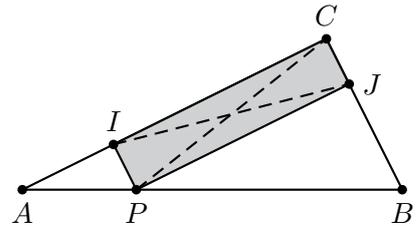


Projections dans un triangle

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

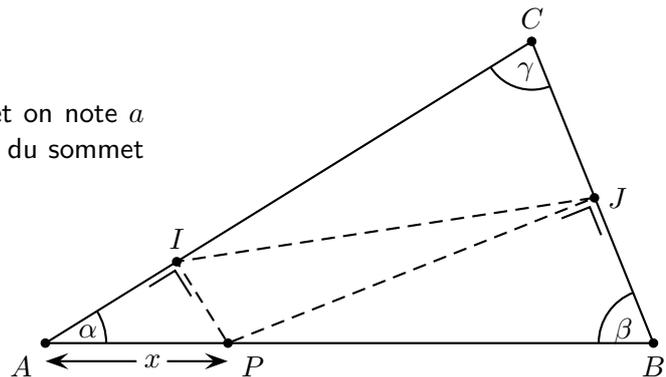
Dans un triangle rectangle ABC , lorsqu'un point P situé sur l'hypoténuse est projeté orthogonalement sur les cathètes, on obtient un rectangle $IPJC$ comme illustré ci-contre. Les diagonales IJ et PC ont donc la même longueur, celle-ci est minimale lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB .



Nous nous proposons de généraliser ce résultat à un triangle ABC quelconque. On considère un point P sur un côté du triangle (disons sur le côté AB) et on projette ce point orthogonalement sur les deux autres côtés, obtenant des points I (sur le côté AC) et J (sur le côté BC). Nous voulons calculer la longueur du segment IJ et savoir où placer le point P pour rendre cette longueur minimale.

2. Notations

On adopte les notations du schéma ci-contre et on note a (resp. b et c) la longueur du côté situé en face du sommet A (resp. B et C).



3. Première approche

Comme nous ne savons pas à quel résultat nous attendre, nous allons exprimer la longueur (IJ) en fonction de $x = (AP)$. L'angle en P dans le triangle IJP est $180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ et le théorème du cosinus implique

$$\begin{aligned}(IJ)^2 &= (PI)^2 + (PJ)^2 - 2(PI)(PJ) \cos(180^\circ - \gamma) \\ &= (PI)^2 + (PJ)^2 + 2(PI)(PJ) \cos(\gamma).\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la relation "sin-opp-hyp" dans les triangles rectangles IPA et JPB , on obtient $(PI) = x \sin \alpha$ et $(PJ) = (c - x) \sin \beta$. On a donc

$$(IJ)^2 = x^2 (\sin \alpha)^2 + (c - x)^2 (\sin \beta)^2 + 2x(c - x) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma).$$

Nous allons exprimer maintenant tous les angles à l'aide d'un seul, disons γ . En appliquant le théorème du sinus dans le triangle ABC , on obtient $\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$ et $\sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma$.

On en déduit $(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [x^2 a^2 + (c-x)^2 b^2 + 2x(c-x)ab \cos \gamma]$. On peut alors développer et réordonner le polynôme en x entre crochets :

$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)x^2 - 2bc(b - a \cos \gamma)x + b^2 c^2].$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle ABC dit que $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$ et d'autre part, on a $b - a \cos \gamma = c \cos \alpha$ car la hauteur issue du sommet B partage le côté b en deux segments de longueurs respectives $a \cos \gamma$ et $c \cos \alpha$. Il s'ensuit donc

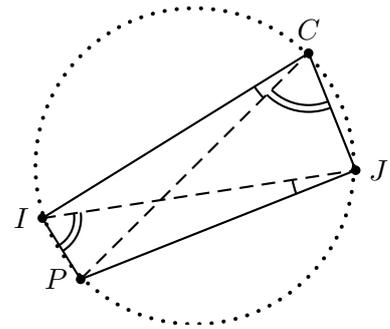
$$(IJ)^2 = \left(\frac{\sin \gamma}{c}\right)^2 [c^2 x^2 - 2bc^2 x \cos \alpha + b^2 c^2] = (\sin \gamma)^2 [x^2 - 2bx \cos \alpha + b^2].$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle APC montre que la dernière expression entre crochets n'est rien d'autre que $(CP)^2$. On a donc $(IJ)^2 = (\sin \gamma)^2 (CP)^2$.

Conclusion. On a $(IJ) = (CP) \sin \gamma$. La longueur (IJ) est minimale lorsque (CP) est minimale, c'est à-dire lorsque P est la projection orthogonale de C sur le côté AB . Cette longueur minimale est alors $(IJ) = h_C \sin \gamma = a \sin(\beta) \sin(\gamma)$.

4. Variante de preuve

Au vu de la simplicité du résultat, il est légitime de présenter une preuve plus courte. Le quadrilatère $IPJC$ est inscriptible dans un cercle de diamètre PC (cercle de Thalès). L'angle au sommet C est $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec $\gamma_1 = \widehat{PCI}$ et $\gamma_2 = \widehat{PCJ}$. Par le théorème de l'angle inscrit, on a alors $\widehat{PJI} = \widehat{PCI} = \gamma_1$ et $\widehat{PIJ} = \widehat{PCJ} = \gamma_2$.



Dans le triangle PIJ , l'angle au sommet P est donc $180^\circ - \gamma$ et le théorème du sinus implique $\frac{(IP)}{\sin \gamma_1} = \frac{(IJ)}{\sin(180^\circ - \gamma)}$. Comme $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ et $\sin \gamma_1 = \frac{(IP)}{(PC)}$ selon le triangle rectangle PIC , on en déduit que $(PC) = \frac{(IJ)}{\sin \gamma}$, donc $(IJ) = (PC) \sin \gamma$. \square

5. Corollaires

Etablissons maintenant des relations intéressantes au sujet de notre quadrilatère $IPJC$.

Corollaire 1. En utilisant la formule d'addition des angles et les relations dans les triangles rectangles CIP et CJP , on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{(IJ)}{(PC)} &= \sin \gamma = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2) + \cos(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \\ &= \frac{(PI)}{(PC)} \cdot \frac{(JC)}{(PC)} + \frac{(IC)}{(PC)} \cdot \frac{(PJ)}{(PC)} = \frac{(PI)(JC) + (IC)(PJ)}{(PC)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $(PI)(JC) + (IC)(PJ) = (IJ)(PC)$ autrement dit, dans le quadrilatère $IPJC$, la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales. Cette propriété caractérise les quadrilatères convexes inscriptibles (théorème de Ptolémée).

Corollaire 2. L'aire \mathcal{A} du quadrilatère $IPJC$ peut être calculée avec les triangles rectangles CIP et CJP . On peut également utiliser le triangle JCI qui présente un angle γ et le triangle JPI qui présente un angle $180^\circ - \gamma$ (ayant le même sinus que γ) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}((CI)(IP) + (CJ)(JP)) = \frac{1}{2}((JP)(PI) + (JC)(CI)) \sin \gamma.$$

En isolant $\sin \gamma$, on peut exprimer le quotient des diagonales à l'aide des produits des paires de côtés successifs :

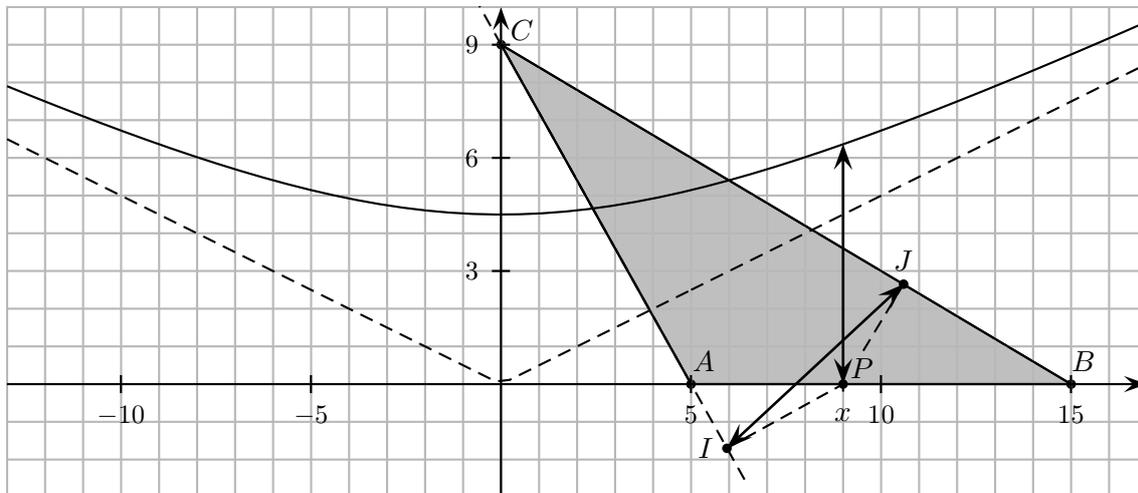
$$\frac{(IJ)}{(PC)} = \frac{(CI)(IP) + (CJ)(JP)}{(JP)(PI) + (JC)(CI)}$$

Cette propriété est en fait valable pour tous les quadrilatères convexes inscriptibles $IPJC$ (deuxième théorème de Ptolémée).

6. Remarque

Nous avons raisonné avec un triangle ABC dont la hauteur h_C issue du sommet C coupe le côté AB , c'est-à-dire lorsque les angles α et β sont aigus. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut généraliser le problème en considérant les trois droites supportant les côtés du triangle.

Nous avons reproduit ci-dessous le graphe de $y = (IJ)$ en fonction de l'abscisse x du point P (relativement à celle de C). Dans cet exemple, on a $\gamma \cong 30^\circ$ et $y_C = 9$, donc $y = (CP) \sin \gamma \cong \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 81}$, ce qui est asymptotique à la fonction $y = \frac{1}{2}|x|$ dont le graphe est donné en traitillés.



7. Conclusion

Nous avons généralisé à un triangle quelconque un résultat évident concernant les triangles rectangles. Alors que la première démonstration utilisait les théorèmes du sinus et du cosinus, la deuxième a permis de découvrir les théorèmes de Ptolémée sur les quadrilatères inscriptibles (que nous n'avons pas démontrés de manière générale). La problématique peut être introduite avec un logiciel tel que Geogebra : on peut identifier les coefficients a et b d'une fonction $f(x) = a\sqrt{x^2 + b^2}$ puis, en déplaçant le sommet C sur l'axe Oy (ou les sommets A et B sur l'axe Ox), on peut exprimer a à l'aide de l'angle γ et interpréter la racine carrée comme la distance entre les points P et C .