

Bericht zur Maturarbeit

# Populationen im Wettstreit

H.R. Schneeбели, Kantonsschule Baden

## Problembeschreibung

Wir stellen uns eine Insel vor, auf der sich Hasen und Füchse vermehren. Das ist die klassische Räuber-Beute-Situation. Man geht dann davon aus, dass die Füchse den Bestand der Hasen dezimieren, bis Futtermangel zur Abnahme des Fuchsbestandes führt. In den entsprechenden Differenzgleichungen (oder auch Differentialgleichungen) wird die Grösse des Konfliktpotenzials zwischen den  $H$  Hasen und den  $F$  Füchsen proportional zum Produkt  $p = H \cdot F$  angenommen, weil es zwischen  $H$  Hasen und  $F$  Füchsen  $p$  Zweierbegegnungen gibt. Für die kleine hypothetische Insel ist diese Modellvorstellung üblich und brauchbar, aber wie steht es, wenn man alle Füchse und alle Hasen Nordamerikas betrachtet? Hier kann kein Fuchs alle Hasen bedrohen und eine Begegnung zwischen Hase und Fuchs beansprucht eine gewisse Zeit, so dass  $p$  das tatsächliche Konfliktpotential gewaltig überschätzt. Diese Schwachstelle betrifft die meisten einfacheren oder gar naiven Populations- und Epidemiemodelle.

Zwei Schüler, M und F, interessierten sich für Populationsmodelle, sie möchten nach der Matur Biologie studieren. Ihre Maturarbeit hatte zum Ziel, neue Wege zu erkunden, um Populationen im Wettstreit so modellieren, dass das Modell skalierbar ist von der “kleinen Insel” bis zum “Kontinent” oder von der Grippe im Sportlager bis zur Pandemie.

## Ergebnisse und Erfahrungen

M und F haben verschiedene Modellsituationen analysiert, in denen das Konfliktpotential *nicht* durch das Produkt der Bestände in den konkurrierenden Populationen ausgedrückt wird, zum Beispiel beim Kampf der Wölfe gegen eine Büffelherde. Da die Wölfe eine Herde nur am Rand angreifen, befinden sich von den  $B$  Büffeln bloss eine Zahl  $b$  proportional zu  $\sqrt{B}$  in Reichweite der Wölfe. Oder beim Angriff von  $F$  Falken auf einen Schwarm von  $T$  Tauben erwischt jeder Falke nur die Tiere am Rand also etwa  $T^{2/3} < T$  und die Gesamtzahl der Beute ist pro Tag begrenzt durch eine Zahl proportional zu  $F$ , weil der Falke pro Tag nicht mehr Tauben schlägt, als er zum Überleben benötigt.

Die mathematischen Modelle von M und F wurden als Differenzgleichungen formuliert und mit Taschenrechner und PC numerisch bearbeitet. Die Ergebnisse liessen sich dann als Grafiken ausgeben. Nicht alle Modellansätze waren erfolgreich. Aber die Beschäftigung mit eigenen Modellen und die gegenseitige Kritik hat dazu geführt, dass beide Schüler Fortschritte gemacht haben im Entwickeln von mathematischen Modellen, im Programmieren (sie haben Python kennen gelernt) und im Verfassen eines auch von Aussenstehenden lesbaren Schlussberichtes.

Die grössten Schwachstellen waren letztlich sprachlicher und formaler Art. Der Zeitbedarf für die bereinigte Schlussfassung des Berichtes wurde grob unterschätzt. M und F waren in der Maturarbeit erstmals mit der Aufgabe konfrontiert, einen grösseren Text zu zweit kooperativ zu bewältigen.

## Bemerkungen

Die Arbeit wurde betreut von Dana Bulaty (Klassenlehrerin und Grundlagenfach M) und Hansruedi Schneebe (Ergänzungsfach AM).

Das Thema ist bei weitem nicht ausgeschöpft. Ein besonderes Problem ist die Schätzung von realistischen Modellparametern. Dank gewissen Normierungen lassen sich qualitative Untersuchungen anstellen, auch wenn nicht alle Parameter bekannt sind: Gibt es im Modell (oder in der Simulation) anziehende Fixpunkte oder stabile Zyklen?

Ich kenne keine biologische oder medizinische Hintergrundtheorie, die es gestatten würde, Modelle aus grundlegenden Prinzipien und oder gar Axiomen zu entwickeln. Das ist eine Chance für die Schüler, denn sie haben viel mehr Narrenfreiheit als bei physikalischen Modellen, die ihnen entsprechende Fachkenntnisse abverlangen würden. Das schliesst aber nicht aus, dass sie die Gedankenschritte sorgfältig dokumentieren und die Ergebnisse kritisch prüfen sollen. M und F haben gelegentlich verschiedene Alternativen unabhängig von einander verfolgt, um ihre Ergebnisse gegenseitig zu testen. Schliesslich haben sie sich in einfachen Fällen auch an ein Modell für den Verlauf von Infektionskrankheiten mit Differentialgleichungen gewagt und es mit dem CAS-Rechner und in Python numerisch bearbeitet.

Neulich ist ein sehr nützlicher Text erschienen, der Untersuchungen in der von M und F gemachten Art stark unterstützen könnte. Die beiden Autoren haben praktische Erfahrung in biomedizinischen Anwendungen der Mathematik. Ihr Buch ist streng methodisch gegliedert, didaktisch ausgezeichnet konzipiert und benutzerfreundlich. Es enthält eine Fülle von Anregungen für Maturarbeiten.

**Literatur:** Belinda Barness and Glenn Robert Fulford, *Mathematical Modelling With Case Studies, A Differential Equations Approach Using Maple and Matlab*, 2nd Edition, CRC-Press, ISBN 978-1-4200-8348-4

Ein ganz anderer Ansatz könnte durch stochastische Simulation auf der Basis von Zufallsgraphen versucht werden.

Wenn Sie Fragen haben, so freue ich mich auf ein mail.

schneebe@othello.ch