



# Bulletin N° 155

## Inhaltsverzeichnis

<b>AUS DEM VORSTAND</b>	<b>5</b>
Josef Züger Gedanken des Präsidenten/Pensée du président/Pensieri del presidente	5
<b>COMMISSIONE DI MATEMATICA DELLA SVIZZERA ITALIANA</b>	<b>6</b>
Claudio Marsan L'irrazionalità di $\pi$	6
<b>COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE</b>	<b>10</b>
Cyril Pasquier et Alexandre Junod Le polynôme tangio-sécant	10
CRM Cours: Cryptologie	13
CRM Monographie: Analyse	14
<b>COMMISSION ROMANDE DE PHYSIQUE</b>	<b>15</b>
Pierik Falco La Précession des Équinoxes	15
Didier Roulet Congrès UdPPC à Lille	20
CRP Cours: Une belle histoire du temps	22
<b>DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION</b>	<b>24</b>
Martin Lieberherr Dipolkraft	24
Martin Lieberherr Charakteristik einer LED-Lampe	26
Martin Lieberherr Schoggimond	27
Fritz Gassmann Verschränkung im Schwerpunktfach	28

<b>DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION</b>	<b>38</b>
Fritz Gassmann	
Berechnungen zum Artikel über Verschränkung	38
Anina Steinlin	
Berufswahl nach einem Studium der Mathematik, Astronomie oder Physik	40
Willi Botta	
Ein einfacher Weg zu allen pythagoreischen Zahlentripeln	42
ETH Zürich	
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	47
Georg Keller	
Erstaunliche Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- resp. Potenzsummen	48
SMG, DMK, ETH	
34. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	52
Schweizerische Mathematische Gesellschaft	
Ausschreibung der Matura Awards 2024	54
DMK	
Kurs: Extremwerttheorie	55
<b>WETTBEWERBE/CONCOURS</b>	<b>56</b>
Lara Gafner	
Des médailles, un site web pour les enseignants et une grande fête : les nouveautés des Olympiades de mathématiques et de physique	56
Lara Gafner	
Medaillen, Unterrichtstipps und ein grosses Fest: Neues von den Mathematik- und Physik-Olympiaden	59

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

[www.vsmp.ch](http://www.vsmp.ch) – [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) – [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch)

Titelseite – *Page de Titre*

Modèle de la Terre en forme d'ellipsoïde. Article à la page 15 de ce numéro.

Josef Züger

Präsident VSMP, praesident@vsmp.ch

## Gedanken des Präsidenten Pensées du président Pensieri del presidente

Liebe Leserinnen, liebe Leser

Ende April durfte ich die öffentliche Ausstellung der Finalarbeiten von Schweizer Jugend forscht besuchen. Ich war überwältigt von der Vielfalt der Themen, mit denen sich die Nachwuchsforscherinnen und -forscher beschäftigt haben. Insbesondere die Arbeiten aus unseren Fachbereichen zeigen deutlich, dass sich junge Menschen sowohl mit mathematischen als auch mit physikalischen Fragestellungen auseinandersetzen wollen. Ich erachte es als unsere Aufgabe, dieses Interesse zu wecken, zu fördern und uns dafür einzusetzen, dass unsere Fächer nicht im Trubel von Überfachlichem und künstlicher Intelligenz untergehen. Es scheint unbestritten, dass überfachliche Kompetenzen nicht ohne fachliche Inhalte respektive fachliches Wissen gelehrt und gelernt werden können. Und gerade die Diskussion um die fachlichen Inhalte wird wohl in allen Kantonen und Schulen im kommenden Herbst Fahrt aufnehmen, wenn die Umsetzung des im kommenden Monat erscheinenden Rahmenlehrplans zur Diskussion stehen wird.

Josef Züger, Präsident VSMP



Chères lectrices, chers lecteurs

Fin avril, j'ai eu le privilège de visiter l'exposition publique des travaux présentés lors de la finale du 58e concours national de la fondation Science et jeunesse. J'ai été impressionné par la diversité des sujets abordés par les jeunes chercheuses et chercheurs. En particulier, les travaux dans nos domaines spécifiques montrent clairement que les jeunes veulent s'investir tant dans des questions mathématiques que physiques. Je considère comme notre devoir de susciter, de promouvoir cet intérêt et de nous engager pour que nos matières ne disparaissent pas dans l'agitation des transversales et de l'intelligence artificielle. Il semble indiscutable que

les compétences transversales ne peuvent être enseignées et apprises sans contenus spécifiques respectifs ou sans connaissances spécialisées. Et c'est précisément le débat sur les contenus et les connaissances qui prendra probablement de l'ampleur dans tous les cantons et écoles cet automne, lorsque la mise en œuvre du plan d'études cadre qui, dès le mois prochain, sera mis en discussion.

Josef Züger, Président de la SSPMP



Care lettrici, cari lettori,

alla fine di aprile ho avuto il privilegio di visitare la mostra pubblica dei lavori finali di Scienza e gioventù. Sono rimasto impressionato dalla varietà dei temi affrontati dai giovani ricercatori. In particolare i lavori dei nostri settori specialistici mostrano chiaramente il loro interesse e impegno per questioni matematiche e fisiche. Considero nostro dovere risvegliare e promuovere questo interesse e impegnarci affinché le nostre materie non finiscano soffocate dall'agitazione dovuta alla trasversalità e all'intelligenza artificiale. Pare infatti unanime che le competenze trasversali non possono essere insegnate e apprese senza contenuti e conoscenze disciplinari specialistici. Ed è proprio il dibattito sui contenuti specifici che prenderà probabilmente il via in tutti i cantoni e le scuole questo autunno, quando si discuterà dell'attuazione del piano quadro degli studi che verrà pubblicato il prossimo mese.

Josef Züger, Presidente SSIMF

Claudio Marsan  
 CMSI, claudio.marsan@bluewin.ch

## L'irrazionalità di $\pi$

L'irrazionalità di  $\pi$ , sebbene sospettata fin dall'antichità, fu dimostrata per la prima volta solo nel 1761 dal matematico e filosofo svizzero Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Lambert basò la sua dimostrazione (vedi [3]) sullo sviluppo in frazione continua di  $\tan x$ ; diversi matematici, tra i quali Gauss e Hermite, proposero poi altre dimostrazioni (alcune di queste sono presentate in [5] e in [6]).

Lo scopo di questo breve articolo è fornire una dimostrazione dell'irrazionalità di  $\pi$  che sia comprensibile anche a uno studente liceale che abbia delle conoscenze elementari di calcolo differenziale e integrale. Per questo motivo l'articolo si basa sulla dimostrazione per assurdo proposta nel 1949 da Ivan Niven in [4].

Ammettiamo che  $\pi = a/b$  sia il quoziente di due numeri interi positivi  $a$  e  $b$  e che  $n$  sia un numero intero non negativo.

1. La funzione polinomiale  $g$  definita da

$$g(x) := \frac{x^n}{n!}$$

è infinitamente derivabile ed è facile dimostrare che la sua derivata di ordine  $k$  vale

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k < n \\ 1, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases} \quad (1)$$

Possiamo notare che per  $k \neq n$  vale

$$g^{(k)}(0) = 0. \quad (2)$$

Ricordiamo inoltre che per ogni numero reale  $x$  vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \quad (3)$$

2. La funzione polinomiale  $h$  definita da

$$h(x) := (a - bx)^n$$

è infinitamente derivabile ed è facile dimostrare che la sua derivata di ordine  $k$  vale

$$h^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} (a - bx)^{n-k} (-b)^k, & \text{se } 0 \leq k < n \\ n! (-b)^n, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases} \quad (4)$$

Possiamo notare che per  $k \neq n$  vale

$$h^{(k)}(\pi) = h^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0. \quad (5)$$

3. La funzione reale  $f$  sia il prodotto delle funzioni  $g$  e  $h$ :

$$f(x) := g(x) \cdot h(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} = \frac{(bx)^n \cdot \left(\frac{a}{b} - x\right)^n}{n!}. \quad (6)$$

Siccome per ogni numero reale  $x \in ]0, \pi[$  valgono

$$bx > 0 \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} - x > 0$$

possiamo concludere che la funzione  $f$  è positiva nell'intervallo aperto  $]0, \pi[$ .

Le derivate di ordine  $k$  della funzione  $f$  possono essere calcolate applicando la *regola di Leibniz* sulle derivate di ordine superiore di un prodotto (tale regola può essere dimostrata facilmente per induzione, da notare l'analogia con la formula del binomio di Newton):

$$f^{(k)}(x) = [g(x) \cdot h(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot g^{(k-i)}(x) \cdot h^{(i)}(x). \quad (7)$$

Siamo interessati ai valori assunti da  $f^{(k)}(x)$  nei punti  $x = 0$  e  $x = \pi$ . Dalle espressioni (2) e (5) ricaviamo che i termini  $g^{(k-i)}(x) \cdot h^{(i)}(x)$ , che appaiono nella sommatoria in (7), si annullano in  $x = 0$  e in  $x = \pi$  quando la coppia  $(k - i, i)$  è diversa da  $(n, n)$ , ossia se  $k \neq 2n$ . Nel caso  $k = 2n$  per il termine di indice  $i = n$  della sommatoria vale

$$\binom{2n}{n} \cdot g^{(n)}(x) \cdot h^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot 1 \cdot n! \cdot (-b)^n = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (-b)^n.$$

Tale termine è un numero intero che non dipende da  $x$ .

Riassumendo: abbiamo ricavato che la funzione  $f$  e tutte le sue derivate di ordine superiore assumono valori interi nei punti  $x = 0$  e  $x = \pi$ .

4. Definiamo ora la funzione polinomiale di grado  $2n$

$$F(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot f^{(2k)}(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x). \quad (8)$$

Per costruzione tutte le derivate di ordine superiore della funzione  $F$  assumono valori interi nei punti  $x = 0$  e  $x = \pi$ .

La derivata seconda della funzione  $F$  vale

$$F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{n+1} f^{(2n)}(x)$$

(ricordiamo che  $f$  ha grado  $2n$  e dunque  $f^{(2n+2)}(x) = 0$  per ogni  $x$ ); la validità della relazione seguente è poi immediata:

$$F''(x) + F(x) = f(x). \quad (9)$$

5. Consideriamo la funzione reale  $G$  definita da

$$G(x) := F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x. \quad (10)$$

Deriviamo la funzione  $G$ , tenendo conto della (9):

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left( F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x \right)' \\ &= F''(x) \cdot \sin x + F'(x) \cdot \cos x - F'(x) \cdot \cos x + F(x) \cdot \sin x \\ &= [F''(x) + F(x)] \cdot \sin x = f(x) \cdot \sin x. \end{aligned}$$

La funzione  $G$  è dunque una primitiva della funzione  $f \cdot \sin$ . Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, dx &= [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] \Big|_0^\pi \\ &= [F'(\pi) \cdot \sin \pi - F(\pi) \cdot \cos \pi] - [F'(0) \cdot \sin 0 - F(0) \cdot \cos 0] \\ &= F(\pi) + F(0), \end{aligned}$$

ossia

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = F(\pi) + F(0), \quad (11)$$

e notare che, come visto in 4.,  $F(\pi) + F(0)$  è un numero intero.

6. Siccome per ogni numero reale  $x \in ]0, \pi[$  valgono

- $0 < \sin x \leq 1$ ;
- $f(x) > 0$ ;
- $x^n < \pi^n = (a/b)^n$ ;
- $(a - bx)^n < a^n$ ;

possiamo scrivere

$$0 < f(x) \cdot \sin x \leq f(x) \cdot 1 = f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!},$$

ossia

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}. \quad (12)$$

Le funzioni che intervengono nella (12) sono tutte continue e quindi, dalla proprietà di monotonia dell'integrale e dalla (11), segue

$$\int_0^\pi 0 \, dx < \int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \, dx,$$

ossia

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \cdot x \Big|_0^\pi,$$

da cui

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \pi. \quad (13)$$

7. Se poniamo  $x = a \cdot \pi$  nella (3) possiamo rendere la quantità  $\frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \cdot \pi$  piccola a piacimento, in particolare esisterà un numero intero positivo  $n$  per il quale

$$\frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \cdot \pi < 1.$$

Per questo valore di  $n$  la (13) diventa

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \pi < 1,$$

ma ciò è assurdo poiché non esistono numeri interi positivi minori di 1. L'assunzione iniziale che  $\pi$  è razionale è falsa e dunque  $\pi$  è un numero irrazionale.

## Riferimenti bibliografici

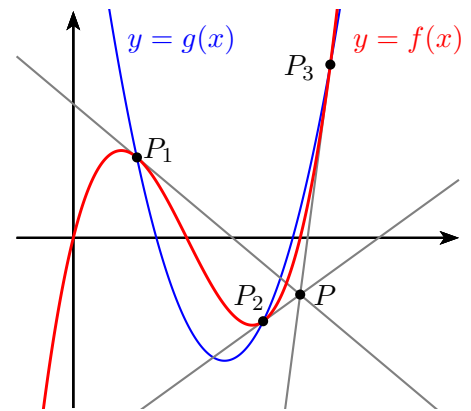
- [1] DAVID BLATNER. *Le gioie del  $\pi$* . Garzanti, Milano, 1999.
- [2] RUDOLF FRITSCH. *Transzendenz von e im Leistungskurs? Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **42**, pp. 75–80, 1989.
- [3] JOHANN HEINRICH LAMBERT. *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), XVII, pp. 265–322, 1768.
- [4] IVAN NIVEN. *A simple proof that  $\pi$  is irrational*. Bulletin of The American Mathematical Society **53**, p. 509, 1947.
- [5] DENIS ROEGEL. *Lambert's proof of the irrationality of Pi: Context and translation*. [Research Report] LORIA. 2020. hal-02984214.
- [6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Proof\\_that\\_%CF%80\\_is\\_irrational](https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational) (verificato: 29.03.2024).

# Le polynôme tangio-sécant

Le présent article provient d'un texte soumis à la CRM par le premier auteur, complété avec des cas particuliers donnés par le second.

## 1 Généralité

On considère un point  $P(x_0; y_0)$  dans le plan et une fonction polynomiale  $f$  de degré  $n > 1$ . Les éventuelles tangentes au graphe de  $f$  passant par  $P$  touchent ce graphe en des points  $P_1, P_2, \dots, P_\ell$ . Nous allons fournir un polynôme  $g$  de degré inférieur à  $n$  dont le graphe passe par tous ces points. Nous l'appellerons *polynôme tangio-sécant* de  $f$  par rapport au point  $P$ .



La tangente au graphe de  $f$  en un point  $P_i(x_i; y_i)$  admet l'équation  $y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$ . Si cette tangente doit passer par  $P(x_0; y_0)$ , on a alors  $y_0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_0 - x_i)$ .

Les abscisses  $x = x_i$  des points de contact  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \ell$ ) vérifient donc l'équation

$$-f(x) = (x_0 - x)f'(x) - y_0.$$

En ajoutant  $k \cdot f(x)$  avec un nombre  $k \neq 1$ , on obtient l'équation équivalente

$$(k - 1)f(x) = k \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0,$$

c'est-à-dire  $f(x) = g_k(x)$  avec  $g_k(x) = \frac{1}{k-1}(k \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0)$ .

Si le polynôme  $f$  est de degré  $n > 1$ , avec un monôme dominant  $a_n x^n$ , alors le monôme potentiellement dominant de  $g_k$  est  $\frac{(k-n)a_n}{k-1} x^n$ . Si on veut minimiser le degré de  $g_k$ , on doit considérer  $k = n$ .

Ainsi, le polynôme  $g(x) = g_n(x) = \frac{1}{n-1}(n \cdot f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0)$  est de degré strictement inférieur à celui de  $f(x)$ . Son graphe passe par tous les points  $P_1, P_2, \dots, P_\ell$ , obtenus par intersection avec le graphe de  $f$ . Pour un polynôme  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  avec  $a_n \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{n-1} \left( (n \cdot f(x) - x \cdot f'(x)) + x_0 f'(x) - y_0 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( a_{n-1} x^{n-1} + 2a_{n-2} x^{n-2} + \dots + (n-2)a_2 x^2 + (n-1)a_1 x + na_0 \right. \\ &\quad \left. + na_n x_0 x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x_0 x^{n-2} + \dots + 2a_2 x_0 x + a_1 x_0 - y_0 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( (a_{n-1} + na_n x_0) x^{n-1} + (2a_{n-2} + (n-1)a_{n-1} x_0) x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + ((n-1)a_1 + 2a_2 x_0) x + (na_0 + a_1 x_0 - y_0) \right). \end{aligned}$$

## 2 Le cas $n = 2$

Si  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , alors le polynôme tangio-sécant par rapport à  $P(x_0; y_0)$  est  $g(x) = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0)$ . Pour trouver l'abscisse des points de contact entre la parabole  $y = f(x)$  et ses tangentes passant par  $P(x_0; y_0)$ , on peut résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ , c'est-à-dire

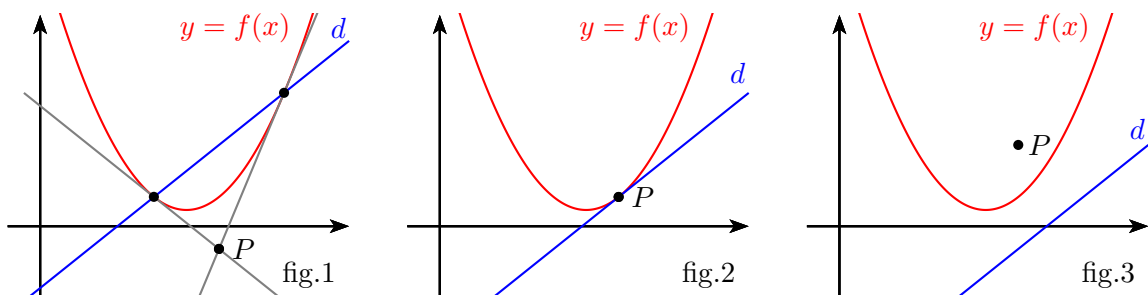
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0), \\ ax^2 - 2ax_0x + (y_0 - c - bx_0) &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation quadratique est

$$\Delta = 4a^2x_0^2 - 4a(y_0 - c - bx_0) = 4a(ax_0^2 + bx_0 + c - y_0) = 4a(f(x_0) - y_0)$$

et les solutions sont  $x = \frac{2ax_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2ax_0 \pm 2\sqrt{a(f(x_0) - y_0)}}{2a} = x_0 \pm \sqrt{\frac{f(x_0) - y_0}{a}}$ .

La parabole d'équation  $y = f(x)$  admet donc deux, une ou aucune tangente passant par  $P$ , selon que le produit  $a(f(x_0) - y_0)$  est positif, nul ou négatif, ce qui signifie respectivement que le point  $P$  se trouve à l'extérieur de la parabole (fig.1), sur la parabole (fig.2), ou à l'intérieur de la parabole (fig.3).



Représenté en bleu dans les illustrations ci-dessus, le graphe du polynôme tangio-sécant est la droite  $d$  passant par les deux points de contact dans le premier cas, ou l'unique tangente dans le deuxième. On peut également donner une interprétation géométrique dans le troisième cas (qui reste valable dans les deux premiers) : la projection verticale de  $P$  sur la parabole est un point  $P^*$  et la droite  $d$  passe par le symétrique de  $P$  par rapport à  $P^*$ , parallèlement à la tangente à la parabole en  $P^*$ .

**Preuve.** Le projeté vertical de  $P(x_0; y_0)$  sur la parabole  $y = ax^2 + bx + c$  est  $P^*(x_0; ax_0^2 + bx_0 + c)$ . Le symétrique de  $P$  par rapport à  $P^*$  est  $S(x_0; 2ax_0^2 + 2bx_0 + 2c - y_0)$  (il suffit de contrôler que le barycentre de  $P$  et  $S$  est bien  $P^*$ ). On vérifie facilement que ce point se trouve sur la droite  $d$  d'équation  $y = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c - y_0)$ . De plus, la tangente à la parabole en  $P^*$  admet la pente  $f'(x_0) = 2ax_0 + b$ , ce qui correspond bien à la pente de la droite  $d$ .  $\square$

## 3 Le cas $n = 3$

Si  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  avec  $a \neq 0$ , alors le polynôme tangio-sécant par rapport à  $P(x_0; y_0)$  est  $g(x) = \left(\frac{3ax_0 + b}{2}\right)x^2 + (bx_0 + c)x + \left(\frac{cx_0 + 3d - y_0}{2}\right)$ . Le nombre de tangentes au graphe de  $f$  passant par  $P$  correspond au nombre de solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ , c'est-à-dire au nombre de zéros de  $h(x) = f(x) - g(x)$ . On a

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 3ax^2 + (b - 3ax_0)x - bx_0.$$

Le discriminant associé à cette fonction quadratique est

$$\Delta = (b - 3ax_0)^2 + 12abx_0 = b^2 - 6abx_0 + (3ax_0)^2 + 12abx_0 = b^2 + 6abx_0 + (3ax_0)^2 = (b + 3ax_0)^2$$

et si  $b + 3ax_0 \neq 0$ , le graphe de  $h$  admet deux points à tangente horizontale distincts d'abscisses

$$x = \frac{-b + 3ax_0 \pm (b + 3ax_0)}{6a} \in \left\{ x_0; \frac{-b}{3a} \right\}.$$

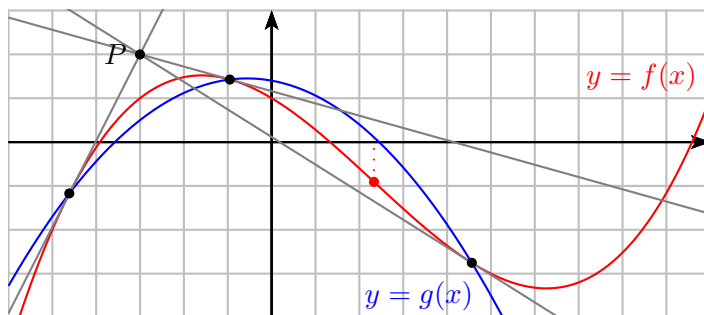
Remarquons au passage que  $x = \frac{-b}{3a}$  est l'abscisse du point d'inflexion de la cubique  $y = f(x)$ .

On a  $h''(x) = 6ax + (b - 3ax_0)$  et on peut vérifier que  $h''\left(\frac{-b}{3a}\right) = -(b + 3ax_0) = -h''(x_0) \neq 0$ . On en déduit qu'un des points à tangente horizontale est un minimum alors que l'autre est un maximum (on peut également raisonner avec le tableau de variation de  $h$ ). Si  $h(x_0) \cdot h\left(\frac{-b}{3a}\right) < 0$ , alors  $h(x)$  s'annule trois fois (dont une fois exactement entre  $x_0$  et  $\frac{-b}{3a}$ ), donc l'équation  $f(x) = g(x)$  a trois solutions. D'un point de vue géométrique, la cubique d'équation  $y = f(x)$  possède trois tangentes qui passent par  $P$  et la parabole d'équation  $y = g(x)$  passe par les trois points de tangence.

**Application.** Pour  $f(x) = \frac{1}{50}(x^3 - 7x^2 - 30x + 50)$  et  $P(-3; 2)$ , on a  $g(x) = -\frac{1}{50}(8x^2 + 9x - 70)$ .

Les nombres  $x_0 = -3$  et  $\frac{-b}{3a} = \frac{7}{3}$  sont différents et on a  $f(-3) > g(-3)$  alors que  $f\left(\frac{7}{3}\right) < g\left(\frac{7}{3}\right)$  (on peut le constater dans l'illustration ci-dessous). La cubique d'équation  $y = f(x)$  admet donc trois tangentes passant par  $P$ . Les abscisses des points de contact sont les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ , que l'on peut estimer par une méthode numérique :

- $x_1 \cong -4.61$ , donc  $P_1(-4.61; -1.17)$
- $x_2 \cong -0.95$ , donc  $P_2(-0.95; 1.43)$
- $x_3 \cong 4.56$ , donc  $P_3(4.56; -2.75)$



#### 4 Exemple (bien choisi) dans le cas n = 4

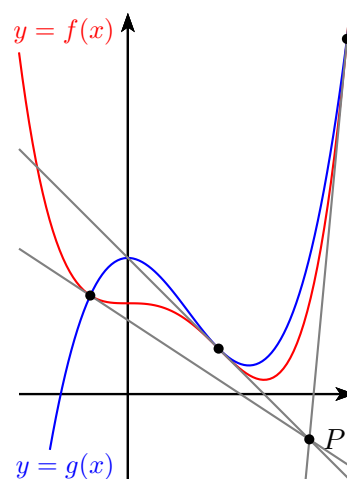
On considère le point  $P\left(2; -\frac{1}{2}\right)$  et le polynôme

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 1.$$

Le polynôme tangio-sécant associé est alors  $g(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}$ . Résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  revient à trouver les zéros de  $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1)$ . On devine la solution  $x = 1$  et donc la factorisation  $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x^3 - 3x^2 + x + 1)$ . Comme le facteur cubique s'annule en  $x = 1$ , on peut le factoriser par  $(x - 1)$  et on trouve  $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1) \cdot (x - 1)(x^2 - 2x - 1) = \frac{1}{2}(x - 1)^2(x^2 - 2x - 1)$ . Le facteur quadratique admet le discriminant  $\Delta = 4 - (-4) = 8$  et les zéros

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Il y a donc trois tangentes au graphe de  $f$  passant par  $P$  et les abscisses des points de tangence sont  $x = 1$ ,  $x = 1 - \sqrt{2}$  et  $x = 1 + \sqrt{2}$ . Le fait que  $x = 1$  soit une racine double de  $h$  implique que les graphes de  $f$  et de  $g$  sont tangents au point d'abscisse  $x = 1$  : si  $f(x) - g(x) = (x - 1)^2Q(x)$ , alors  $\frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = (x - 1)Q(x)$  et, en prenant la limite lorsque  $x$  tend vers 1,  $f'(1) - g'(1) = 0$ .



## CRYPTOLOGIE

<b>Dates</b>	du 10 au 13 septembre 2024
<b>Lieu</b>	Hôtel Suisse, Champéry
<b>Renseignements</b>	<a href="http://www.vsmf.ch/crm/cours/">http://www.vsmf.ch/crm/cours/</a>
<b>Inscription</b>	Cours publié par la SSPES sur <a href="http://www.webpalette.ch">www.webpalette.ch</a>



Le colloque annuel de la CRM sera consacré cette année à la cryptologie.

Le programme détaillé sera publié prochainement sur le site de la CRM ainsi que quelques informations supplémentaires sur les conférences. Voici un premier descriptif très résumé des sujets abordés.

**Didier Müller : *La cryptologie en littérature.*** Présentation de quelques livres où le décryptement d'un message secret joue un rôle important. Suivra une présentation du livre *Les 9 couronnes* (D. Müller, Ed. Société jurassienne d'Emulation ) accompagnée de quelques pistes pour l'utiliser en classe.

***Métaheuristiques en cryptanalyse.*** La conférence présentera une adaptation des métaheuristiques dans le domaine de la cryptanalyse, en particulier le recuit simulé et la recherche avec tabous.

**Cristina Landolina : *Théorie du codage.*** La théorie du codage est la théorie des codes correcteurs d'erreurs. Dans ce module, nous donnerons une brève introduction au monde de la théorie du codage classique, à savoir les codes dotés de la métrique de Hamming.

***Codes métriques de rang.*** L'introduction des codes métriques de rang constitue une suite naturelle et une généralisation de la théorie classique du codage.

**Romain Roubaty : *Stéganographie.*** Nous présenterons l'évolution de cette discipline dans le temps et nous découvrirons comment chacun peut réaliser du contenu stéganographique avec des logiciels grand public.

***Clés publiques et RSA :*** Nous rappellerons le concept de clé publique, la notion de one-way function, et les problèmes qui permettent la création d'un système à clés publiques.

**François Weissbaum : *Algorithme ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm).*** Après une présentation des courbes elliptiques et de leur utilisation dans cet algorithme, nous mettrons en lumière les faiblesses potentielles du ECDSA.

**Alessio Caminata : *Introduction à la cryptographie post-quantum.*** La majorité des protocoles de cryptographie à clé publique est basée sur la difficulté de deux problèmes mathématiques. Or, ces problèmes peuvent être résolus très rapidement avec un ordinateur quantique. Nous présenterons des approches qu'un ordinateur quantique ne peut pas casser.

**Prix du cours** CHF 350.- (y compris une année d'inscription à la SSPMP pour les participant·e·s qui ne sont pas encore membres de l'association)

**Délai d'inscription** 15 juillet 2024

Chaque participant·e est responsable de sa réservation à l'hôtel.

**Prix du logement (avec petit-déjeuner et taxe de séjour)**

**Hôtel Suisse** de CHF 93.- à 118.- /personne /jour

**Centre Palladium** de CHF 63.- à 93.- /personne /jour

**Repas (facultatif)** CHF 26.- /personne /repas de midi à l'Hôtel Suisse

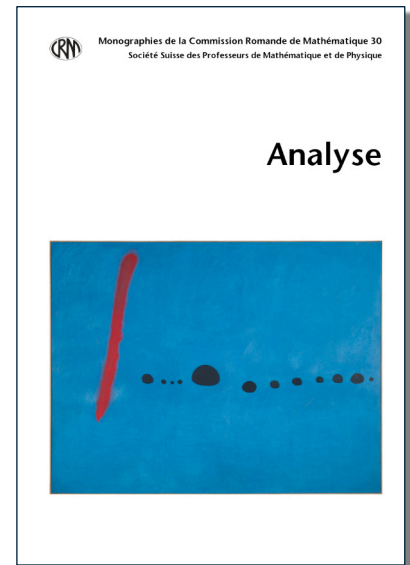
Organisateurs : Damien Dobler et Jean-Marie Urfer

## Monographie de la CRM No 30 « **Analyse** »

C'est avec plaisir que la Commission Romande de Mathématique (CRM) annonce la publication de son nouvel ouvrage intitulé «**Analyse**», disponible dès maintenant sur le site [www.crm-editions.com](http://www.crm-editions.com) et dans la plupart des librairies de Suisse Romande.

### Avant-propos

C'est en 1981 que la Commission Romande de Mathématique (CRM) a publié son premier fundementum, intitulé «Analyse I». Un deuxième tome sur ce vaste sujet a été édité par la suite et les deux volumes ont été réunis en 1997. Vingt ans plus tard, la CRM a décidé d'actualiser cet ouvrage en conservant ses objectifs principaux : offrir un instrument de travail conforme aux contenus du plan d'étude cadre et contribuer à une meilleure coordination entre les gymnases romands.



Ce nouvel ouvrage présente des parties théoriques plus détaillées, accompagnées d'exemples et de quelques démonstrations dont certaines étaient auparavant laissées en exercice. Une notice historique rappelle que les mathématiques ont été construites progressivement au fil de l'histoire et que, pour des raisons didactiques, l'ordre dans lequel les diverses notions sont abordées à l'école diffère de l'ordre chronologique. Quatre chapitres traitent successivement des notions générales sur les fonctions, des notions de limite et de continuité, des dérivées puis des intégrales. Les fonctions logarithmes sont présentées comme réciproques des exponentielles selon l'ordre historique mais il est toujours possible de les aborder avec des intégrales, comme cela était fait dans l'ancien ouvrage.

De nombreux exercices sont proposés et leurs réponses sont données à la fin de chaque chapitre. Il conviendra de faire une sélection judicieuse. Les exercices plus difficiles n'ont pas été explicitement spécifiés car la variété des cheminements théoriques et méthodologiques rend ce choix arbitraire. Plusieurs problèmes de type examen de maturité sont également proposés à la fin du livre. Ils doivent permettre d'effectuer une synthèse des connaissances acquises et de mesurer le niveau atteint.

Quelques documents et animations GeoGebra sont disponibles via un QR-code ou sur le site <https://www.vsmf.ch/crm/telechargements/>. Certaines notions présentées dans le premier chapitre sont également abordées dans la monographie «Notions élémentaires» (de la CRM), laquelle peut constituer une bonne introduction.

La CRM espère que ce nouvel ouvrage répondra aux attentes de chacun et chacune.

Pierik Falco

Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), pierik.falco@rpn.ch

# La Précession des Équinoxes

La précession est le nom donné au changement d'orientation de l'axe de rotation d'un corps sous l'effet d'un moment de force, ou couple, qui lui est appliqué. On peut montrer que la période de précession  $T_p$  s'exprime comme :

$$T_p = \frac{4\pi^2 \cdot I_T}{M_0 \cdot T_T}$$

où  $T_T$  est la période de rotation du corps (ici la Terre donc 24h),  $I_T$  est le moment d'inertie du corps (donc de la Terre) et  $M_0$  est le moment de force que le corps (donc la Terre) subit. Le problème est donc d'évaluer ces trois grandeurs.

## 1. Approche du calcul

La précession des équinoxes est due à l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique et au fait que la Terre n'est pas sphérique (connu sous le terme de « renflement équatorial »). Autrement dit, si l'axe de rotation de la Terre sur elle-même était parallèle à son axe de rotation autour du Soleil, ou si la Terre était parfaitement sphérique, il n'y aurait pas de précession. L'inclinaison de l'axe de rotation sur le plan de l'écliptique vaut  $\theta = 23.4^\circ$ , bien qu'il varie (très) légèrement dans le temps sur une période de 18.6 ans ; c'est la *nutaton* (l'axe de rotation de la Terre décrit une petite ellipse de demi-grand axe  $18.42''$  et de demi-petit axe  $13.72''$ ). Afin de décrire cette précession, on sépare la Terre en deux « hémisphères » qui ne sont pas parfaitement hémisphériques. On s'intéresse alors aux renflements équatoriaux (zones grises dans la figure 1). Le renflement de droite (de centre de masse  $CM_1$ ) est le plus proche du Soleil (ou de la Lune) et est donc plus attiré par le Soleil (ou la Lune) que celui de gauche. Il en résulte un moment de force qui crée la précession. Il est donc nécessaire de caractériser ces renflements : masse et centre de gravité. Ce dernier permettra de connaître le bras de levier  $b$ , lequel permettra de déterminer le moment de force  $M_0$ . On va aussi s'intéresser à la structure de la Terre pour calculer son moment d'inertie.

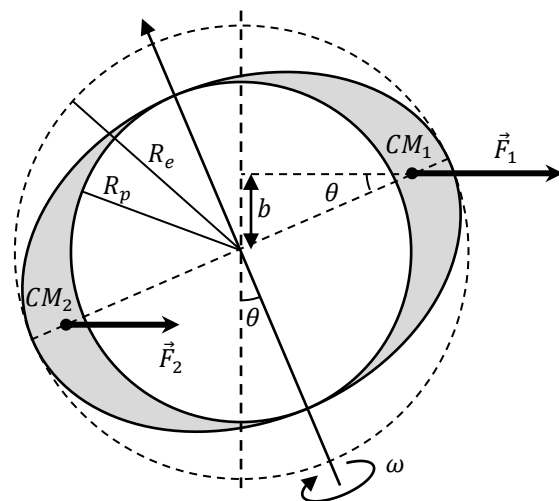


Fig. 1 : Modèle de la Terre en forme d'ellipsoïde.

## 2. Moment d'inertie de la Terre

La Terre n'est pas une sphère parfaite mais un ellipsoïde de rayon équatorial  $R_e = 6378.1\text{km}$  et de rayon polaire  $R_p = 6356.8\text{km}$ . Ces rayons étant proches, une première évaluation de son moment d'inertie est de l'approximer comme une boule de rayon  $R_e$  :

$$I_T = \frac{2}{5} \cdot M_T \cdot R_e^2 = 9.71 \cdot 10^{37} \text{N} \cdot \text{m}$$

Mais la Terre n'est pas homogène dans sa structure : elle est formée de strates. On considère donc une Terre stratifiée où chaque couche a sa masse volumique propre, comme illustré sur la figure 2. On trouve donc le noyau interne (ou « graine »), le noyau externe (liquide), le manteau inférieur (solide), le manteau supérieur (solide mais déformable) et la croûte (solide). En raison de sa très faible épaisseur, quelques kilomètres, cette dernière est représentée sur la figure 2 par un simple trait plus épais. On calcule alors les masses de chacune de ces strates. Pour la masse d'une strate *externe* (ext), on retranche la sphère *interne* (int) :

$$m_{\text{ext}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3) \cdot \rho_{\text{ext}}$$

En sommant chacune de ces valeurs, on retrouve bien la masse de la Terre :  $5.974 \cdot 10^{24} \text{kg}$ .

On calcule ensuite le moment d'inertie de chaque strate pour déterminer le moment d'inertie total de la Terre. Pour une strate externe donnée, on a :

$$I_{\text{ext}} = \frac{2}{5} \cdot m_{\text{ext}} \cdot (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) = \frac{8\pi}{15} \cdot (R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3) \cdot (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) \cdot \rho_{\text{ext}}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des rayons des différentes zones, les masses volumiques (ces deux valeurs sont tirées de la page Wikipedia « *Structure interne de la Terre* » ; les masses volumiques ont été estimées de manière à obtenir une masse de la Terre des plus proches de la réalité.), les masses et les moments d'inertie :

Enveloppe	Rayon (km)	Masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	Masse ( $\cdot 10^{24} \text{kg}$ )	Moment d'inertie ( $\cdot 10^{34} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ )
Noyau interne	1216	12'900	0.097	5.7
Noyau externe	3486	10'600	1.801	769.0
Manteau inférieur	5701	4'800	2.874	2339.1
Manteau supérieur	6361	3'900	1.178	375.0
Croûte	6378	3'000	0.026	0.23
Terre (total)			5.976	3498.6

On obtient alors comme moment d'inertie de la Terre :

$$I_T = 3.5 \cdot 10^{37} \text{N} \cdot \text{m}$$

et on remarque que cette valeur est environ 3 fois plus petite que pour une Terre homogène.

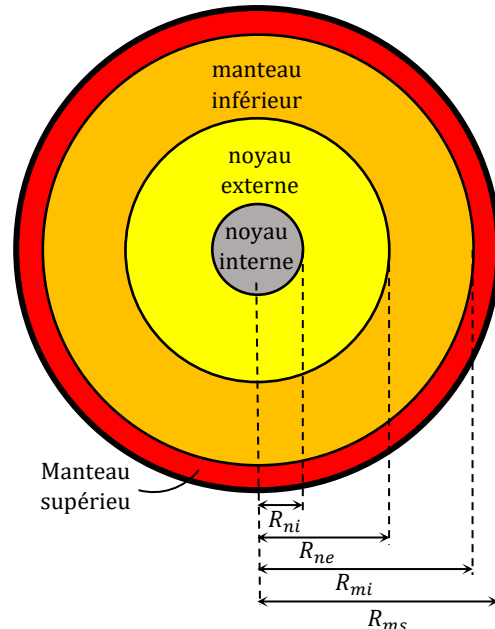


Fig. 2 : Structure stratifiée de la Terre.

### 3. Moment de force subi par la Terre

Afin de calculer le moment de force subi par la Terre, il faut dans un premier temps déterminer la masse des renflements, puis ensuite trouver le centre de masse de ces renflements, pour pouvoir connaître le moment de force appliqué sur la Terre. On corrigera encore cette valeur pour tenir compte de la rotation des astres, entre la situation où le moment est nul et celle où il est maximum.

#### 3.1. Masse des renflements

La question est donc de déterminer la masse des renflements. On estime alors avoir à faire à un ellipsoïde de demi-axes  $R_e$ ,  $R_e$  et  $R_p$ . Pour simplifier l'écriture dans ce calcul, on renomme  $R_e = R$  et  $R_p = r$ . Le volume de l'ellipsoïde se calcule comme  $V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 \cdot r$  et celui de la sphère inscrite comme  $V_s = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ . On écrit le volume d'un des renflements (en gris sur la figure 3) :

$$V_r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot r - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2)$$

On peut alors déterminer la masse d'un renflement, en prenant la masse volumique du manteau supérieur (que l'on suppose être la zone principale déformée). On trouve une masse du renflement de  $m_r = 1.41 \cdot 10^{22}$ kg. On ne tient pas compte de la masse d'eau sur Terre (environ  $1.4 \cdot 10^{21}$ kg), soit un dixième de la masse des renflements. Mais cette eau se répartit partout sur le globe, y compris aux pôles. Ainsi, sa contribution massique est probablement très faible.

#### 3.2. Centre de masse des renflements

En deux dimensions, on s'intéresse dans un premier temps au centre de gravité du croissant délimité par la demi-ellipse et le demi-cercle (Fig. 3). On connaît les équations de ces courbes :

Ellipse :  $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

Cercle :  $x^2 + y^2 = r^2$

On exprime ensuite la largeur du croissant  $\delta$  :

$$\delta = x_e - x_c = R \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} - r \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} = (R - r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$$

et on détermine le centre de gravité  $x_G$  :

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot x_G = \int_{-r}^r \bar{x} \cdot \delta \cdot dy$$

où  $\bar{x}$  est la position moyenne des deux courbes. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot x_G &= \int_{-r}^r \left[ \frac{1}{2} \cdot (R + r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} \right] \cdot \left[ (R - r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} \right] \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2) \cdot \int_{-r}^r \left( 1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2) \cdot \left( y - \frac{y^3}{3r^2} \right) \Big|_{-r}^r \end{aligned}$$

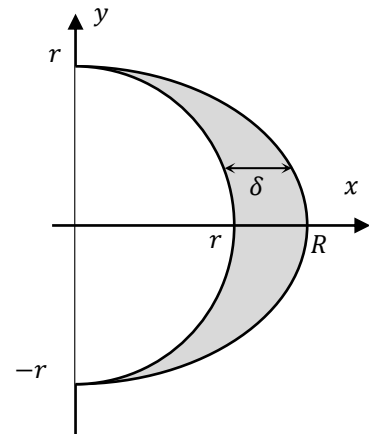


Fig. 3 : Tranche d'un renflement.

On trouve donc que :

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot x_G = \frac{2}{3} \cdot (R^2 - r^2) \cdot r$$

et finalement :

$$x_G = \frac{4}{3\pi} \cdot (R + r) \cong 5404.9\text{km}$$

Ce résultat se retrouve très facilement en appliquant le *théorème de Guldin* :

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot 2\pi \cdot x_G, \text{ donc : } x_G = \frac{4}{3\pi} \cdot (R + r).$$

En trois dimensions, il faut faire tourner cette surface autour de l'axe polaire. Ceci aura pour effet de rapprocher le centre de gravité  $x_G$  du centre de la Terre. On détermine alors le vrai centre de masse  $CM$  qui découle de la rotation de ce croissant. Sur un demi-tour, le trajet parcouru par  $x_G$  est  $\pi \cdot x_G$ . Lorsque que  $x_G$  se trouve à la position  $x = \cos\varphi \cdot x_G$ ,  $x_G$  parcourt un élément de chemin  $dL = x_G \cdot d\varphi$  (comme illustré sur la figure 4). Donc :

$$CM \cdot \pi \cdot x_G = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot x_G \cdot x_G \cdot d\varphi = \sin\varphi \cdot x_G^2 \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \cdot x_G^2$$

On trouve finalement le centre de masse d'un renflement :

$$CM = \frac{2}{\pi} \cdot x_G = \frac{8}{3\pi^2} \cdot (R + r) \cong 3440.9\text{km}$$

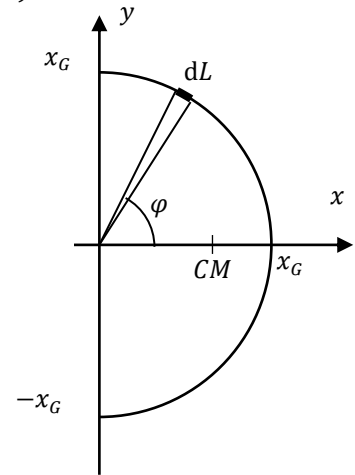


Fig. 4 : Centre de masse d'un renflement (vue depuis l'axe de rotation de la Terre).

### 3.3. Moment de force appliqué à la Terre par le Soleil

On dispose maintenant de toutes les données pour déterminer le moment de force appliqué à la Terre. On s'intéresse ici à celui appliqué par le Soleil. Les distances qui séparent les renflements du Soleil sont de  $d_{TS} \pm \cos\theta \cdot CM$  où  $d_{TS} = 1.496 \cdot 10^{11}\text{m}$  est la distance Terre-Soleil. Comme on le voit sur la figure 1, on suppose les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  parallèles à l'axe Terre-Soleil. Ainsi, le moment de force total dû au Soleil est :

$$\begin{aligned} M_{0,S} &= G \cdot M_S \cdot m_r \cdot \left( \frac{1}{(d_{TS} - \cos\theta \cdot CM)^2} - \frac{1}{(d_{TS} + \cos\theta \cdot CM)^2} \right) \cdot \sin\theta \cdot CM \\ &= G \cdot M_S \cdot m_r \cdot \frac{2 \cdot d_{TS} \cdot \cos\theta \cdot CM^2}{(d_{TS}^2 - \cos^2\theta \cdot d_{CM}^2)^2} \cdot \sin\theta \cdot CM \end{aligned}$$

où  $\sin\theta \cdot CM = b$  est le bras de levier. Avec la masse du Soleil  $M_S = 1.989 \cdot 10^{30}\text{kg}$ , on trouve :

$$M_{0,S} = 0.996 \cdot 10^{22}\text{N} \cdot \text{m}$$

Comme pour les marées, la Lune joue aussi un rôle. Tous les calculs précédents restent identiques, il suffit de remplacer la masse du Soleil par celle de la Lune,  $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\text{kg}$  et la distance Terre-Soleil par la distance Terre-Lune,  $d_{TL} = 3.844 \cdot 10^8\text{m}$ .

On trouve alors :

$$M_{0,L} = 2.105 \cdot 10^{22}\text{N} \cdot \text{m}$$

Sans grande surprise, on remarque que la Lune joue en fait un rôle dominant dans ce phénomène, comme pour les marées. Le moment total qui s'applique à la Terre vaut finalement :

$$M_0 = 3.071 \cdot 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}$$

### 3.4. Et la rotation des astres ?

Dans le mouvement des astres, tantôt les moments de force calculés ci-dessus ont ces valeurs, qui sont des maxima (aux solstices pour le couple Terre-Soleil), tantôt ils sont nuls (aux équinoxes). Ces variations sont en fait la projection d'un mouvement (quasiment) circulaire ; elles suivent donc des lois trigonométriques. On peut ainsi estimer la valeur moyenne  $\mu$  de ce moment sur un demi-tour pour déterminer un moment moyen  $\bar{M}_0$  que la Terre subit. Sur un demi-tour, la valeur moyenne de la fonction *cosinus* (par exemple) vaut :

$$\mu = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

On corrige alors le moment  $M_0$  pour obtenir une valeur moyenne  $\bar{M}_0$  :

$$\bar{M}_0 = \frac{2}{\pi} \cdot M_0 = 1.955 \cdot 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}$$

## 4. Période de précession des équinoxes

On peut enfin calculer la période de précession de la Terre en utilisant la formule présentée au début de cette discussion. On trouve :

$$T_p = \frac{4\pi^2 \cdot I_T}{\bar{M}_0 \cdot T_T} \cong 25'800 \text{ ans}$$

On voit que ce calcul, peut-être un peu long et fastidieux, est parfaitement à la portée d'élèves d'option « *Physique et Application des Mathématiques* ». La valeur connue pour la précession est d'environ 25'700ans ; soit à moins d'un demi-pourcent du résultat obtenu. Il est important de relever que cette précision est probablement le fruit de la chance et du hasard, au vu des nombreuses approximations effectuées. Notamment, les rôles du Soleil et de la Lune dans le calcul du moment de force devraient se faire de manière plus précise en prenant en compte la composante vectorielle de cette grandeur. Malgré tout, la moyenne trigonométrique appliquée explique probablement la proximité du résultat.

Didier Roulet  
CRP, rouletd@infomaniak.ch

## Congrès UdPPC à Lille

1 au 5 novembre 2022

Toujours aussi généreuse, L'Union (française) des Professeurs de Physique & Chimie\* a invité ses sociétés sœurs (Belge, Allemande, Italienne et Suisse) à participer à son congrès annuel, lequel se déroulait cette année à Lille, et j'ai eu le plaisir d'être une fois encore le représentant de la CRP à cette manifestation.

\* Site du congrès : <https://udppc-lille2022.sciencesconf.org/program>

Corollaire traditionnel, des visites touristiques à choix étaient proposées durant l'après-midi qui précède et le jour qui suit le congrès. C'est ainsi que j'ai appris qu'en 1940, de très durs affrontements ont eu lieu en périphérie, mais pas dans le centre-ville, qui n'a pas non plus subi de bombardements ; on peut donc encore y admirer de nombreux et splendides bâtiments anciens.

Le réchauffement climatique n'étant pas encore favorable à la culture de la vigne dans ces régions, on n'y produit pas de vin mais de nombreuses bières, et j'ai eu l'occasion d'en goûter d'excellentes au terme de la visite d'une brasserie artisanale, toute récente (2 ans) mais installée dans les murs d'une très ancienne abbaye (de Clairmarais, fondée en 1140).

Une autre visite m'a permis de découvrir la coupole d'Helfaut (près de Saint-Omer), aujourd'hui centre d'histoire et planétarium mais ancienne base souterraine très impressionnante coiffée d'un dôme (d'où son nom) en béton armé de 5,5 m d'épaisseur (!) situé 45 mètres au-dessus du sol. Construite de 1943 à 1944, elle aurait dû servir de base de lancement pour des fusées V2 destinées à frapper Londres et le sud de l'Angleterre.

Pour en savoir plus : <https://lacoupole-france.com/centre-dhistoire-et-planetarium-3d/>

Enfin, j'ai pu participer à la visite de la cristallerie d'Arques, usine qui fonctionne en permanence (oui, 24 heures sur 24, toute l'année) et qui produit des millions d'articles par jour. La fabrication automatisée à grande échelle de verres ou d'assiettes qui prennent forme à la flamme est spectaculaire et vaut la peine d'être observée.

Pour en savoir plus : <https://www.arc-intl.com/fr/>



*La grand'place*

*La vieille bourse*



Quant au congrès proprement dit, il était comme d'habitude constitué de conférences plénières (cette année au nombre de cinq) en alternance avec des visites de labos, des ateliers, des visites d'usines et des conférences particulières, possibilités parmi lesquelles les congressistes étaient prié.e.s de choisir lors de l'inscription.

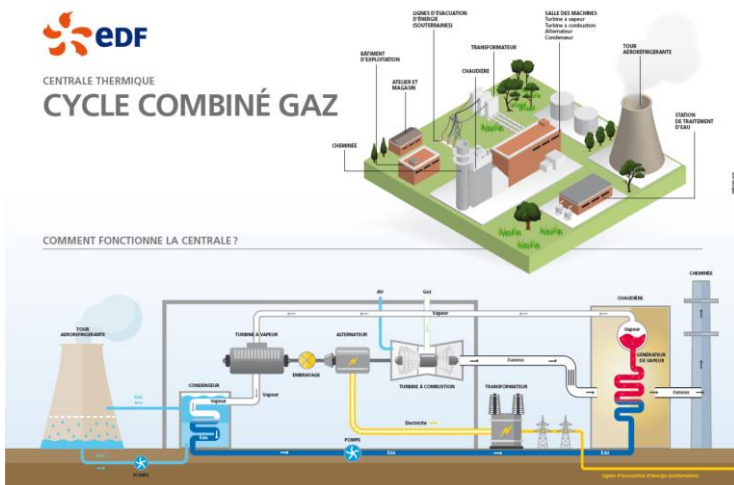


*Le bâtiment d'accueil à l'université*

J'ai ainsi assisté à la présentation d'un pendule qui bat précisément la seconde... à Lille. En effet, comme la période dépend de la valeur de l'accélération de la pesanteur "g", la mesure précise de la période du pendule permet de déterminer la valeur de "g" à l'endroit où l'on fait la mesure. L'installation est suffisamment précise pour détecter des variations de la valeur de "g" de  $\pm 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ . On s'aperçoit alors que le pendule dit "simple" ne l'est plus tellement, car tout influence sa période : l'amplitude, la suspension (les frottements réduisent l'amplitude), les courants d'air, donc la forme de la masse suspendue, ...

J'ai également pu visiter la centrale électrique de Bouchain, qui est une centrale dite d'ajustement : elle peut passer en quelques minutes de zéro à 605 MW pour adapter l'offre à la demande. Son rendement est particulièrement bon (> 62%) grâce au fait que c'est un Cycle Combiné Gaz : la combustion du gaz naturel (fourni par le gazoduc qui passe là, il n'y a aucun stock sur place) et de l'air entraîne une turbine (comme dans un réacteur d'avion), et les gaz chauds d'échappement sont récupérés. Ils servent alors à produire de la vapeur (on prélève pour cela de l'eau dans un canal voisin), laquelle alimente une deuxième turbine, montée sur le même axe que la première. Ces deux turbines font tourner un alternateur, lui aussi sur le même axe que les turbines. La vapeur issue des turbines est ensuite conduite dans une tour de refroidissement, sorte d'immense diabolo dans lequel la vapeur se condense ; il sort de cette tour des panaches à la blancheur caractéristique.

Pour en savoir plus : <https://www.edf.fr/centrale-thermique-bouchain>



## Une belle histoire du temps

La Commission Romande de Physique vous propose cette année une série de dix conférences sur cette notion fascinante qu'est le temps, soulevant des questions profondes sur la nature de l'existence et sur notre perception du monde.

En physique, le temps est souvent considéré comme une dimension fondamentale de l'univers, régie par des lois mathématiques bien définies. En revanche, en philosophie, le temps est considéré comme une notion plus subjective, influencée par notre propre expérience du monde et notre perception de la réalité.

Cette dualité entre la conception scientifique et philosophique du temps nous invitera, lors de la formation, à réfléchir et à esquisser quelques tentatives de clarification sur la nature de l'univers et sur notre place en tant qu'êtres humains dans ce vaste continuum temporel.

La seule lecture des titres desdites conférences devrait vous donner envie de les suivre ; à titre d'exemples, en voici quelques-uns :

- |  |                  |
|--|------------------|
| ▶ L'univers a-t-il vraiment eu un commencement ?                 | J-M Lévy-Leblond |
| ▶ Du gnomon à l'horloge atomique                                 | D. Savoie        |
| ▶ Le (pseudo-) paradoxe des jumeaux                              | J-M Lévy-Leblond |
| ▶ La flèche du temps et le second principe de la thermodynamique | L. Coquille      |
| ▶ La non-localité quantique et le temps                          | M. Esfeld        |
| ▶ Gravitation  | M. Lachièze-Rey  |

Une soirée d'observation astronomique à l'observatoire de Vérossaz est prévue le mercredi soir, nous mangerons une raclette sur place.

Un repas de conférence aura lieu le jeudi soir, il sera offert aux membres de la SSPES.

### Informations pratiques

Le cours aura lieu du mardi 24 septembre 2024 à 14h00 au vendredi 27 septembre 2024 à 16h00, à l'Hôtel Suisse à Champéry.

Les conférences débuteront le mardi à 15h00. L'accueil aura lieu de 14h00 à 14h45.

Le prix du cours (550 CHF) comprend la participation aux conférences, la soirée du jeudi (observation & raclette), ainsi que les repas de midi, qui seront pris à l'Hôtel Suisse. L'hébergement est à la charge des participants, il est à réserver directement à l'Hôtel Suisse (ou ailleurs).

Le prix du cours est identique pour les membres de la SSPES et les non-membres, mais une priorité sera donnée aux membres (jusqu'à fin juillet).

Les inscriptions se font via le site Webpalette : <https://www.webpalette.ch/fr/cours/>

La confirmation définitive aura lieu début août, en fonction du nombre de places. L'inscription est définitive ; passé le 31 juillet, une participation de 50 CHF aux frais administratifs sera facturée en cas de désistement.

Direction du cours : Raoul Oppliger, Mirko Naguel, Patrick Gay, Didier Roulet

Renseignements : [raoul.oppliger@eduvaud.ch](mailto:raoul.oppliger@eduvaud.ch), [mirko@naguel.ch](mailto:mirko@naguel.ch)

## Neugründung: EducaTec – Systems GmbH

### Mehr Support, Training & Services für Messtechniksysteme in Schullaboren

Die EducaTec – Systems GmbH wurde von Vance Carter, Oliver Gallus und Patrick Koch als Schwesterfirma der EducaTec AG gegründet, um Schullaboren in der Schweiz und Liechtenstein noch gezieltere Dienstleistungen wie Support, Training und andere Services für Vernier Science Education sowie andere Messtechniksysteme anzubieten.

Seit Februar 2024 hat EducaTec – Systems GmbH die Produktlinien Vernier und Ohaus von der EducaTec AG übernommen und führt sie weiter. Sarah Carter hat die EducaTec AG übernommen und wird die übrigen Produkte weiterentwickeln. Beide Unternehmen werden weiterhin zusammenarbeiten.

Oliver Gallus und Vance Carter sind erfahrene Elektroingenieure, wobei Herr Gallus zusätzlich einen PhD in Physik hat. Patrick Koch übernimmt die Geschäftsleitung.

Unsere langjährige Erfahrung in diesem Bereich ermöglicht es uns, Sie kompetent zu beraten. Unsere Mission ist es, Ihnen die notwendigen Werkzeuge an die Hand zu geben, um die wissenschaftliche Neugier bei den Studierenden zu wecken.

Wir bieten Service und Training vor Ort nach Bedarf. Reparaturen, Garantiarbeiten und Support versuchen wir, so weit wie möglich alles in der Schweiz vorzunehmen.



Von links:  
Oliver Gallus  
Patrick Koch  
Vance Carter

## Vernier Graphical Analysis® Pro

### In Echtzeit wissenschaftliche Daten sammeln, graphisch aufbereiten und analysieren

Vernier Graphical Analysis® Pro unterstützt Schüler:innen, die Zusammenhänge zwischen abstrakten wissenschaftlichen Konzepten und der physischen Welt zu verstehen.

Die Software ist mit praktisch allen Vernier-Sensoren kompatibel, inklusive der kabellosen Bluetooth-Sensoren. Die Pro-Version ist als 1- oder 3-Jahres-Standortlizenz erhältlich. Vernier bietet auch eine kostenlose Version an.



**Oliver Gallus**  
Physiklehrer und Vernier-Spezialist  
oliver.gallus@educatec-systems.ch

#### Der Vergleich mit Logger Pro 3

Logger Pro 3 ist punkto Datenanalyse eine bewährte All-in-one-Lösung. Sie beinhaltet bspw. Spektrometrie-Funktionen, die in Graphical Analysis nur separat verfügbar sind. Im Gegensatz zu Graphical Analysis ist Logger Pro jedoch nicht mit den kabellosen Go-Direct-Sensoren kompatibel.

#### Übersicht der neusten Analyse-Tools von Vernier

- Vernier Graphical Analysis® Pro oder Basic
- Vernier Video Analysis
- Vernier Spectral Analysis® (kostenlos)
- Vernier Instrumental Analysis® (kostenlos)

Da Logger Pro 3 künftig noch gepflegt, aber nicht weiterentwickelt wird, empfehlen wir mittelfristig den Umstieg auf Vernier Graphical Analysis®:

«Vernier Graphical Analysis ist einfacher in der Handhabung und intuitiver. Zudem unterstützt die App alle wichtigen Betriebssysteme und ist gut ausgerüstet fürs BYOD. Die Templates zu den Experiment-Büchern sind teilweise schon vorhanden und werden laufend hinzugefügt.»

### EducaTec – Systems GmbH

Telefon +41 31 511 87 40  
info@educatec-systems.ch  
www.educatec-systems.ch

#### Business Office

Grossächerstrasse 2  
8966 Oberwil-Lieli

#### Service Center

Bahnhof 1  
3313 Büren zum Hof

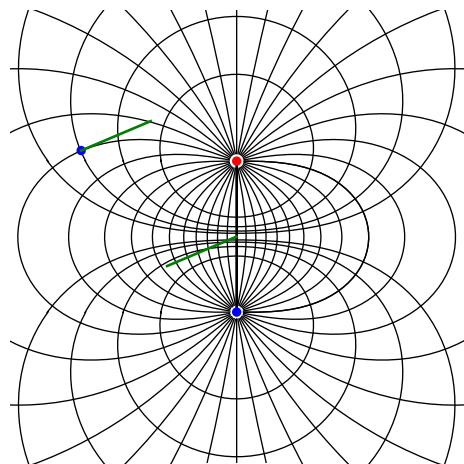
Martin Lieberherr  
 MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## Dipolkraft

Im letzten Artikel über das schwache Reaktionsprinzip<sup>1</sup> hatte ich leider geschlampt, wie ich feststellen musste, nachdem mich ein aufmerksamer Leser darauf aufmerksam gemacht hat. Die Kraft auf den magnetischen Dipol ist natürlich nicht tangential zu den Feldlinien. Die Aussage, dass Aktions- und Reaktionskraft verschiedene Wirkungslinien haben können, ist aber nicht gefährdet.

Hätte ich Kräfte ausgerechnet und nicht nur skizziert, wäre das nicht passiert. Für die Abbildungen 1 und 2 habe ich das nachgeholt. Diesmal sind es elektrische Dipole, aber das Resultat gilt auch für magnetische.

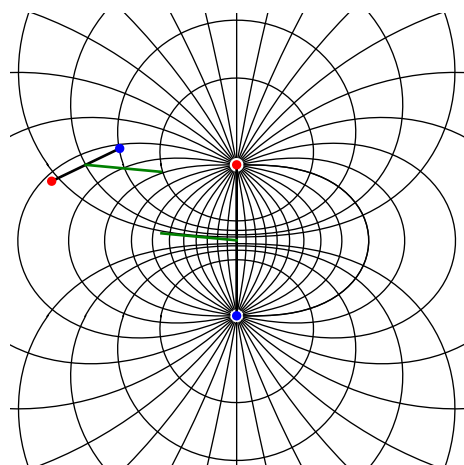
*Abbildung 1: Berechnete elektrostatische Kräfte (grüne Linien) zwischen einem elektrischen Dipol und einem elektrischen Monopol. Der vertikale Dipol besteht aus zwei Monopolen in endlichem Abstand. Die gezeichneten Äquipotential- und Feldlinien sind jene des zentralen Dipols. Die Kraft auf den Monopol ist tangential zu den Feldlinien des Dipols.*



Die Kraft auf den Monopol in Abbildung 1 zeigt am Dipol vorbei, d.h. Aktions- und Reaktionskraft sind parallel gerichtet, liegen aber auf verschiedenen Wirkungslinien.

Ein zweiter Dipol bestehe ebenfalls aus zwei Monopolen in endlichem Abstand. Beide Monopole erfahren je eine Kraft durch den zentralen Dipol. Die resultierende Kraft auf den zweiten Dipol ist einfach die Summe dieser Kräfte, siehe Abbildung 2. Auch hier gilt, dass Aktions- und Reaktionskraft zwischen den Dipolen gleich stark und entgegengesetzt gerichtet sind, aber verschiedene Wirkungslinien haben.

*Abbildung 2: Berechnete elektrostatische Kraft des zentralen Dipols auf den schrägen Dipol sowie die Reaktionskraft. Beide Kräfte sind als grüne Linien in den Schwerpunkten eingezeichnet. Die Kraft ist in der Regel nicht tangential zu den Feld- oder Äquipotentiallinien. Aktions- und Reaktionskraft liegen meistens auf verschiedenen Wirkungslinien.*



Werden die Dipole in der Simulation verkürzt, siehe Abb. 3, so ändert sich wenig an dieser Aussage, denn für Punktdipole lässt sie sich exakt nachrechnen.

## Wechselwirkungskräfte zwischen Punktdipolen

Die elektrostatische Feldstärke  $\vec{E}$  in der Umgebung eines Punktdipols sowie die Kraft auf einen zweiten Dipol in diesem Feld lassen sich mit moderatem Aufwand exakt von Hand berechnen.<sup>2</sup> Der erste Dipol befinde sich im Nullpunkt eines Koordinatensystem und habe elektrisches Dipolmoment  $\vec{p}_1$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 3 \cdot \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{p}_1}{r^3} \right)$$

Ein zweiter Punktdipol  $\vec{p}_2$  erfährt im Feld die Kraft<sup>2</sup>

$$\vec{F}_2 = \vec{\nabla}(\vec{p}_2 \cdot \vec{E}) \sim \vec{\nabla} \left( 3 \cdot \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{r^3} \right)$$

Diese Kraft ist in der Regel nicht radial gerichtet, was wir an einem Beispiel nachrechnen wollen.

$$\vec{p}_1 = (0, p_1, 0)^T \quad \text{in } y\text{-Richtung orientiert}$$

$$\vec{p}_2 = (p_2, 0, 0)^T \quad \text{in } x\text{-Richtung orientiert}$$

$$\vec{r} = (x, y, z)^T \quad \text{Ortsvektor des zweiten Dipols}$$

$$\vec{F}_2 \sim \vec{\nabla} \left( 3 \cdot \frac{p_1 y \cdot p_2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left( \frac{y x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right)$$

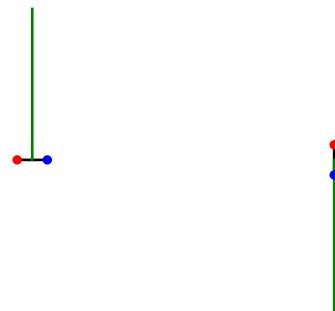
$$\vec{F}_2 \sim \left( \frac{y(-4x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}}, \frac{x(x^2 - 4y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}}, -\frac{5xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \right)^T$$

$$\vec{r} = (x, 0, 0)^T \rightarrow \vec{F}_2 \sim \left( 0, \frac{1}{x^4}, 0 \right)^T$$

Für  $y = z = 0$  erfährt der zweite Dipol eine Kraft  $\vec{F}_2$  in  $y$ -Richtung, was in diesem Beispiel senkrecht zur Verbindungslinie ( $x$ -Achse) der zwei Dipole ist. Ein numerischer Test mit zwei kleinen, endlichen Dipolen bestätigt dieses Resultat, siehe Abbildung 3. Die Rechnung ist rein elektrostatisch. An das dynamische Problem habe ich mich nicht herangewagt.

Abbildung 3: Numerisch bestimmte Wechselwirkungskräfte (grüne Linien) zwischen zwei senkrecht orientierten, kleinen Dipolen.

Aktions- und Reaktionskraft sind entgegengesetzt gerichtet, gleich stark und liegen auf verschiedenen Wirkungslinien. Dasselbe Resultat folgt aus der exakten Rechnung mit zwei Punktdipolen.



<sup>1</sup> VSMP-Bulletin Nr. 154, Januar 2024, Seiten 6-8

<sup>2</sup> J. D. Jackson, "Klassische Elektrodynamik", 2. Auflage, de Gruyter Verlag, New York, Berlin, 1983

Martin Lieberherr  
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

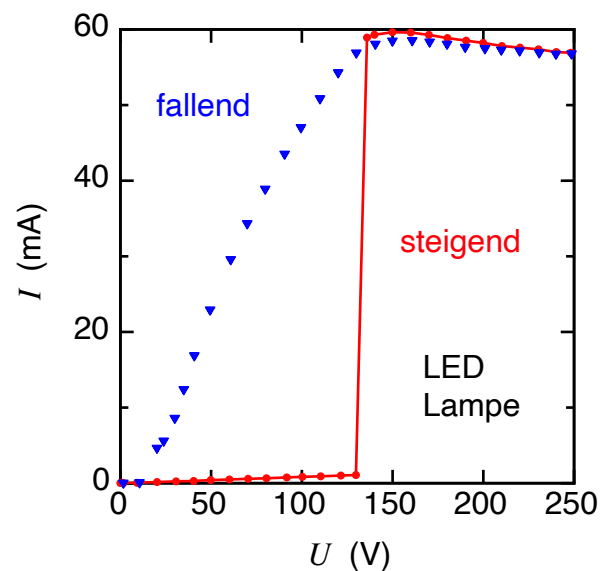
## Charakteristik einer LED-Lampe

Die elektrische Stromstärke und die Spannung einer Glühlampe hängen nach einem einfachen Gesetz zusammen (es ist nicht das ohmsche). Glühlampen sterben im Haushalt langsam aus. Wie sieht die Kennlinie einer neueren LED-Lampe aus? In unserer Sammlung fand ich eine nicht dimmbare Lightway MELED 400 Lampe mit den Nennwerten 11 W, 230 V, 50 Hz, 55 mA, 1055 lm, 2703 K und einem E27-Sockel. Ich verwendete zwei Fluke 175 Digitalmultimeter sowie ein altes Leybold-Heraus Leistungsmessgerät. Die Wechselspannung bezog ich vom Experimentierkorpus (Variac). Die Messungen sind in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt .

*Abbildung 1: Strom-Spannung Charakteristik einer LED-Lampe mit integriertem Vorschaltgerät*  
Die Messwerte für steigende Spannung sind als verbundene, runde, rote Marken dargestellt, jene für fallende als unverbundene, blaue Dreiecke.

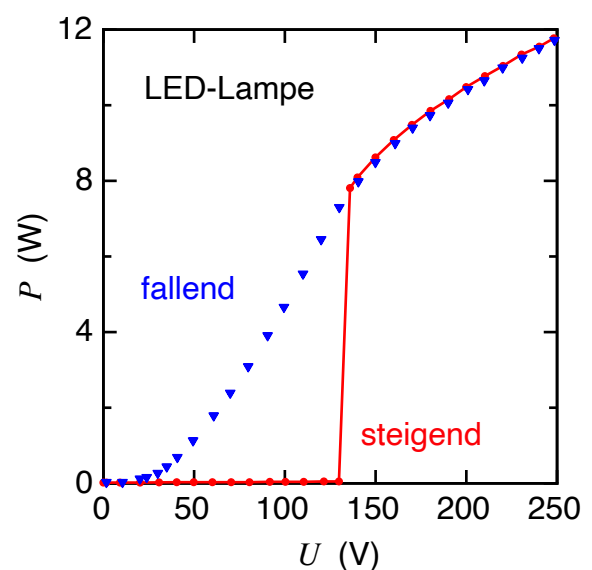
Niemals hätte ich erwartet, dass die LED-Lampe Hysterese zeigt. Die Kennlinie einer Leuchtdiode ist eine eindeutige Funktion der Spannung. Offenbar beeinflusst die Elektronik im Lampensockel den Verlauf erheblich.

Die Elektronik regelt die elektrische Stromstärke durch die gezündete Lampe auf einen konstanten Wert. Das ist sinnvoll, denn die Lichtausbeute hängt direkt von der Stromstärke ab.



*Abbildung 2: Wirkleistung vs. Spannung für eine LED mit integriertem Vorschaltgerät*  
Nachdem die Stromstärke Hysterese zeigt, ist es kein Wunder, dieses Verhalten auch bei der Leistung anzutreffen.

Ich habe nur diese eine Lampe ausgemessen. Zeigen andere LED-Lampen dasselbe Verhalten? Einige elektronische Vorschaltgeräte zerhacken den Strom, bevor sie ihn transformieren. Wie reagieren die Messgeräte darauf? Hat die Hysterese den Zweck, Effekte von eingekoppelten Störspannungen zu unterbinden? "Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben", G. W. Leibniz. (So schlimm ist es bei mir dann doch nicht.)



Martin Lieberherr  
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## Schoggimond

Welche Farbe hat der Mond?

Nach NASA<sup>1</sup> hat der Mond eine schöne, graubraune Farbe ähnlich dunkler Schokolade.

Im Nick Park - Film “Wallace & Gromit - A Grand Day Out” wird behauptet, der Mond sei aus Käse. Prompt unternehmen Wallace und Gromit einen Flug dahin, um den fehlenden Käse für einen Imbiss zu beschaffen.

Wer hat nun recht? NASA oder Wallace? Da kann nur ein Experiment entscheiden, siehe Abb. 1 und 2.

Abbildung 1: Ich lege ein Stück Schokolade (claro Mascao Noir Extreme 85 %), einen Löffel Voll Kakaopulver und ein Stück Berggeller Hartkäse auf weissem Papier in die pralle Mittagssonne (Maloja, 1. 1. 24, 12 h). Das mit dem Samsung Galaxy A53 aufgenommene Foto importierte ich in Python, wo ich Pixel auszählen und mitteln konnte. Der ausgewertete Bereich liegt zwischen den zwei horizontalen, weissen Linien in der Fotografie.  
(Die Absicht war nur, meine computational physics skills auszuweiten. Deshalb fehlt zu Abb. 2 eine anständige Fehlerrechnung.)

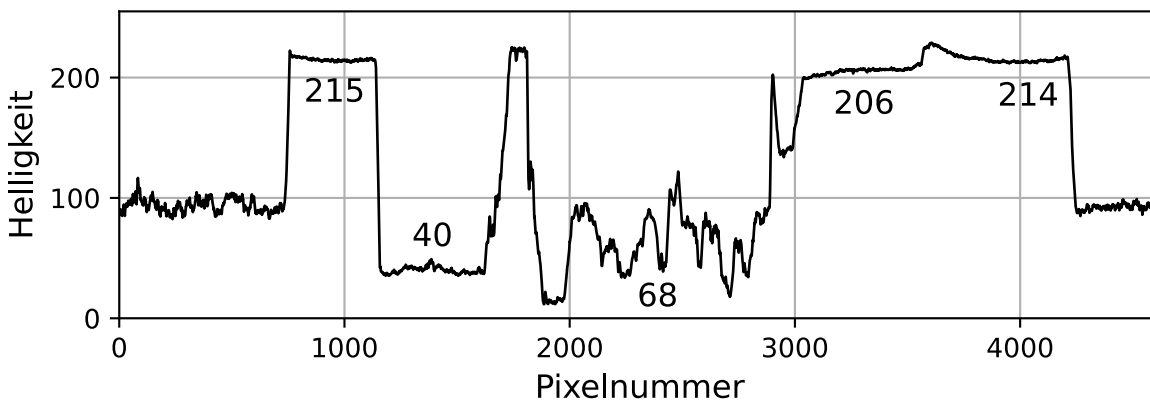


Abbildung 2: Gemittelte Helligkeiten (0.. 255) im Graubild von Abbildung 1. Das Papier zeigt eine Helligkeit von ca. 215, die dunkle Schokolade 40, das Kakaopulver 68 und der Käse 206. Nimmt man an, dass weisses Papier eine Albedo von 1 aufweist, was sicher überschätzt ist, so hat dunkle Schokolade eine Albedo von  $40/215 = 0.19$ , Kakaopulver  $68/215 = 0.32$  und Käse  $206/215 = 0.96$ . Der Mond hat laut<sup>3</sup> eine geometrische Albedo von 0.11. Er erscheint uns nur hell wegen des Kontrasts zum dunklen Nachthimmel. Der Mond hat eher das Reflexionsvermögen von dunkler Schokolade. Wallace & Gromit haben uns Käse erzählt.

1. Januar 2024, Lie.

<sup>1</sup> <https://apod.nasa.gov/apod/ap220515.html> (1. Januar 2024)

<sup>2</sup> Nick Park, Aardman Animations, 1989, deutscher Titel “Alles Käse”

<sup>3</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Albedo> (1. Januar 2024)

Fritz Gassmann  
gassmann@bluewin.ch

## Verschränkung im Schwerpunktfach

Als Grundlage für den folgenden Artikel diente die **Vierteljahrsschrift 2|2023** Seiten 6 - 13 der **Naturforschenden Gesellschaft in Zürich** ([www.ngzh.ch](http://www.ngzh.ch)), die sich an mathematisch wenig versiertes Publikum richtet. In der vorliegenden Version wurden die physikalisch-mathematischen Zusammenhänge ergänzt und in eine Form gebracht, die keine Kenntnisse der Quantentheorie voraussetzt und mathematisch das Mittelschulniveau nicht übersteigt. Zu diesem Zweck wurde eine vereinfachte Bell-Ungleichung verwendet, die an die Mengenlehre angelehnt ist und sich sehr einfach plausibel machen lässt.

Alain Aspect, John F. Clauser und Anton Zeilinger erhielten den Physik-Nobelpreis 2022 für den experimentellen Beweis eines Phänomens der Quantenphysik, dessen Existenz Albert Einstein als unmöglich erachtete, obschon es durch die erfolgreiche Quantentheorie seit 1926 vorhergesagt wurde. Verschränkung ist das einzige im Bereich der Naturwissenschaften bekannte Phänomen, das sich nicht in Raum und Zeit abspielt. Dieses Erkenntnis bedeutet eine Revolution des physikalischen Weltbildes, analog etwa zur Vereinigung von Raum und Zeit durch Einsteins Relativitätstheorie.

### 1 Kontroversen um den EPR-Artikel von 1935

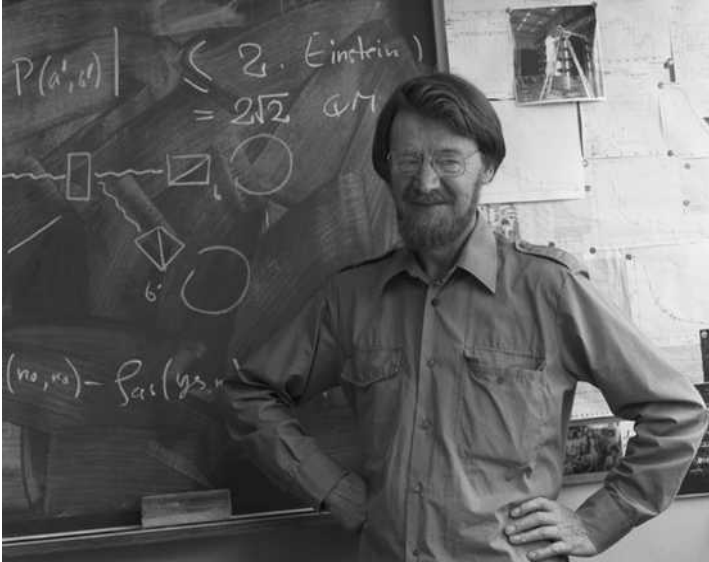
In der heute immer noch oft zitierten Publikation von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (abgekürzt EPR) diskutierten die Autoren ein Gedankenexperiment mit zwei Elementarteilchen, die beim Zerfall eines Vorgängerteilchens entstehen und diametral auseinanderlaufen. Gemäss der Quantentheorie werden beide Teilchen durch eine einzige Zustandsfunktion beschrieben, weshalb die Heisenbergsche Unschärferelation gelten muss: Man kann nicht am einen Teilchen den Ort und am anderen den Impuls gleichzeitig genau messen. Einstein hat dies als Unsinn betrachtet und als «**spukhafte Fernwirkung**» bezeichnet. Wie sollte denn nur eine Messung am einen Teilchen das entfernte Teilchen instantan beeinflussen können? Er vermutete, dass die Quantentheorie unvollständig sei und durch bislang unbekannte «versteckte Variablen» ergänzt werden müsse. Er hoffte, dass dadurch auch die Unschärferelation und weitere schwer verständliche Eigenschaften der Quantentheorie verschwinden würden.

Erwin Schrödinger hat für die rätselhafte durch die Quantentheorie vorhergesagte Korrelation zweier voneinander entfernter Teilchen den Begriff «**Verschränkung**» geprägt. Heftige Diskussionen haben über lange Zeit zu keinem Ergebnis geführt, da man weit davon entfernt war, die Kontroverse durch ein überzeugendes Experiment zu entscheiden. Schliesslich hat man in Anbetracht der Erfolge der Quantentheorie jede weitere Beschäftigung mit dieser Frage dogmatisch als «junk science» diffamiert und Physiker, die sich dennoch darum kümmerten, als nicht ernst zu nehmende Aussenseiter stigmatisiert: «shut up and calculate!»

### 2 Die geniale Idee von Bell 1964

Der irische Physiker John Stewart Bell (1928-1990) arbeitete am CERN und benutzte ein Sabbatical im Jahr 1964 an der Stanford University, um sich in das ungelöste Problem der Quantentheorie betreffend die «versteckten Variablen» zu vertiefen. Er erkannte nebst anderen Physikern, dass es sich um einen sehr grundlegenden Unterschied zwischen den klassischen Theorien (Relativitätstheorie, Maxwellsche Elektrodynamik) und der Quantentheorie handelt. Erstere basieren auf dem Einsteinschen Konzept des «**lokalen Realismus**». Dabei bedeutet «**lokal**», dass sich Signale, Information oder sonstige Wirkungen maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können und deshalb eine gegenseitige Beeinflussung zweier Teilchen erst nach einer gewissen Zeit auftreten kann. «**Realismus**» bedeutet, dass physikalische Variablen eines Teilchens

einen definierten Wert besitzen, auch bevor sie gemessen werden. Für makroskopische Körper sind beide Forderungen klar erfüllt. Elementarteilchen und sogar Moleküle bis etwa  $C_{60}$ , die durch die Quantentheorie beschrieben werden, können sich jedoch «**nichtlokal**» und «**nichtrealistisch**» verhalten, d.h. sie können gleichzeitig an mehreren Orten sein und ihre Variablen können gleichzeitig inkompatible Werte annehmen. So kann beispielsweise die Polarisation von Photonen gleichzeitig horizontal und vertikal sein; man spricht von einem überlagerten Zustand.



**Abbildung 1** – John Bell am CERN 1982. Auf der Tafel sieht man den letzten Term der Bellschen Ungleichung in der CHSH-Form (Bell 1971):  $... P(a', b') \leq 2$  mit dem Vermerk «Einstein» um anzudeuten, dass es sich um eine «versteckte Variablen»-Theorie handelt. Darunter dasselbe Gedankenexperiment mit der Quantentheorie berechnet ergibt  $=2\sqrt{2}$ , das mit dem Wert 2.83 die Ungleichung verletzt. Darunter ist ein Teil der Skizze für ein Experiment mit verschränkten Photonen ersichtlich, das Klarheit schaffen soll, ob Einstein oder die Quantentheorie Recht hat.

Bild: CERN, CC BY 4.0

Bei seiner Suche nach einem Gedankenexperiment, das nach Umsetzung in ein reales Experiment klar entscheiden könnte, ob versteckte Variablen das Problem lösen könnten, stiess Bell auf eine Publikation des US-amerikanischen Quantenphysikers David Bohm (1917-1992) von 1957. Darin schlug der Autor vor, die versteckten Variablen, von deren Existenz dieser wie Einstein überzeugt war, mit Hilfe von Experimenten mit Photonen zu finden. Weiter fand sich auch ein Hinweis auf die Annihilations-Experimente der chinesisch-stämmigen Physikerin Chien-Shiung Wu (1912-1997) von 1949 an der Columbia University in New York, wobei senkrecht zueinander polarisierte Zwillingphotonen entstanden. Rückblickend stuft man diese Experimente als die erste Beobachtung von Verschränkung ein (Abb. 2).



**Abbildung 2** – Chien-shiung Wu (1912-1997) an der Columbia University 1963. Rückblickend hat Wu 1949 zum ersten Mal experimentell verschränkte Photonen nachgewiesen bei ihren Experimenten zur Bestätigung von John Wheelers Paarthorie. Ihre Messungen waren jedoch zu wenig beiweiskräftig, um versteckte Variablen auszuschliessen, weil sie nur mit senkrecht zueinander eingestellten Polarisatoren experimentierte und nur knapp jedes zweite Photon registrieren konnte. Diese Ausbeute von weniger als 50% war 1949 jedoch eine ausserordentliche Leistung. Warum wurde es versäumt, sie bei der Vergabe der Nobelpreise am 10. Dez. 2022 zu erwähnen? (vgl. Frank 2023)

Bild: Flickr's The Commons (no known copyright)

Dies inspirierte Bell, ein Gedankenexperiment mit verschränkten Photonen vorzuschlagen, das die Kontroverse betreffend versteckte Variablen entscheiden sollte, wenn es dann einmal realisiert werden könnte. Er entwickelte eine sehr allgemeingültige Ungleichung, die für jedes mögliche Experiment mit jeder möglichen auf versteckten Variablen beruhenden lokalen Theorie erfüllt sein muss (Bell 1964, 1971). Bell fand interes-

santerweise Gedankenexperimente mit Photonen, die seine Ungleichung gemäss der Quantentheorie *verletzen*. Könnte man also solche Experimente durchführen und würden die Ergebnisse mit den durch die Quantentheorie vorhergesagten übereinstimmen, wäre bewiesen, dass die Quantentheorie durch keine lokale Theorie mit versteckten Variablen ersetzt werden kann und dass Verschränkung und Nichtlokalität im Mikrokosmos real sind. Allerdings hat Bell keine Verletzung seiner Ungleichung durch Experimente erwartet, sondern eine Bestätigung des lokalen Realismus und einen «Sieg» für Einstein. Mit dem Nobelpreis 2022 wurde jedoch der «Pokal» definitiv ans **quantentheoretische nichtlokale und nichtrealistische Weltbild** verliehen. Dies bedeutet eine **Revolution des physikalischen Weltbildes** und es wäre wünschenswert, wenn ein Körnchen dieser Erkenntnis im Physik-Unterricht an den Mittelschulen ankommen würde. Der vorliegende Artikel gibt einen Hinweis, wie dies machbar wäre.

### 3 Die experimentelle Bestätigung der Verschränkung

Die drei Nobelpreisträger Alain Aspect, John F. Clauser und Anton Zeilinger haben neben vielen anderen Forschenden wesentlich dazu beigetragen, dass Bells Idee experimentell realisiert werden konnte (EPN 2023a).

Der US-amerikanische Experimentalphysiker **John Francis Clauser** (geb. 1942) leitete zusammen mit Mike Horne, Abner Shimony und George Holt (CHSH 1969) die erste experimentell testbare Bell-Ungleichung ab. Auf dieser Grundlage führte er zusammen mit Stuart Freedman 1972 ein Experiment durch, das die modifizierte Bell-Ungleichung deutlich verletzte und die Quantentheorie bestätigte. Es war ein Experiment mit einer zwei-Photonen Kaskade in Kalzium, bei der die beiden Photonen eine verschränkte Polarisation aufweisen. Dieses Experiment löste Erstaunen aus und gab den Anstoss für weitere Untersuchungen, die notwendig waren, um die Argumente der «lokalen Realisten» zu widerlegen, die im Sinne Einsteins beharrlich weiter für ihre Weltanschauung kämpften und zwei wichtige Argumente lieferten, warum die durchgeführten Bell-Tests ungenügend sein könnten. Es waren dies das sog. «Lokalitäts-Schlupfloch» und das «Detektions-Schlupfloch». Ersteres bedeutete, dass vielleicht die Polarisatorstellungen irgendwie in versteckten Variablen beiden Photonen bekannt sein könnten und es deshalb trivial ist, dass sich beide gleich benehmen würden. Das zweite Argument zielte darauf ab, dass nicht alle Photonen detektiert werden und vielleicht die Auswahl der detektierten aus irgendwelchen Gründen gerade so wäre, dass die rätselhaften Korrelationen vorgetäuscht würden, indem die Statistik durch die nicht beobachteten Photonen verfälscht würde (analog wie politische Abstimmungen durch «verlorene» Stimmzettel verfälscht werden können).

Der junge Physiker **Alain Aspect** (geb. 1947) war von den Bell-Ungleichungen derart fasziniert, dass er beschloss, seine Dissertation diesem Thema zu widmen. Er besuchte deshalb Bell am CERN, um seine Ideen für Experimente mit ihm zu besprechen (vgl. SPG 2023). 1974 begann er mit Experimenten am Institut d'Optique an der Université d'Orsay (Paris) und schloss damit seine Thèse d'Etat 1983 erfolgreich ab. Zuvor publizierte er ein Experiment mit einer enorm hohen statistischen Genauigkeit, wobei die Verletzung der entsprechenden Bell-Ungleichung über 40 Standard-Abweichungen nach einer Messzeit von nur wenigen Minuten betrug. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Resultat bloss per Zufall entstand, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, 800 mal hintereinander eine sechs zu würfeln. Wichtig war, dass Aspect bei diesen Experimenten auch dafür sorgte, dass die Polarisation der Photonen vor dem Eintritt in die polarisierenden Strahlteiler um verschiedene Winkel gedreht wurden. Die Entscheidung, welcher der möglichen Drehwinkel gewählt wurde, fällte ein Computer auf der Basis von Zufallszahlen, *nachdem* die Zwillingsphotonen erzeugt wurden. Dann folgten die Messungen der Photonen so rasch, dass auch Signale mit Lichtgeschwindigkeit zu wenig Zeit gehabt hätten, um Information zwischen den beiden Messorten auszutauschen. So wurde das «Lokalitäts-Schlupfloch» auf überzeugende Weise eliminiert und den «lokalen Realisten» blieb nur noch ein dünner Hoffnungsfaden mit dem immer noch offenen «Detektions-Schlupfloch», das am schwierigsten zu überwinden war, weil einzelne Photonen leicht verloren gehen.

Glücklicherweise entwickelten sich auch die experimentellen Möglichkeiten mit grossem Tempo weiter. 1960 wurde der Laser erfunden und 1967 wurde an nichtlinearen, doppelbrechenden Kristallen der «**Spontaneous Parametric Downconversion**»-Effekt experimentell entdeckt und auch theoretisch verstanden. Solche Kristalle produzieren aus eingestrahnten Photonen in genau bestimmten Richtungen fliegende Zwillingsphotonen niedrigerer Energie, deren Polarisationen verschränkt sind. Die Ausbeute ist nur ein verschränktes

Paar auf etwa 10 Millionen bis 1 Milliarde eingestrahler Photonen, was für Experimente aber ausreicht. Auch waren die dafür notwendigen Kristalle nicht aussergewöhnlich: zum Beispiel leistet  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  (Kaliumdihydrophosphat) gute Dienste; ein Kristall, der einfach herzustellen ist und als Zusatz für Energy-Drinks oder als Dünger für Aquariumpflanzen verwendet wird. Zusammen mit Laserdioden können damit kleine und billige Verschränkungs-Photonenquellen gebaut werden. Ab etwa 1986 wurde Downconversion das Arbeitspferd für Verschränkungsexperimente (vgl. auch Vorträge von Gassmann 2021).

Als **Anton Zeilinger** (geb. 1945) an der Universität Innsbruck zum Professor ernannt wurde, wechselte er von der Neutronenphysik auf die Photonenphysik, dessen Zukunftspotenzial er damals erahnte. Bereits 1993 entdeckte er zusammen mit seiner Forschungsgruppe das Phänomen des «Verschränkungs-Austausches» (entanglement swapping), das bald im Zusammenhang mit Quantencomputern zentrale Bedeutung erlangte. 1999 wurde ihm ein Lehrstuhl für Experimentalphysik an der Universität Wien angeboten und die ganze Gruppe zügelte nach Wien. Zeilinger verstand es, seine Experimente publikumswirksam zu inszenieren, was ihm bald den Spitznamen «Mister Beam» einbrachte. So schickte er verschränkte Photonen in einem Glasfaserkabel in einem 400 Meter langen Kanal unter der Donau hindurch oder über 144 Kilometer in der Luft übers Meer zwischen La Palma und Teneriffa und erweiterte schrittweise die Distanz, über welche die «spukhafte Fernwirkung» funktioniert. Jian-Wei Pan aus China, einer seiner früheren Studenten und später Mitarbeiter in Zeilingers Gruppe, konnte 2020 diesen Rekord auf 1120 Kilometer ausdehnen und via den chinesischen Satelliten «Micius» einen Prototyp eines Quanten-Internet-Links herstellen (EPN 2023b: 24-27). Im Hinblick auf den Nobelpreis von besonderer Bedeutung war, dass Zeilinger mit seiner Forschungsgruppe ein Bell-Experiment aufbauen konnte, das alle Schlupflöcher *gleichzeitig* (nicht in separaten verschiedenen Experimenten) eliminieren konnte, womit definitiv gezeigt wurde, dass es Phänomene ausserhalb Raum und Zeit gibt.

#### 4 Die Grundidee eines Bell-Tests

Ich folge den einfach zu begreifenden Überlegungen im Wikipedia-Artikel *Bellsche Ungleichung* (vgl. Lit.) und ergänze ihn durch entsprechende mathematische Ableitungen, die für das Niveau der Mittelschule geeignet sind. Wir betrachten eine Menge von Gegenständen der makroskopischen Welt, die sich durch drei binäre Eigenschaften oder Attribute unterscheiden. Handelt es sich um eine Gruppe von Menschen, könnten wir beispielsweise als Attribut A1 den Anfangsbuchstaben des Vornamens wählen und definieren, dass A1 zutrifft, wenn der Buchstabe zwischen A und F liegt und dies mit 1 bezeichnen. Trifft A1 nicht zu, schreiben wir 0. Als Attribut A2 wählen wir auf analoge Weise den Anfangsbuchstaben des Nachnamens. Als Attribut

Nr	A1	A2	A3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	0	1	1
5	1	0	1
6	1	0	1
7	0	1	0
8	0	0	0
9	0	0	1
10	0	1	0
11	1	1	0
12	1	0	0
13	0	1	1
14	1	1	1
15	0	0	1

**Tabelle 1** – Statistische Erhebung einer Menge mit 15 makroskopischen Elementen mit je 3 Attributen.

3 nehmen wir weiblich als 1. Tabelle 1 zeigt ein mögliches Resultat für eine Schulklasse mit 15 Mitgliedern. Wir sehen, dass die Vornamen und Nachnamen 7 und 6 mal zwischen A und F liegen und dass die Klasse 8 Mädchen umfasst. Ich werde sogleich beweisen, dass für jede beliebige mit 0 und 1 aufgefüllte Tabelle beliebiger Länge die folgende Ungleichung gilt:

$$N(A1,A2) \leq N(A1,A3) + N(A2,A\bar{3})$$

$N(A_i,A_k)$  ist die Anzahl Mitglieder, bei denen Attribut  $A_i$  und  $A_k$  zutrifft.  $A\bar{3}$  bedeutet, dass diejenigen Mitglieder der Klasse berücksichtigt werden müssen, bei denen  $A_3$  nicht zutrifft (also die nicht weiblichen, die mit 0 kodiert sind). Wir sehen, dass die Ungleichung stimmt:  $2 \leq 3 + 4$ .

Betrachten wir nun eine Klasse, die aus nur einem Mitglied besteht. Dafür gibt es 8 mögliche Tabellen (die Binärzahlen 000 bis 111). Für jede Tabelle  $0xx$  ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, weil links eine Null steht. Aus demselben Grunde ist die Ungleichung auch für  $10x$  erfüllt. Kritisch sind nur  $110$  und  $111$  und die beiden Ungleichungen lauten:  $1 \leq 0 + 1$  und  $1 \leq 1 + 0$ . Beide sind erfüllt, d.h. jede beliebige Zeile der Tabelle 1 erfüllt die Ungleichung, womit die Ungleichung für makroskopische Körper allgemein bewiesen ist.

Bei sehr grossen Mengen kann man die drei Terme der Ungleichung durch die Anzahl Elemente der Menge dividieren und erhält so eine Wahrscheinlichkeits-Ungleichung, die den Vorteil hat, dass man die drei Terme auch in einzelnen Erhebungen mit unterschiedlichen Beobachtungszahlen gewinnen kann. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeiten mit  $p$  für *probability*, ergibt sich:

$$p(A1,A2) \leq p(A1,A3) + p(A2, A3) \text{ M-Bell-Test}$$

Diese Überlegung macht klar, dass die Ungleichung auch gilt, wenn die drei Terme nicht simultan gemessen werden können. Die Tabelle zerfällt in diesem Fall in drei Tabellen mit je zwei Spalten. Bei den folgenden Photonen-Experimenten trifft genau dies zu.

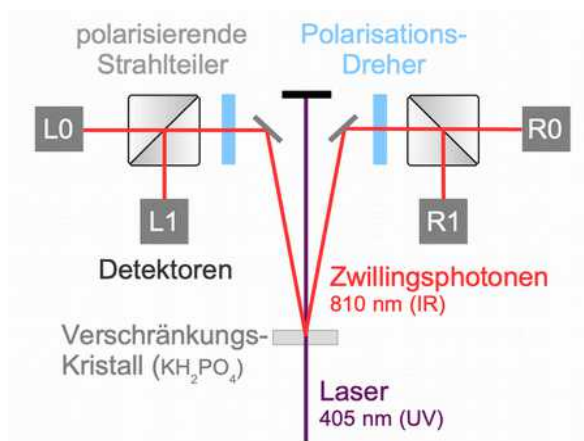
Ich bezeichne diese Ungleichung als M-Bell-Test, wobei das M für Mengenlehre steht. Bells Ungleichung ist komplizierter und basiert auf einer längeren mathematischen Herleitung. Sie beruht wie die obige Ungleichung darauf, dass Eigenschaften von Körpern *realistisch und lokal* sind. Zusätzlich enthält sie im Gegensatz zur obigen Herleitung explizit *versteckte Variablen*. Beide Ungleichungen gehören zum Typ der sogenannten Dreiecks-Ungleichungen (die Summe zweier Seiten ist grösser als die Dritte). Bell konnte seine Ungleichung mit Photonen-Experimenten verknüpfen und mit Hilfe der Quantentheorie durchrechnen. Er fand dabei erstaunlicherweise Situationen, bei denen die Ungleichung durch die Quantentheorie verletzt wird. So konnten Experimente definiert werden, die entscheiden können, ob die Quantentheorie korrekt ist oder durch versteckte Variablen ergänzt werden muss, je nachdem, ob die experimentellen Resultate den Bell-Test (wie die Theorie) verletzen oder erfüllen.

**Bemerkung:** Beim vereinfachten hier vorgestellten M-Bell-Test wird nirgends Bezug genommen auf versteckte Variablen. Deshalb ist der hier vorgeschlagene Zugang zu einer vereinfachten Bell-Ungleichung aus streng wissenschaftlicher Sicht angreifbar. Aus didaktischer Sicht ist er aber sehr geeignet: Er ist direkt und einfach verständlich und legt die Quintessenz des Bell-Tests klar dar.

## 5 Anwendung des M-Bell-Tests auf verschränkte Photonen

Die Experimente der Nobelpreisträger hatten im Prinzip den in der Abb. 3 skizzierten Aufbau. In einem Verschränkungskristall entstehen aus einem hochfrequenten Photon (violett) zwei verschränkte infrarote Photonen (rot) mit je halber Energie. In je einem Polarisationsdreher wird die Polarisation um beliebige Winkel gedreht. An der Universität Erlangen wird ein Schülerlabor betrieben, bei dem ein derartiges System zur Messung von verschränkten Einzelphotonen eingesetzt wird und im Internet wird die Apparatur detailliert beschrieben und erklärt (vgl. Lit. Uni Erlangen).

Wir berechnen nun auf der Basis der klassischen Optik (lokal-realistisch) und der Quantentheorie (nicht-lokal-nichtrealistisch), mit welchen Wahrscheinlichkeiten  $p(x,y)$  das linke Photon im Detektor L0 **und** das rechte Photon im Detektor R0 registriert werden ( $x$  und  $y$  sind die Stellungen der Polarisationsdreher links und rechts). Diese Wahrscheinlichkeiten können in Experimenten mit Hilfe von Koinzidenzzählern gemessen und mit den berechneten Werten verglichen werden.



**Abbildung 3** – Prinzipskizze der Experimente von Aspect, Clauser und Zeilinger. Mit Hilfe von Koinzidenzzählern wird gemessen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Zwillingenphotonen in L0 und R0 gelangen. Erklärungen im Text.

(Bild: Fritz Gassmann)

Wir versuchen nun, den M-Bell-Test, der für Mengen gilt, in einen M-Bell-Test für verschränkte Photonen umzuwandeln. Wir setzen für A1, A2, A3 die drei Winkeleinstellungen der Polarisationsdreher ein, also  $A1 = \alpha_1$ ,  $A2 = \alpha_2$ ,  $A3 = \alpha_3$  und erhalten die folgende Ungleichung:

$$p(\alpha_1, \alpha_2) \leq p(\alpha_1, \alpha_3) + \mathfrak{p}(\alpha_2, \alpha_3)$$

$\mathfrak{p}$  bedeutet, dass das nach rechts fliegende Photon im Detektor R1 statt R0 registriert werden soll. Die drei Terme werden in einzelnen, nacheinander ausgeführten Experimenten gemessen. Aus physikalischer Sicht ist klar (Isotropie des Raumes), dass nur *Winkeldifferenzen* und nicht deren Absolutwerte wichtig sind und dass  $\alpha_1$  auf Null normiert werden kann. Wir ordnen die Terme noch um und schreiben die Ungleichung als:

$$p(\alpha_2) - p(\alpha_3) - \mathfrak{p}(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 0 \quad \text{M-Bell-Test für verschränkte Photonen}$$

### a) Lokal-realistische Rechnung (Einstein)

Wir berechnen nun die drei Koinzidenzwahrscheinlichkeiten auf der Basis eines lokal-realistischen Weltbildes, wie Einstein dies getan hätte. *Es wird angenommen, dass die beiden Photonen bereits vor der Messung eine Polarisation haben (realistisch). Da sie verschränkt sind, haben sie dieselbe Polarisation  $\xi$ , die statistisch gleichmässig über alle Winkel verteilt ist. Es findet keine weitere Wechselwirkung zwischen den beiden Zwillingenphotonen statt (lokal).* Im DMK-Teil (a) dieses Heftes ist die Berechnung der Koinzidenzwahrscheinlichkeiten  $p_{00}(\alpha) = \frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha))$  resp.  $p_{01}(\alpha) = \mathfrak{p}_{00}(\alpha) = \frac{1}{8} (2 - \cos(2\alpha))$  wiedergegeben. Damit ergibt sich der obige M-Bell-Test zu:

$$\frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha_2)) - \frac{1}{8} (2 + \cos(2\alpha_3)) - \frac{1}{8} (2 - \cos(2(\alpha_3 - \alpha_2))) \leq 0$$

Nach Umformungen und Verwendung von  $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2\alpha - 1$  ergibt sich:

$$\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 1.5$$

Normieren wir die Ungleichung noch auf die Konstante 2 wie auf Bells Wandtafel in Abb. 1, bekommen wir die Ungleichung:

$$(4/3) (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)) \leq 2 \quad \text{M-Bell-Test klassisch ist erfüllt}$$

Die im DMK-Teil (b) wiedergegebene Berechnung des Maximums der linken Seite der Ungleichung ergibt die Winkel  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$  und  $\alpha_3 = 60^\circ$  und den Wert  $(4/3) (5/4) = 5/3 < 2$ , d.h. der M-Bell-Test wird durch eine klassische Rechnung (ohne versteckte Variablen) immer erfüllt.

### b) Nichtlokal-nichtrealistische Rechnung (Quantentheorie)

Wir berechnen nun die drei Koinzidenzwahrscheinlichkeiten mit der Quantentheorie. Diese Rechnung ist wesentlich einfacher und basiert auf folgenden Überlegungen. *Beide Photonen sind in einem Überlagerungszustand, haben also keine definierte Polarisation (nichtrealistisch).* Wir nehmen an, dass das linke Photon etwas früher im polarisierenden Strahlteiler ankommt als dasjenige auf der rechten Seite (diese Annahme ist unnötig, vereinfacht aber unsere Vorstellung). Das linke Photon gelangt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  in den Detektor L0 (vgl. Erwartungswert  $\langle \cos^2\xi \rangle$  im DMK Teil (a)). Sobald dies geschieht, ist der Zustand des linken Photons bestimmt. *An diesem Vorgang erkennt man, dass im Rahmen der Quantentheorie eine Messung nicht einfach als Ablesung einer Eigenschaft interpretiert werden kann, sondern dass sie den Zustand aktiv erzeugt. Mit dem so definierten Zustand des linken Photons ist instantan auch der Zustand des Zwillingenphotons auf der rechten Seite als parallel dazu definiert (nichtlokal), da verschränkte Photonen gemäss der Quantentheorie immer im gleichen Zustand sind, egal wie weit sie voneinander entfernt sind (auch astronomische Distanzen sind zugelassen!).* Ohne Polarisationsdreher würde nun das rechte Photon mit Wahrscheinlichkeit 100% in den Detektor R0 gelangen. Der Polarisationsdreher dreht jedoch die Polarisation des Photons um den Winkel  $\alpha$  gegenüber dem linken. Nach dem Gesetz von Etienne Louis Malus (um 1810) ist deshalb die Wahrscheinlichkeit gleich  $\cos^2\alpha$ , dass das rechte Photon in den Detektor R0 gelangt. Damit können wir alle drei Terme der Ungleichung berechnen:

$$\frac{1}{2} (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 - (1-\cos^2(\alpha_3 - \alpha_2))) \leq 0$$

Beim dritten Term ist zu beachten, dass wir die Gegenwahrscheinlichkeit  $1-\cos^2()$  einsetzen müssen: Wir berechnen also nicht die Koinzidenzwahrscheinlichkeiten L0-R0, sondern L0-R1. Wir erhalten:

$$\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2) \leq 1$$

Nun normieren wir wie bei der klassischen Rechnung im Abschnitt (a) die rechte Seite der Ungleichung auf 2, indem wir mit 2 multiplizieren und erhalten:

$$2 (\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)) \leq 2 \quad \text{M-Bell-Test nach Quantentheorie **wird verletzt!**}$$

Wir stellen fest, dass der Klammer-Ausdruck derselbe ist wie bei der klassischen Rechnung und müssen deshalb sein Maximum nicht neu bestimmen: es ist **5/4 an der Stelle  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$  und  $\alpha_3 = 60^\circ$**  wie bei der klassischen Rechnung! Setzen wir dieses Maximum in die Ungleichung ein, erhalten wir  $2(5/4) = 2.5 \leq 2$  und sehen, dass die Ungleichung verletzt wird. Weiter verwandelt sich die Ungleichung in eine Gleichung, wenn alle Winkel verschwinden:  $2(1-1+1) = 2$  (vgl. dazu nächster Abschnitt 6). **Wir sehen, dass unsere Ungleichung fast alle Eigenschaften einer Bell-Ungleichung besitzt. Einzig Aussagen über versteckte Variablen lässt sie nicht zu, da diese nicht in unserem M-Bell-Test enthalten sind.**

## 6 Wasserdichte Bell-Tests

Die Physik-Nobelpreise 2022 wurden nicht mit Hilfe des oben verwendeten M-Bell-Tests durchgeführt, sondern mit Tests, in deren wesentlich schwieriger zu verstehenden Herleitungen versteckte Variablen eine wichtige Rolle spielen. Der Wert der Konstanten muss bei diesen Tests nicht auf 2 kalibriert werden, sondern die 2 ergibt sich direkt aus den Herleitungen. Aus diesem Grunde treten in der physikalischen Literatur nicht die Winkel  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $60^\circ$  auf, sondern meist die optimalen Winkel  **$0^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $67.5^\circ$**  (vgl. auch EPN 2023b für weitere Informationen zur Geschichte der Bell-Ungleichung und entsprechenden Experimenten).

Für eine recht verständliche Herleitung der im Abschnitt 3 erwähnten CHSH-Ungleichung sei auf *CHSH inequality* verwiesen, wo die Korrelationsfunktion  $E(a,b)$  definiert wird.  $a$  und  $b$  sind die Einstellungen der Polarisationsdreher auf der linken und der rechten Seite (vgl. Detektoren in Abb. 3). Die Korrelationsfunktion enthält alle vier möglichen Koinzidenzwahrscheinlichkeiten und lautet  $E = p_{00} + p_{11} - p_{10} - p_{01}$ . Der gemessene Erwartungswert von  $E(0,0)$  ist für verschränkte Photonen gleich dem quantentheoretisch berechneten Wert  $\langle E(0,0) \rangle = \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 1 - 0 - 0 = 1$  im Gegensatz zur klassischen Rechnung  $\frac{1}{8} (2+1) + \frac{1}{8} (2+1) - \frac{1}{8} (2-1) - \frac{1}{8} (2-1) = \frac{1}{2}$ . Für unverschränkte Photonen ist  $\langle E(0,0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 0$  für die klassische und für die quantentheoretische Rechnung sowie als Messresultat.

Die verschränkten 511 keV Photonen, die bei der Annihilation von Elektronen und Positronen entstehen, sind senkrecht zueinander polarisiert. Der gemessene und quantentheoretisch berechnete Wert ist  $\langle E(0,0) \rangle = -1$ , der klassisch berechnete Wert ist  $-\frac{1}{2}$  (vgl. Abb. 2).

$E(a,b)$  kann wie oben erwähnt als Funktion des Differenzwinkels  $E(\alpha)$  geschrieben werden. Mit den im vorigen Abschnitt benutzten Beziehungen ergibt sich:

**a) Klassisch:**  $E_K(\alpha) = \frac{1}{8} \{ (2+\cos 2\alpha) + (2+\cos 2\alpha) - (2-\cos 2\alpha) - (2-\cos 2\alpha) \} = \frac{1}{2} \cos 2\alpha$

**b) Quantenth.:**  $E_Q(\alpha) = \frac{1}{2} \{ \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \} = \cos 2\alpha$

Aus der CHSH-Herleitung gewinnt man folgende Ungleichung (ohne Kalibrierung):

$$| E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b') | \leq 2 \quad \text{Bell-Ungleichung (Bell 1971)}$$

Mit einer zum DMK Teil (b) analogen Optimierungsaufgabe findet man mit Hilfe eines Systems von 3 Gleichungen die Werte für  $a, b, a', b' = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$  und  $67.5^\circ$ . Eingesetzt in die obige Ungleichung erhalten wir für die Quantentheorie:

$$| E(22.5^\circ) - E(67.5^\circ) + E(-22.5^\circ) + E(22.5^\circ) | = | \cos 45^\circ - \cos 135^\circ + \cos -45^\circ + \cos 45^\circ | = 2\sqrt{2},$$

was die Ungleichung mit der Konstanten **2** verletzt (vgl. Wandtafel auf Abb. 1, Bell hat für  $E$  vielfach  $P$  be-

nutzt). Die Konstante 2 erhält man auch, indem man alle Winkel Null setzt. Das Maximum für die klassische Rechnung gibt dafür  $\sqrt{2}$ . Daran erkennt man, dass die Konstante 2 im Bell-Test durch mögliche versteckte Variablen mitbestimmt wird. Tatsächlich lassen sich für den Spezialfall paralleler Strahlteiler (d.h. alle Winkel Null) versteckte Variablen definieren, so dass auch die klassische Rechnung (wie die quantentheoretische)  $E(0,0) = 1$  ergibt und zur Konstanten 2 führt.

**Koinzidenzmessungen zeigen mit erdrückender Signifikanz (mit über 40 Standard-Abweichungen), dass die Berechnung nach der Quantentheorie korrekt ist. Die Quantentheorie muss also nicht durch versteckte Variablen ergänzt werden und Verschränkung ist ein reales Phänomen ausserhalb von Raum und Zeit.**

## 7 Kryptografie mit Zwilling photons

Ein junger polnischer Doktorand an der Oxford University, Artur Ekert, hat 1991 erkannt, dass die rätselhaften nicht-lokalen Quantenkorrelationen als kryptografische Schlüssel verwendet werden könnten. Diese Idee öffnete eine Tür zur Quanteninformations-Community und bereits 1995 demonstrierten Physiker der Université de Genève die Verteilung eines Schlüssels via Glasfaserkabel der Swisscom zwischen Lausanne, Nyon und Genf (Gisin 2023). Aus diesem Projekt wurde als Spinoff 2001 die Firma «ID Quantique» in Genf gegründet. Zeilinger interessierte sich ebenfalls für Quanteninformation und patentierte 1999 sein EPR-Protokoll zum Schlüssel-Austausch.

Weshalb kann ein Schlüssel ausgetauscht werden aber trotzdem soll es unmöglich sein, damit *instantane* Informationsübermittlung zu entwickeln? Der Schlüsseltausch basiert darauf, dass zwei Stationen, L und R, von einer zwischen ihnen liegenden Quelle verschränkte Photonen erhalten und diese messen. Wenn die Polarisatoren parallel gestellt sind, gehen die Photonen bei beiden Stationen in die analogen Detektoren, d.h. beide in 0 oder beide in 1 (vgl. Abb. 3). Fasst man diese Detektornummern als Binärzahlen auf, entsteht so an beiden Stationen dieselbe binäre Zufallszahlenfolge, was äquivalent zu zwei identischen Schlüsseln ist. Es ist aber nicht möglich, diesen Vorgang zur Übertragung von Information zu verwenden, weil das ankommende Photon den Kanal 0 oder 1 zufällig auswählt und nicht gesteuert werden kann.

Zusätzlich zum Schlüsselaustausch lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob jemand versucht, die Verbindung zu hacken. Zu diesem Zweck wechselt man an beiden Stationen unabhängig voneinander und zufällig die Polarisationsdreher zwischen optimalen Positionen. Durch anschliessenden Austausch der eingestellten Positionen via das normale Internet lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob die Photonen verschränkt waren. Falls dabei die Bell-Ungleichung erfüllt wird, war dies nicht der Fall und der Schlüssel wird verworfen und es wird ein anderer Übertragungsweg gesucht. Dieser Test beruht darauf, dass es keinen «Quantenkopierer» gibt, d.h. dem Hacker ist es nicht möglich, das ankommende Photon zu kopieren, um es zu analysieren und die Kopie weiterzuschicken, damit niemand etwas merken sollte (die Kopie ist nicht mehr verschränkt mit dem Photon der Gegenstation).

Diese Kryptografieanwendung hat weltweit riesige Aufmerksamkeit auf sich gezogen und das Interesse vieler Forschungsgruppen auf die Quantenoptik gelenkt. In kurzer Zeit entstanden neue Ansätze zu Quantencomputern, zur Teleportation von Quantenzuständen und zum Quanten-Internet; der Weg zu Nobelpreisen wurde geöffnet.

## Literatur

Bell J.S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* 1(3): 195-200.

Bell J.S. 1971. In: *Foundations of Quantum Mechanics, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course XLIX, B. d’Espagnat (Ed.) Academic, New York, 1971, p. 171 and Appendix B.* Reproduced in: Bell J.S. 1987. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.* Cambridge University Press. Ableitung vgl. [https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality)

Bellsche Ungleichung: [https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche\\_Ungleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung)

CHSH 1969. Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A. 1969. Proposed Experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.* 23(15): 880-884.

CHSH inequality: [https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality)

EPN 2023a: *Europhysics News* 53/5: 8-9.

EPN 2023b: *Europhysics News* 54/1: 11-31.

EPR: Einstein A., Podolsky B., Rosen N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* 47: 777-780.

Frank M. 2023. The little-known origin story of the science that won the 2022 Nobel Prize in Physics. *Scientific American*, April 2023: 38-45.

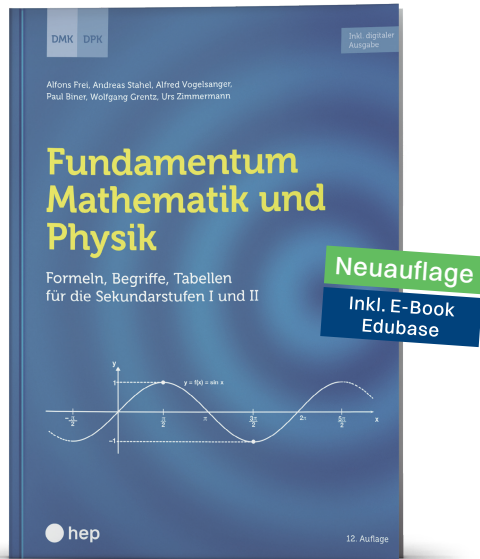
Gassmann F. 2021. <https://www.ngzh.ch/publikationen/vortrage>, Vorträge vom 22. und 29.11.2021.

Gisin N. 2023. Quantum non-locality: from denigration to the Nobel Prize, via quantum cryptography. *Europhysics News* 54/1: 20-23.

SPG 2023: Schweizerische Physikalische Gesellschaft, *Mitteilungen* 69: 9-17.

Uni Erlangen: <https://www.quantumlab.nat.uni-erlangen.de/english/index.html>

# Unsere Empfehlungen für das Schuljahr 2024

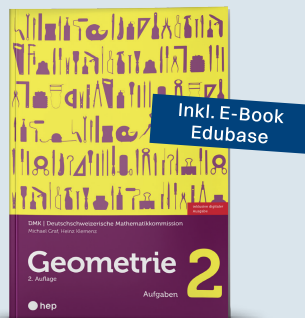


## Fundamentum Mathematik und Physik

Formeln, Begriffe, Tabellen für die Sekundarstufen I und II

ISBN 978-3-0355-2559-5 | CHF 22.-

«Fundamentum» beinhaltet das Grundlagenwissen zu den Fächern Mathematik und Physik. Das Buch bietet Mittelschüler\*innen eine handliche Übersicht. Die Sachverhalte werden dabei nicht nur als Formeln, sondern auch prägnant in Worten festgehalten. Die einzelnen Seiten bilden abgeschlossene Einheiten, was die Benutzerfreundlichkeit zusätzlich erhöht. Die farbige Hinterlegung der Fakten ermöglicht eine rasche Orientierung. Mithilfe von Querverweisen lassen sich Zusammenhänge und Verbindungen innerhalb der Naturwissenschaften erschliessen. Ein ausführliches Stichwortverzeichnis ermöglicht ein schnelles Finden des Gesuchten.

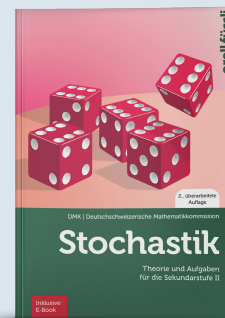


### Aufgaben

ISBN 978-3-0355-2561-8 | CHF 32.-

### Kommentierte Lösungen

ISBN 978-3-0355-2563-2 | CHF 87.-

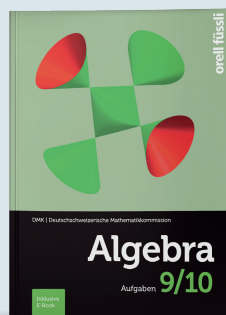


### Theorie und Aufgaben für die Sekundarstufe II

ISBN 978-3-280-04039-3 | CHF 37.-

### Kommentierte Lösungen und Ergänzungen

ISBN 978-3-280-04144-4 | CHF 79.-



### Aufgaben

ISBN 978-3-280-04227-4 | CHF 39.-

### Ergebnisse

ISBN 978-3-280-04228-1 | CHF 45.-



### Aufgaben

ISBN 978-3-280-04200-7 | CHF 39.-

### Ausführliche Lösungen

ISBN 978-3-280-04201-4 | CHF 58.-

### Kombipaket Aufgaben & Lösungen

ISBN 978-3-280-04221-2 | CHF 81.-

Bequem online bestellen  
[hep-verlag.ch](http://hep-verlag.ch)

Fritz Gassmann  
gassmann@bluewin.ch

## Berechnungen zum Artikel über Verschränkung

Im DPK-Teil dieses Bulletins wird ein Artikel der Vierteljahrsschrift 2|2023 der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich zusammengefasst und kommentiert. Dabei stellen sich zwei interessante mathematische Aufgaben betreffend Integration und Optimierung, die hier präsentiert werden.

### a) Integrationsaufgabe

Die Aufgabe ist die Berechnung der Koinzidenzwahrscheinlichkeiten  $p_{00}$  und  $p_{01}$  für die in Abb. 3 dargestellte Apparatur.  $p_{00}$  bedeutet Koinzidenz von Signalen in den Detektoren L0 und R0,  $p_{01}$  in den Detektoren L0 und R1. Die Berechnung soll auf der Basis des *lokal-realistischen* Weltbildes nach der Auffassung Einsteins durchgeführt werden. Man nimmt an, dass beide Photonen vor ihrem Eintritt in die Strahlteiler *dieselbe* zufällige Polarisation  $\xi$  haben, da sie verschränkt sind. Messungen zeigen, dass die Polarisationen von verschränkten Photonen gleichmässig über alle Winkel verteilt sind. Man nimmt deshalb an, dass die ungemessene Polarisation  $\xi$  existiert (realistisch) und homogen verteilt ist. Im polarisierenden Strahlteiler gilt das  $\cos^2$ -Gesetz, das von Etienne Louis Malus bereits um 1810 in Paris entdeckt wurde (vgl. Fussnote). Danach beträgt die Wahrscheinlichkeit  $\cos^2\xi$ , dass ein Photon im Detektor L0 registriert wird. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit  $1-\cos^2\xi = \sin^2\xi$  wird es im Detektor L1 registriert. Der Erwartungswert bei Messung vieler Photonen wird:

$$\langle \cos^2\xi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\xi \, d\xi = \frac{1}{2}$$

Für jedes Photonenpaar mit der gemeinsamen Polarisation  $\xi$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass das linke Photon in L0 und das rechte in R0 registriert wird, gleich dem Produkt der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Nach dem Gesetz von Malus ist die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite  $\cos^2\xi$  und diejenige auf der rechten Seite  $\cos^2(\xi - \alpha)$ , weil die dortige Polarisation um den Winkel  $\alpha$  gedreht wird. Das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten ist die Koinzidenzwahrscheinlichkeit für ein Photonenpaar mit Polarisation  $\xi$ . Der Mittelwert  $p_{00}$  der Koinzidenzwahrscheinlichkeit für viele Photonenpaare, die gleichmässig über alle  $\xi$  im Intervall 0 bis  $2\pi$  verteilt sind, ist gleich dem Erwartungswert  $\langle \cos^2\xi \cos^2(\xi - \alpha) \rangle$ :

$$p_{00} = \langle \cos^2\xi \cos^2(\xi - \alpha) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\xi \cos^2(\xi - \alpha) \, d\xi$$

Dieses Integral lässt sich elegant lösen. Zuerst verwenden wir  $\cos 2\xi = \cos^2\xi - \sin^2\xi$ , addieren auf beiden Seiten  $\cos^2\xi + \sin^2\xi$  und erhalten  $2\cos^2\xi = 1 + \cos 2\xi$ . Damit kann der Integrand umgeschrieben werden in:

$$\cos^2\xi \cos^2(\xi - \alpha) = \frac{1}{4} (1 + \cos 2(\xi - \alpha) + \cos 2\xi + \cos 2\xi \cos 2(\xi - \alpha))$$

Fussnote: **Gesetz von Malus:** Der Vektor  $E$  des elektrischen Feldes bei linear polarisiertem Licht habe den Winkel  $\alpha$  relativ zu einem Polarisator. Dieser lässt nur die Komponente  $E \cos(\alpha)$  passieren. Die Lichtintensität ist proportional zum Quadrat der Feldstärke, deshalb ist der Abschwächungsfaktor  $\cos^2\alpha$  (sog. Gesetz von Malus). Die Intensität ist proportional zum Photonenfluss, also ist die Transmissionswahrscheinlichkeit der Photonen auch gleich  $\cos^2\alpha$ .

Mit den Winkel-Additionstheoremen für die Kosinusfunktion lässt sich der Produktterm in eine Summe umwandeln:

$$\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2 \cos \beta \cos \gamma$$

Wir substituieren  $\beta = 2\xi$  und  $\gamma = 2(\xi - \alpha)$  und erhalten für das gesuchte Integral:

$$p_{00} = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \{2 + 2\cos 2(\xi - \alpha) + 2\cos 2\xi + \cos 2(2\xi - \alpha) + \cos 2\alpha\} d\xi$$

Die drei mittleren Terme ergeben bei der Integration Null und wir erhalten:

$$p_{00} = \frac{1}{8} (2 + \cos 2\alpha)$$

Es ist einfach zu zeigen, dass  $p_{11} = p_{00}$  und  $p_{10} = p_{01}$  sind. Da die Summe aller vier Wahrscheinlichkeiten Eins ergeben muss, kann die Gegenwahrscheinlichkeit sofort bestimmt werden zu  $p_{01} = \frac{1}{2} - p_{00}$ :

$$p_{01} = \frac{1}{8} (2 - \cos 2\alpha)$$

Damit sind alle vier Koinzidenzwahrscheinlichkeiten bestimmt.

## b) Optimierungsaufgabe

Für die Formulierung des Bell-Tests wird das Maximum der folgenden Funktion  $f(\alpha_2, \alpha_3)$  gesucht:

$$f(\alpha_2, \alpha_3) = \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_3 + \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)$$

Wir formen  $\cos^2 \alpha$  wie im Abschnitt a) um und schreiben:

$$f(\alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2} \{ \cos 2\alpha_2 + 1 - (\cos 2\alpha_3 + 1) + \cos 2(\alpha_3 - \alpha_2) + 1 \}$$

Durch die Substitution  $\gamma_i = 2\alpha_i$  erhalten wir:

$$f(\gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos \gamma_2 - \cos \gamma_3 + \cos(\gamma_3 - \gamma_2) \}$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergeben sich die Gleichungen für Extremalstellen:

$$\begin{aligned} -\sin \gamma_2 + \sin(\gamma_3 - \gamma_2) &= 0 \\ +\sin \gamma_3 - \sin(\gamma_3 - \gamma_2) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir  $\sin \gamma_2 = \sin \gamma_3$  und daraus die beiden Lösungen  $\gamma_2 = \gamma_3$  und  $\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_3$ . Die erste Lösung ergibt  $f = 1$  für alle Winkel  $\gamma_2 = \gamma_3$ . Setzen wir die zweite Lösung ins obige Gleichungssystem ein, erhalten wir:

$$\sin \gamma_2 = \sin(180^\circ - 2\gamma_2) = \sin 2\gamma_2 = 2 \sin \gamma_2 \cos \gamma_2$$

Schliessen wir die Lösung  $\gamma_2 = 0$  aus (sie würde mit  $f = 1$  nichts Neues ergeben), können wir durch  $\sin \gamma_2$  dividieren und erhalten  $\cos \gamma_2 = \frac{1}{2}$ , also  $\gamma_2 = 60^\circ$  und  $-60^\circ$ . Daraus folgt  $\gamma_3 = 180^\circ - \gamma_2 = 120^\circ$  und  $240^\circ$ . Da es sich bei den gesuchten Winkeln  $\alpha_i = \gamma_i/2$  um Differenzwinkel zwischen zwei Polarisatorstellungen handelt, sind nur Winkel im Bereich  $[-90^\circ \dots +90^\circ]$  oder  $[0^\circ \dots 180^\circ]$  sinnvoll. Wir ersetzen deshalb die Lösung  $\gamma_3 = 240^\circ$ , die  $-30^\circ$  und  $120^\circ$  für die beiden Winkel  $\alpha_i$  geben würde, durch die äquivalente Lösung  $-120^\circ$ . Die gesuchten Winkel  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  sind also  **$30^\circ$  und  $60^\circ$**  oder  **$-30^\circ$  und  $-60^\circ$** , womit sich das **globale Maximum zu  $f = 5/4$**  ergibt.

Anina Steinlin  
SCNAT, anina.steinlin@scnat.ch

## Berufswahl nach einem Studium der Mathematik, Astronomie oder Physik

*Einen Beruf ausüben, der persönlich erfüllend ist, das Leben finanziert und gleichzeitig einen Mehrwert für die Gesellschaft bietet – das ist für viele Gymnasiast:innen die Idealvorstellung. Ein Studium der Mathematik, Astronomie und Physik (MAP) macht genau das möglich - das zeigen Videoporträts der Plattform MAP der Akademie der Naturwissenschaften (SCNAT).*



Abbildung 1: Von links nach rechts hinterste Reihe: Shiva Farghar, Hanna Wick, Cristina Poretti. Mittlere Reihe: Anne-Thérèse Morel, Stefanie Tanadini-Lang, Valerie Koller. Vorderste Reihe: Silvia Steila, Barbara Schaffner, Emanuelle Giacometti.

Die Karrieren von zwölf Frauen, die in den Videoporträts aufgezeigt werden, sind Beispiele für Berufswege die sich nach einem Studium in den MAP-Bereichen öffnen. Dies soll besonders Gymnasiastinnen motivieren, ein entsprechendes Studium zu wählen.

### Im Einsatz für die Gesellschaft sein

Stephanie Tanadini-Lang ist die leitende Medizinphysikerin am Universitätsspital Zürich. Sie und ihr Team planen die Bestrahlung von Krebspatient:innen und forschen, wie man die Behandlungen noch effizienter und ärmer an Nebenwirkungen machen kann. «In unserer alternden Gesellschaft hat die Krebstherapie einen wichtigen Stellenwert», führt Tanadini-Lang aus. Immer mehr Menschen erkranken einmal im Leben an Krebs und sind auf entsprechende Behandlung angewiesen.

Die Nationalrätin Barbara Schaffner hat ebenfalls einen Hintergrund in Medizinphysik, setzt sich aber heute vor allem fürs Klima ein. Sie vertritt die Anliegen ihrer Wähler:innen im nationalen Parlament. «Dank einem

Doktorat, Anstellung in einem KMU, einer Weiterbildung in Energiewissenschaften und der Gründung eines eigenen Unternehmens «bringe ich Lebenserfahrungen aus verschiedenen Bereichen mit», erklärt sie. Cristina Poretti leitet das Team Messungen in der Nationalen Alarmzentrale. Sie ist dafür zuständig, dass das Messnetz für Radioaktivität in der Schweiz tadellos funktioniert. Bei einem nuklearen Ereignis verfügen die Behörden so über korrekte Angaben zur radioaktiven Aktivität in der ganzen Schweiz. Ihr Einsatz für die Bevölkerung findet die Tesserin «Eine schöne Sache.»

## Komplexe Systeme verstehen

Silvia Steila arbeitet im Post Price Ticketing bei der SBB. Post Price bedeutet, dass der Preis für eine zurückgelegte Strecke erst am Ende der Reise berechnet wird – wie etwa beim System FAIRTIQ. Der Mathematikerin kommt ihre Fähigkeit und ihr Durchhaltewille, komplexe Systeme im Detail zu verstehen, zu Gute um das bestehende Angebot zu verbessern. «In der Mathematik lernt man, ein Problem logisch zu analysieren und eine einfache Lösung zu finden – Mathematiker wollen elegante Lösungen.»

Auch Shiva Farghar, Astrophysikerin, liebt es an Problemen zu knobeln. «Manchmal erwache ich in der Nacht mit Ideen, weil ich ein Problem unbedingt lösen will.» Sie ist Data Science Consultant – ihre Kunden wollen aus gesammelten Daten Erkenntnisse gewinnen und Mehrwert generieren und holen sich dazu Unterstützung durch Farghar.

## Kreativität und Weltoffenheit ausleben

Emmanuelle Giacometti hat ein Doktorat in Materialphysik und leitet den «Espaces des Inventions» in Lausanne. Sie und ihr Team überlegen sich immer wieder neu, wie sie wissenschaftliche Themen an die Öffentlichkeit vermitteln. «Es verlangt Kreativität und Ideen, unser Publikum für Wissenschaft, Technik und Kultur zu begeistern.»

Valerie Koller arbeitet seit dem Abschluss ihres Mathematik- und Astronomiestudiums als wissenschaftliche Beraterin im Swiss Space Office. Sie ist zuständig für die Forschungsförderung der Weltraumwissenschaften und besucht dafür die Hochschulen und Universitäten in der Schweiz und «da wir mit der ESA zusammenarbeiten, bin ich sehr oft im Ausland unterwegs für Meetings und Workshops.», so Koller.

## Die nächste Generation ausbilden und ermutigen

Nach dem Physikstudium und einer Karriere als Wissenschaftsjournalistin hat sich Hanna Wick entschlossen, vor ein kleineres Publikum zu wechseln. Heute unterrichtet sie Mathematik am Gymnasium Uetikon. Sie ist mit viel Herzblut Lehrerin. «Ich mag es, die Jugendlichen in dieser Zeit zu begleiten. Sie geben einen wahn-sinnig viel zurück.» Sie will, dass ihre Schüler:innen wissbegierig bleiben und ihnen zeigen, dass das mathematische Denken und Knobeln, sehr befriedigend sein kann.

Anne-Thérèse Morel ist seit über dreissig Jahren in der Informatikbranche tätig und heute Head Capability Management bei Swisscom. Sie verantwortet die Digitalisierung der Geschäftskunden des Unternehmens. Sie wusste bereits als Kind, dass sie Mathematik studieren will. Nach ihrem Doktorat in numerischer Mathematik und dem Einstieg in die Informatik war sie oft die einzige Frau im Team. Heute achtet sie sehr auf eine diverse Zusammensetzung in ihren Teams und «Was mir heute wichtig ist, ist, dass ich ein Vorbild für die Generationen nach mir sein kann.»

## Ausblick

Die Videos und Texte entstehen in Zusammenarbeit mit dem Wissenschaftsjournalisten Benedikt Vogel. Folgende Porträts werden noch bis im Sommer 2024 veröffentlicht.

- Martina Nieswand – Physikerin und Patentanwältin bei Hepp Wenger Ryffel
- Stefanie Hayoz – Statistikerin und Head of Statistics bei der Schweizerischen Arbeitsgemeinschaft für klinische Krebsforschung
- Miriam Gantert – Physikerin und Managing Partner bei Superloop Innovations

Mit den abgebildeten QR-Codes gelangen Sie direkt zur Übersichtsseite mit allen Porträts.



Abbildung 2: Direkt zu den Porträts

Willi Botta  
willi.botta@solnet.ch

# Ein einfacher Weg zu allen pythagoreischen Zahlentripeln

## 1. Einleitung

Im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras treten pythagoreische Zahlentripel (PZT) auf, das heisst aus natürlichen Zahlen bestehende Tripel  $(a, b, c)$  mit der Eigenschaft  $a^2 + b^2 = c^2$ . Beispiele wie  $(3, 4, 5)$  oder  $(5, 12, 13)$  sind wohlbekannt, und irgendwann wird die Frage auftreten, wie viele derartige Tripel existieren und ob es für sie Bildungsgesetze gibt. Die übliche Antwort darauf ist ein Hinweis auf die „indischen Formeln“: Man wähle zwei teilerfremde natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ ,  $m > n$ , die eine gerade, die andere ungerade. Setzt man nun  $a := m^2 - n^2$ ,  $b := 2mn$ ,  $c := m^2 + n^2$ , so ist  $(a, b, c)$  ein primitives pythagoreisches Zahlentripel, wie man leicht überprüfen kann. Primitiv bedeutet, dass der grösste gemeinsame Teiler der drei Zahlen eins ist. Es lässt sich auch zeigen, dass jedes primitive PZT mit diesem Bildungsgesetz erzeugt werden kann. Alle PZT erhalten wir, indem wir die primitiven PZT noch mit einem konstanten Faktor  $k \in \mathbb{N}$  multiplizieren.

Diese Regel ist nicht besonders einfach, und eine andere Frage, wie sich alle PZT, nicht nur die primitiven, auf einfache Art in einer eindeutigen Reihenfolge erzeugen und anordnen lassen, lässt sich damit kaum beantworten.

## 2. Herleitung eines Bildungsgesetzes

Die folgenden Überlegungen sind so einfach, dass sie auch im Unterricht bereits nach der Einführung des Satzes von Pythagoras vermittelt werden könnten. Wir gehen von einer Zeichnung aus mit Quadraten von den Seitenlängen  $a, b, c$  und achten darauf, dass gilt  $a < b < c$ ,  $a + b > c$ .

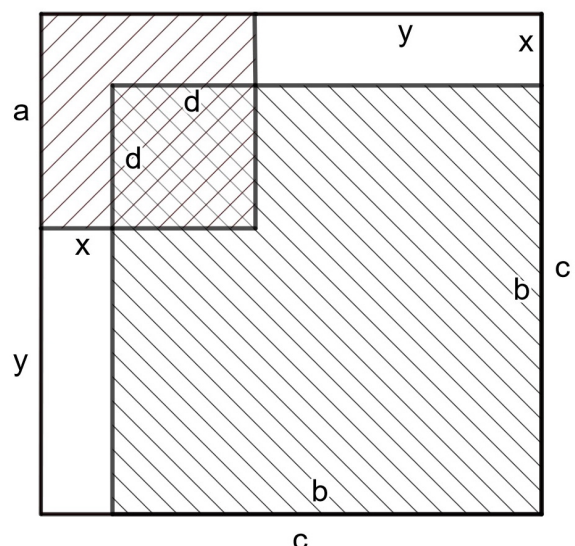
Die beiden kleineren Quadrate überschneiden sich in einem Quadrat der Seitenlänge  $d$ .

Dabei lassen sich direkt aus der Figur folgende Beziehungen ablesen:

$$\begin{aligned} a &= d + x, & b &= d + y, \\ c &= d + x + y = a + y = b + x, \end{aligned}$$

oder in umgekehrter Richtung:

$$\begin{aligned} x &= c - b, & y &= c - a, \\ d &= c - x - y = c - (c - b) - (c - a) = a + b - c \end{aligned}$$



Jedem Zahlentripel  $(d, x, y)$  lässt sich somit eindeutig ein Tripel  $(a, b, c)$  zuordnen und umgekehrt.

Zum gesuchten Bildungsgesetz für pythagoreische Zahlentripel gelangen wir, indem wir den Flächeninhalt des grössten Quadrates mit der Seitenlänge  $c$  durch Teilflächen ausdrücken:

$$c^2 = a^2 + b^2 + (2xy - d^2)$$

$(a, b, c)$  ist genau dann ein (für  $x < y$  geordnetes) pythagoreisches Zahlentripel, wenn der Klammerausdruck gleich Null ist, das heisst, wenn gilt:  $xy = \frac{1}{2}d^2$ .

Dabei sind alle hier vorkommenden Variablen natürliche Zahlen.

Nun können wir zu jeder geraden Zahl  $d$  alle möglichen Paare  $(x, y)$  bestimmen,  $x < y$ , und daraus gemäss obigen Beziehungen  $a, b$  und  $c$  berechnen, etwa mit Hilfe einer Tabelle. Wenn  $x$  und  $y$  teilerfremd sind, entstehen primitive Zahlentripel, welche durch **Fettdruck** hervorgehoben sind:

$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$x$	$y$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = a + y$
2	2	1	2	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
4	8	1	8	<b>5</b>	<b>12</b>	<b>13</b>
4	8	2	4	6	8	10
6	18	1	18	<b>7</b>	<b>24</b>	<b>25</b>
6	18	2	9	<b>8</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
6	18	3	6	9	12	15
8	32	1	32	<b>9</b>	<b>40</b>	<b>41</b>
8	32	2	16	10	24	26
8	32	4	8	12	16	20
10	50	1	50	<b>11</b>	<b>60</b>	<b>61</b>
10	50	2	25	<b>12</b>	<b>35</b>	<b>37</b>
10	50	5	10	15	20	25
12	72	1	72	<b>13</b>	<b>84</b>	<b>85</b>
12	72	2	36	14	48	50
12	72	3	24	15	36	39
12	72	4	18	16	30	34
12	72	6	12	18	24	30
12	72	8	9	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>29</b>
14	98	1	98	<b>15</b>	<b>112</b>	<b>113</b>
14	98	2	49	<b>16</b>	<b>63</b>	<b>65</b>
14	98	7	14	21	28	35
16	128	1	128	<b>17</b>	<b>144</b>	<b>145</b>
16	128	2	64	18	80	82
16	128	4	32	20	48	52
16	128	8	16	24	32	40
18	162	1	162	<b>19</b>	<b>180</b>	<b>181</b>
18	162	2	81	<b>20</b>	<b>99</b>	<b>101</b>

### 3. Geometrische Bedeutung von $d$

Zerlegt man ein beliebiges Dreieck in drei Teildreiecke, indem man die Verbindungsstrecken vom Inkreismittelpunkt zu den drei Eckpunkten einzeichnet, erhält man folgende Flächenformel für das ganze Dreieck, wobei  $\rho$  den Radius des Inkreises bezeichne:  $A = \frac{\rho(a+b+c)}{2}$ .

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  gilt folglich für den doppelten Flächeninhalt

$$2A = ab = \rho(a + b + c)$$

$$\text{Daraus folgt } \rho = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2} = \frac{d}{2}$$

Unter  $d$  kann man sich somit den Durchmesser des Inkreises vorstellen, und vom Inkreisradius ausgehend ist Anna Maria Fraedrich auf anderem Weg zu ähnlichen Erkenntnissen gelangt, wie beispielsweise in der Zeitschrift „MU, der Mathematikunterricht“, Heft 6/1987 nachzulesen ist.

### 4. Zahlentripel mit konstanter Kathete von ungerader Seitenlänge

Es dürfte schwierig sein, alle PZT mit derselben Hypotenuse  $c$  zu bestimmen. Hingegen ist es gut möglich, alle Tripel mit einer bestimmten Kathete zu ermitteln. Das Verfahren für eine ungerade Seitenlänge einer Kathete soll hier am Beispiel von  $a = 45$  dargestellt werden. Dann muss  $d$  eine gerade Zahl kleiner als 45 sein, und  $x = a - d$  darf als Teiler von  $\frac{1}{2}d^2$  keinen Primfaktor enthalten, der nicht auch in  $d$  vorkommt. Wenn aber  $x$  und  $d$  denselben Primfaktor enthalten, kommt dieser auch in der Summe  $a$  dieser Zahlen vor.  $x$  muss folglich aus Primfaktoren von  $a$  zusammengesetzt sein. In unserem Beispiel gilt  $a = 45 = 3^2 \cdot 5$ , andere Primfaktoren als 3 oder 5 kommen nicht in Frage. Bei dieser Problemstellung darf die Kathete  $a$  grösser als  $b$  sein. Mindestens eine Lösung gibt es mit  $x = 1$  in jedem Fall.

$x$	$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$y = \frac{d^2}{2x}$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = b + x$
1	44	968	968	<b>45</b>	<b>1'012</b>	<b>1'013</b>
3	42	882	294	45	336	339
5	40	800	160	45	200	205
$9 = 3^2$	36	648	72	45	108	117
$15 = 3 \cdot 5$	30	450	30	45	60	75
$25 = 5^2$	20	200	8	<b>45</b>	<b>28</b>	<b>53</b>
$27 = 3^3$	18	162	6	45	24	51

Würden wir für  $a$  anstelle von 45 eine ungerade Primzahl  $p$  einsetzen, könnte  $x$  nur den Wert 1 annehmen, weil  $p$  definitionsgemäss nur die Teiler 1 und  $p$  hat. Damit ergibt sich unmittelbar der folgende

**Satz: Zu jeder Kathete, deren Seitenlänge eine ungerade Primzahl ist, existiert genau ein rechtwinkliges pythagoreisches Dreieck, und zwar eines, bei dem die Hypotenuse um eine Längeneinheit grösser ist als die andere Kathete.**

In diesem Zusammenhang lässt sich eine bemerkenswerte Gesetzmässigkeit beim Umfang derartiger Dreiecke entdecken. Wenn sich die Längen einer Kathete und der Hypotenuse nur um eins unterscheiden, muss man den Umfang nicht durch Addition der drei Seitenlängen ermitteln, sondern kann ihn durch eine sehr einfache Multiplikation direkt aus der gewählten ungeraden Kathetenlänge bestimmen. Experimentieren, eine einfache Formel vermuten und beweisen ist nicht schwierig.

## 5. Zahlentripel mit konstanter Kathete von gerader Seitenlänge

Wenn  $a$  und  $d$  gerade Zahlen sind, gilt dies natürlich auch für  $x$ . Wir gehen gleich vor wie oben und wählen als Beispiel  $a = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ .

$x$	$d$	$\frac{1}{2}d^2$	$y = \frac{d^2}{2x}$	$a$	$b$	$c$
2	124	7'688	3'844	126	3'968	3'970
$6 = 2 \cdot 3$	120	7'200	1'200	126	1'320	1'326
$14 = 2 \cdot 7$	112	6'272	448	126	560	574
$18 = 2 \cdot 3^2$	108	5'832	324	126	432	450
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$	84	3'528	84	126	168	210
$54 = 2 \cdot 3^3$	72	2'592	48	126	120	174
$98 = 2 \cdot 7^2$	28	392	4	126	32	130

Hier fällt auf, dass keines der Tripel  $(a, b, c)$  primitiv ist. Diese Erkenntnis lässt sich verallgemeinern und gilt für alle Katheten einer Seitenlänge  $a$ , welche das Doppelte einer ungeraden Zahl ist. Handelt es sich bei dieser ungeraden Zahl um eine Primzahl, gibt es nur ein PZT, und zwar dasjenige, bei dem die Hypotenuse um 2 grösser ist als die andere Kathete.

Damit eine Kathete mit gerader Seitenlänge zu einem primitiven PZT gehören kann, muss sie somit mindestens durch 4 teilbar sein. Diese Erkenntnis hätten wir auch aus den in der Einleitung erwähnten indischen Formeln gewinnen können, denn dort ist die gerade Kathete von der Form  $b = 2mn$  mindestens durch 4 teilbar, weil ja nach Voraussetzung einer der Faktoren  $m$  oder  $n$  gerade sein muss. Vielleicht hat eine Leserin oder ein Leser an einem verregneten Nachmittag Lust, Katheten zu suchen, welche in möglichst vielen pythagoreischen Dreiecken vorkommen. Katheten mit der Seitenlänge 180 beispielsweise kommen in mehr als zwanzig PZT vor, wovon vier sogar primitiv sind.

## 6. Fast gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke

Wir wenden uns nun den speziellen PZT zu, bei denen sich die Katheten  $a$  und  $b$ , somit auch  $x$  und  $y$  nur um 1 unterscheiden. Im gleichen Artikel wie oben erwähnt zeigt die Autorin, dass man durch fortgesetzte

Multiplikation des als Vektor aufgefassten Urtripels  $(3 \ 4 \ 5)$  mit der Matrix  $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  alle PZT mit dieser Eigenschaft erhält. Die folgende Methode ist zwar weniger elegant, setzt aber nur elementare Mathematikkenntnisse voraus:

Da  $x$  und  $y$  als aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind und ihr Produkt  $xy = \frac{1}{2}d^2$  ist, muss einer der Faktoren eine ungerade Quadratzahl, der andere Faktor die Hälfte einer geraden Quadratzahl sein. Wir bezeichnen im Folgenden  $x$  als den ungeraden,  $y$  als den geraden Faktor, auch wenn  $x$  grösser als  $y$  ist. Wir setzen  $x = u^2$ ,  $y = \frac{1}{2}g^2$ , wobei  $u$  für eine ungerade,  $g$  für eine gerade Zahl steht. Wegen  $xy = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}u^2g^2 = \frac{1}{2}(ug)^2$  erkennt man leicht, dass  $d = ug$  ist.

Wir finden die ersten Zahlenpaare  $(x, y)$ , indem wir ungerade Quadratzahlen suchen, die sich um genau 1 von der Hälfte einer geraden Quadratzahl unterscheiden. Dies ist erstmals der Fall bei den Quadraten von 1, 3, 7 und 17. So stossen wir auf die Paare  $(x, y) = (1, 2), (9, 8), (49, 50), (289, 288)$ . Wieder ist es hilfreich, diese Erkenntnisse in einer Tabelle zusammenzustellen:

$u$	$g$	$d = ug$	$x = u^2$	$y = \frac{1}{2}g^2$	$a = d + x$	$b = d + y$	$c = a + y$
1	2	2	1	2	3	4	5
3	4	12	9	8	21	20	29
7	10	70	49	50	119	120	169
17	24	408	289	288	697	696	985
41	58	2'378	1'681	1'682	4'059	4'060	5'741
99	140	13'860	9'801	9'800	23'661	23'660	33'461
239	338	80'782	57'121	57'122	137'903	137'904	195'025
577	816	470'832	332'929	332'928	803'761	803'760	1'136'689
1'393	1'970	2'744'210	1'940'449	1'940'450	4'684'659	4'684'660	6'625'109

Bereits nach den vier ersten Zahlenpaaren  $(u, g)$  lassen sich in den ersten beiden Spalten rekursive Bildungsgesetze fast nicht übersehen, beispielsweise in der Form:

$$(A) \quad u_{n+1} = u_n + g_n, \quad g_{n+1} = 2u_n + g_n = u_n + u_{n+1}$$

Mit diesen noch unbewiesenen Beziehungen ist obige Tabelle weitergeführt worden, und die Tatsache, dass damit tatsächlich Zahlentripel mit der gewünschten Eigenschaft entstehen, bestätigt das vermutete Bildungsgesetz. Dabei scheint die Gesetzmässigkeit zu gelten, dass alternierend  $x = y - 1$  resp.  $x = y + 1$  ist.

Um das Bildungsgesetz (A) zu beweisen, nehmen wir an, für ein beliebiges Zahlenpaar  $(u_n, g_n)$  gelte

$u_n^2 - \frac{g_n^2}{2} = \pm 1$ . Dann folgt nach (A):

$$(u_{n+1})^2 - \frac{(g_{n+1})^2}{2} = (u_n + g_n)^2 - \frac{(2u_n + g_n)^2}{2} = u_n^2 + 2u_n g_n + g_n^2 - 2u_n^2 - 2u_n g_n - \frac{g_n^2}{2} = -\left(u_n^2 - \frac{g_n^2}{2}\right) = \mp 1$$

Wir können (A) auch umformen und rückwärts rechnen:

$$(A') \quad u_{m-1} = g_m - u_m, \quad g_{m-1} = 2u_m - g_m$$

Damit beweisen wir indirekt, dass keine „fremden“ Paare  $(u_n, g_n)$  existieren, die mit unserem Verfahren nicht gefunden werden. Denn gäbe es solche, müsste es unter ihnen ein erstes  $(u_k, g_k)$  geben, das nicht in obiger Tabelle oder ihrer Fortsetzung vorkommt. Dann könnten wir aber gemäss (A') ein Vorgängerpaar  $(u_{k-1}, g_{k-1})$  bilden – im Widerspruch zur Voraussetzung,  $(u_k, g_k)$  sei das erste dieser fremden Paare.

Als willkommener Nebeneffekt liefern nicht nur die Quotienten  $\frac{c}{a}$  und  $\frac{c}{b}$ , sondern bereits  $\frac{g_n}{u_n}$  gute Näherungswerte für  $\sqrt{2}$ .

Für  $u_n$  und  $g_n$  existieren sogar explizite Bildungsgesetze, die an solche bei Fibonacci-Folgen erinnern, nur dass dort Ausdrücke mit der Quadratwurzel aus 5 und hier mit derjenigen aus 2 eine entscheidende Rolle spielen:

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right], \quad g_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right].$$

Wer jetzt noch ein wenig weiterrechnen mag, kann bei diesen Dreiecken einen überraschenden Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Inkreisdurchmesser entdecken. Zum Beweis genügt es, in der n-ten Zeile die Seitenlängen  $a_n, b_n$  und  $c_n$  durch  $u_n$  und  $g_n$  ausdrücken.



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

## **Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2024**

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hauptgebäude der ETH Zürich im Raum HG G 19.1 statt.

### **Donnerstag, 24. Oktober 2024**

Simulation dynamischer Systeme im Unterricht  
**Hermann Biner**

### **Donnerstag, 7. November 2024**

Vektorgeometrie mit Computer – neue Algorithmen für alte Probleme  
**Walter Gander (ETH Zürich)**

### **Donnerstag, 21. November 2024**

Die Geometrie der Kombinatorik: eine Dreiecksrhapsodie  
**Emanuele Delucchi (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana)**

### **Donnerstag, 5. Dezember 2024**

tba  
**Sarah Zerbes (ETH Zürich)**

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, D. Komm, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:  
[math.ch/mathematics@school](mailto:math.ch/mathematics@school)

Georg Keller  
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

# Erstaunliche Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- resp. Potenzsummen (Teil 1)

## Einleitung

Vor etwa einem Jahr liess ich mich beim Lesen der ersten Seiten des Buches „Combinatorial Geometry“ [1] dazu anregen, mir einige wesentliche algebraische Eigenschaften von  $\mathbb{Z}_n$  nicht nur wieder einmal vor Augen zu führen, sondern - im Sinne einer sportlichen Herausforderung - auch deren Richtigkeit zu beweisen, und zwar möglichst ohne Beizug von Hilfsmitteln. Damit nahm ich natürlich in Kauf, ggf. auf ineffiziente, nicht standardmässig begangene Wege durch  $\mathbb{Z}_n$  zu gelangen. Genau auf diese Weise aber stiess ich auf die folgende, unerwartete Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- und Potenzsummen:

Satz: Für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , gilt:

- $n$  ist prim  $\Leftrightarrow$  für alle  $1 \leq k \leq (n-2)$  ist  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$  teilbar durch  $n$  (1)
- $n$  ist prim  $\Leftrightarrow$  für alle  $1 \leq k \leq (n-2)$  ist  $\sum_{i=1}^{n-1} i^k$  teilbar durch  $n$  (2)

Dieser Satz war in meinem mathematischen Umfeld unbekannt, und auch eine (zugegebenermassen nicht allzu intensive) Literaturrecherche förderte keine entsprechende Publikation zutage. Weil es vielleicht Bulletin-Leser gibt, die an (1) interessiert sind, wird in diesem Bulletin-Beitrag - nach einer algebraischen Vorbereitung - ein kurzer Beweis von (1) dargelegt. An (2) Interessierte müssen sich noch etwas gedulden, denn der Beweis von (2) - bei welchem die Beweisrichtung „ $\Leftarrow$ “ etwas aufwendiger ist - wird aus Platzgründen erst in einem späteren, separaten Bulletin-Beitrag erscheinen.

## Algebraische Vorbereitung für den Beweis von (1)

Im Hinblick auf den Beweis von (1) listen wir in diesem Abschnitt einige lehrbuchmässige, elementare algebraische Aspekte von  $\mathbb{Z}_n$  auf, jeweils ohne Beweis.

Mit  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$  bezeichnen wir die Menge der Restklassen modulo  $n \in \mathbb{N}$  und mit  $\mathbb{Z}_n^+ := \{1, 2, \dots, (n-1)\}$  die Menge der positiven Restklassen modulo  $n$ . Den trivialen Fall  $n=1$  mit  $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$  und  $\mathbb{Z}_1^+ = \emptyset$  ausklammernd, beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall  $n \geq 2$ . Im wichtigen Spezialfall, wo  $n$  eine Primzahl ist, werden wir (wenn sinnvoll möglich) jeweils  $p$  statt  $n$  schreiben, z.B. also  $\mathbb{Z}_p$  statt  $\mathbb{Z}_n$ . Und der Kürze halber werden wir statt  $a \equiv b \pmod{n}$  nur  $a =_n b$  schreiben.

Mit der üblichen Addition und Multiplikation (und wie erwähnt für  $n \geq 2$ ) wird  $\mathbb{Z}_n$  ein kommutativer Ring mit Eins,  $\mathbb{Z}_p$  ein endlicher Körper und  $\mathbb{Z}_p^+$  eine multiplikative kommutative Gruppe. Eine berühmte, in  $\mathbb{Z}_p^+$  geltende Tatsache ist der Kleine Satz von Fermat:  $a^{p-1} =_p 1$ , für alle  $a \in \mathbb{Z}_p^+$ .

Mit  $\mathbb{Z}_n[X]$  bezeichnen wir den Polynomring über  $\mathbb{Z}_n$ , d.h. den Ring der Polynome  $P(X) = \sum_{j=0}^r c_j X^j$  mit  $c_j \in \mathbb{Z}_n$  und  $c_r \neq 0$  (ausser beim Null-Polynom mit  $r = c_r = 0$ ), wobei die Polynomaddition, -multiplikation und -auswertung als Rechenoperationen in  $\mathbb{Z}_n$ , d.h. mod  $n$ , definiert sind, ohne dies aber schreiberisch

speziell kenntlich zu machen.  $c_r$  ist der sogenannte Leitkoeffizient von  $P$ , und  $\deg(P) = r$ . In  $\mathbb{Z}_p[X]$  gilt u.a.:

- Falls ein Polynom  $P \in \mathbb{Z}_p[X]$  mit  $r \equiv \deg(P) \geq 1$  und Leitkoeffizient  $c_r$  genau  $r$  unterschiedliche Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{Z}_p$  hat, so ist  $P(X) = c_r \cdot (X - x_1) \cdot (X - x_2) \cdots (X - x_r)$ . (3)
  - Es seien  $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}_p[X]$  mit  $\deg(P_{1,2}) \leq p - 1$ . Falls  $P_1(x) = P_2(x)$ , für alle  $x \in \mathbb{Z}_p$ , stimmen die Koeffizienten von  $P_1$  mit denjenigen von  $P_2$  überein. (4)
- (Anmerkung: Die Bedingung  $\deg(P_{1,2}) \leq p - 1$  ist wesentlich, denn andernfalls gibt's aufgrund des Kleinen Satzes von Fermat Gegenbeispiele zu (4), so z.B.  $P_1(X) = X^p$  und  $P_2(X) = X$ .)

## Beweis von (1)

„ $\Rightarrow$ “ Es sei also  $n$  eine beliebige Primzahl  $p \geq 3$ . Wir betrachten das Polynom  $X^{p-1} + ((-1) \bmod p) \in \mathbb{Z}_p[X]$ , wobei wir der Einfachheit halber ab jetzt das explizite „mod  $p$ “ weglassen und nur noch  $X^{p-1} - 1$  schreiben (und damit keinen Fehler begehen, denn in  $\mathbb{Z}_p[X]$  sind ja alle Rechenoperationen sowieso nur modulo  $p$  gemeint).  $X^{p-1} - 1$  hat den Grad  $(p - 1) \geq 2$ , den Leitkoeffizienten 1 und, aufgrund des Kleinen Satzes von Fermat, in  $\mathbb{Z}_p$  die  $p - 1$  unterschiedlichen Nullstellen  $1, 2, 3, \dots, (p - 1)$ . Gemäss (3) kann unser Polynom wie folgt in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$X^{p-1} - 1 = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdots (X - (p - 1)) \tag{5}$$

Auf der rechten Seite von (5) lösen wir die Klammern auf und erhalten

$$\begin{aligned} X^{p-1} - 1 &= X^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} X^{p-1-k} \cdot [(-1)^k \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k] + (-1)^{p-1} \cdot (p - 1)! \end{aligned} \tag{6}$$

Die linke Seite von (6)  $P_1(X)$  nennend und die rechte Seite  $P_2(X)$ , mit  $\deg(P_{1,2}) = p - 1$ , besagt (6), dass  $P_1(x) = P_2(x)$  ist,  $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ ; gemäss (4) stimmen daher die (wie erwähnt mod  $p$  zu verstehenden) Koeffizienten von  $P_1$  mit denjenigen von  $P_2$  überein, insbesondere gilt also (1). ■

Anmerkungen:

- Den obigen Koeffizientenvergleich auch noch für die Koeffizienten von  $X^0$  durchführend, erhalten wir die ergänzende Aussage  $(-1)^{p-1} \cdot (p - 1)! =_{\mathbb{Z}_p} -1$ , d.h., weil  $p - 1$  eine gerade Zahl ist, die Aussage  $(p - 1)! =_{\mathbb{Z}_p} -1$ , was (bis auf die Einschränkung  $p \geq 3$ ) die eine Hälfte des Satzes von Wilson [2] ist.

- Für den Spezialfall  $k =$  ungerade gibt es noch einen direkteren Beweis von (1): Es ist ja  $(p - 1) =_{\mathbb{Z}_p} -1$ ,  $(p - 2) =_{\mathbb{Z}_p} -2$ , etc.; daher folgt für  $k = 1$ , dass

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq p-1} i_1 =_{\mathbb{Z}_p} 1 + 2 + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right) + \left(-\frac{p-1}{2}\right) + \dots + (-2) + (-1) = 0$$

ist. Und für  $k \geq 3$  schreiben wir zuerst die Summe  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$  kompakter als  $\sum_{\vec{i} \in M} \prod_{j=1}^k i_j$ , mit  $M := \{(i_1, i_2, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p - 1\}$ . Die Menge  $M$  ist die disjunkte Vereinigung der Mengen  $M_1 := \{\vec{i} \in M \mid i_{\frac{k+1}{2}} \leq \frac{p-1}{2}\}$  und  $M_2 := \{\vec{i} \in M \mid i_{\frac{k+1}{2}} > \frac{p-1}{2}\}$ . Die Abbildung  $S: M_1 \rightarrow M_2$  und umgekehrt mit  $S(\vec{i}) := ((p - i_k), (p - i_{k-1}), \dots, (p - i_2), (p - i_1))$  ist, wegen  $S^2(\vec{i}) = \vec{i}$ , eine bijektive Abbildung  $M_1 \leftrightarrow M_2$ , und daher gilt:

$$\sum_{\vec{i} \in M} \prod_{j=1}^k i_j = \sum_{\vec{i} \in M_1} \prod_{j=1}^k i_j + \sum_{\vec{i} \in M_2} \prod_{j=1}^k i_j = \sum_{\vec{i} \in M_1} \left[ \prod_{j=1}^k i_j + \prod_{j=1}^k (S(\vec{i}))_j \right] \tag{7}$$

Anhand von  $\prod_{j=1}^k (S(\bar{i}))_j = \prod_{j=1}^k (p - i_j) =_p (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^k i_j$  erhalten wir via (7)

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k =_p \sum_{\bar{i} \in M_1} [\prod_{j=1}^k i_j + (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^k i_j] ,$$

wobei  $\prod_{j=1}^k i_j + (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^k i_j = 0$  ist, weil  $k$  ungerade ist.

„ $\Leftarrow$ “ •  $n$  ist also eine beliebige natürliche Zahl mit  $n \geq 3$ , welche die in (1) genannte Voraussetzung für die Beweisrichtung „ $\Leftarrow$ “ erfüllt. Wir betrachten das folgende Polynom  $Q \in \mathbb{Z}_n[X]$  :

$$Q(X) := \sum_{k=1}^{n-2} X^{n-1-k} \cdot [((-1)^k \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k) \bmod n] \quad (8)$$

Wiederum das explizite „mod  $n$ “ nebenwirkungsfrei weglassend und inspiriert durch (5), (6) schreiben wir (8) wie folgt um:

$$Q(X) = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdots (X - (n - 1)) - X^{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot (n - 1)! \quad (9)$$

Gemäss der in (1) genannten Voraussetzung und (8) ist  $Q(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{Z}_n$ . Insbesondere ist also  $Q(1) = 0$ , was via (9) mit  $x = 1$  zu  $0 =_n 0 - 1^{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot (n - 1)!$  führt, d.h. zur Aussage, dass diejenigen  $n$ , welche die in (1) genannte Voraussetzung erfüllen, die folgende Eigenschaft besitzen:

$$(n - 1)! =_n (-1)^n \quad (10)$$

• Jetzt zeigen wir noch, dass alle *zusammengesetzten* Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , die spezielle Eigenschaft (10) *nicht* besitzen, d.h.  $n$  muss prim sein, womit unser Beweis beendet sein wird: Wie in [2] gezeigt, kann man z.B. für alle zusammengesetzten Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , den Term  $(n - 1)! \bmod n$  in einfacher Weise direkt berechnen, wobei man jeweils ein Resultat erhält, welches offensichtlich nicht mit (10) übereinstimmt:

- Falls  $n = 4$  ist: Dann ist  $(n - 1)! = 6$ , und daher ist  $(n - 1)! =_n 2$ .
- Falls  $n \geq 6$  ist:
  - Wenn  $n \neq$  Quadratzahl : Weil  $n$  weder prim noch eine Quadratzahl ist, gibt es zwei Zahlen  $n_1 < n_2$  in  $\mathbb{Z}_n^+$  mit  $n_1 \cdot n_2 = n$ .  $n_1, n_2$  sind sicherlich zwei der insgesamt  $n - 1$  Faktoren des Produktes  $(n - 1)!$ , d.h. das Produkt  $(n - 1)!$  ist ein Vielfaches von  $n_1 \cdot n_2 = n$ , d.h.  $(n - 1)! =_n 0$ .
  - Wenn  $n =$  Quadratzahl : Dann gibt es eine Zahl  $q \in \mathbb{Z}_n^+$  mit  $q^2 = n$ . Weil  $n > 4$  ist, ist  $q > 2$  und daher  $2q < q \cdot q = n$ , d.h. auch  $2q \in \mathbb{Z}_n^+$ . Daher treten die zwei Zahlen  $q$  und  $2q$  als Faktoren im Produkt  $(n - 1)!$  auf, welches damit ein Vielfaches ist von  $q^2 = n$ , d.h.  $(n - 1)! =_n 0$ . ■

Anmerkung: Wir weisen noch darauf hin, dass es für die Richtigkeit der Behauptung

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k \text{ ist teilbar durch } n, \\ \text{für alle } 1 \leq k \leq (n - 2), \text{ wobei } n \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow n \notin 2\mathbb{N} ,$$

welche ja eine Teilaussage von (1) ist, einen viel direkteren Beweis gibt: Wegen  $(n - 1) =_n -1$ ,  $(n - 2) =_n -2$ , etc., können wir für  $n \in 2\mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , und für  $k = 1$  die Summe  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$  bequem mod  $n$  berechnen und erkennen, dass diese Summe sicherlich nicht durch  $n$  teilbar ist:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 \leq n-1} i_1 =_n 1 + 2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2}\right) \\ + \left(-\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + \dots + (-2) + (-1) =_n \frac{n}{2} \neq_n 0 \end{aligned}$$

## Ergänzungen

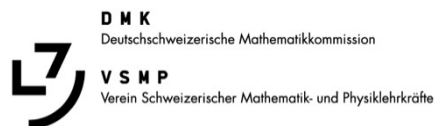
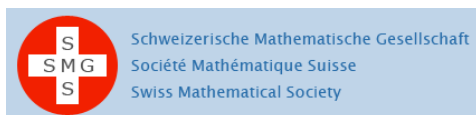
- Die gemäss (1), (2) berechneten Summenwerte sind ja, sofern  $n \geq 3$  eine Primzahl  $p$  ist, durch  $p$  teilbar. Zur Illustration listen wir für die vier kleinsten Primzahlen  $p \geq 3$  und die dazugehörigen  $k$  ( $1 \leq k \leq (p - 2)$ ) die entsprechenden, durch  $p$  teilbaren Summenwerte auf:

$p$	$k$	Produktsummen aus (1): $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$	Potenzsummen aus (2): $\sum_{i=1}^{p-1} i^k$
3	1	3	3
5	1	10	10
	2	35	30
	3	50	100
7	1	21	21
	2	175	91
	3	735	441
	4	1624	2275
	5	1764	12·201
11	1	55	55
	2	1320	385
	3	18·150	3025
	4	157·773	25·333
	5	902·055	220·825
	6	3·416·930	1·978·405
	7	8·409·500	18·080·425
	8	12·753·576	167·731·333
	9	10·628·640	1·574·304·985

- Z.B. bei gewissen kryptologischen Anwendungen der Zahlentheorie ist es von Interesse, möglichst effizient bestimmen zu können, ob eine vorliegende ungerade Zahl  $n$  prim ist. Es scheint, als ob es nach wie vor keine deterministischen Primzahltests gibt, welche in der Praxis den besten probabilistischen Tests den Rang ablaufen können. Anhand der Teilbarkeitseigenschaften (1), (2) könnten natürlich entsprechende deterministische resp. probabilistische Primzahltests formuliert werden. Aber die deterministischen Versionen wären noch ineffizienter als die Probedivision und daher keine Konkurrenz zu den bestehenden Primzahltests, und numerische Experimente suggerieren, dass Ähnliches wahrscheinlich auch für die probabilistischen Versionen gilt.
- In (1) findet ja der Sonderfall  $k = n - 1$  keine Erwähnung. Für diesen Wert von  $k$  ist offensichtlich  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k = (n - 1)!$ , und daher gilt gemäss Satz von Wilson [2]:  $n$  ist prim  $\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k = n - 1$ .
- In (2) wurden die Fälle  $k = 0$  und  $k \geq n - 1$  nicht thematisiert. Nun, für primes  $n$  und für alle  $k \geq 0$  kann man rasch einsehen, dass  $\sum_{i=1}^{p-1} i^k \pmod p$  periodisch ist in  $k$ , denn es gilt: Gemäss dem Kleinen Satz von Fermat ist  $\sum_{i=1}^{p-1} i^0 =_p \sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} =_p \sum_{i=1}^{p-1} i^{2(p-1)} =_p \dots =_p -1$ , und via (2) und Kleiner Satz von Fermat erhält man  $\sum_{i=1}^{p-1} i^k =_p 0$ , für die übrigen Werte von  $k$ .

## Referenzen

- [1] J. Pach, P.K. Agarwal: Combinatorial Geometry. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization (1995)
- [2] John Wilson (1741 – 1793); [https://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Wilson](https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Wilson) (28.01.23)



## 34. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

- Ort:** Kantonsschule Freudenberg in Zürich  
**Datum:** Mittwoch, 11. September 2024  
**Organisation:** Rinaldo Caranzano (KS Freudenberg), Francesco Antognini (KS Freudenberg), Meike Akveld (ETH), Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH)  
**Kurskosten:** Gegen Entrichtung der Tagungsgebühr von 30 CHF erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bon für das Mittagessen. Es besteht die Möglichkeit, mit TWINT zu bezahlen. Sonst gern 30 CHF bar passend.  
**Anmeldung:** bis 1. September 2024

**Programm** (Die Zeitangaben und das Programm sind provisorisch.)

<b>Check-in</b> beim Eingang der Aula: Kaffee, Tee, Orangensaft, Wasser und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr	10:00 – 10:45 Uhr
<b>Musikalische Einstimmung</b> in der Aula <b>Begrüssung</b> durch die Schulleitung <b>Einführung:</b> Norbert Hungerbühler	10:45 – 11:05 Uhr
<b>Plenarvortrag</b> in der Aula: <b>Andreas Krause (ETH Zürich):</b> <i>Maschinelles Lernen &amp; Künstliche Intelligenz - was steckt dahinter?</i>	11:05 – 11:55 Uhr
<b>Preisverleihung Matura Awards SMG</b> Vorträge der Preisträgerinnen und Preisträger über ihre prämierten Maturaarbeiten.	12:05 – 12:55 Uhr
<b>Mittagessen:</b> Mensa	12:55 – 14:00 Uhr
<b>Workshop 1</b> (siehe unten)	14:00 – 15:00 Uhr
<b>Workshop 2</b> (siehe unten)	15:10 – 16:10 Uhr
<b>Geselliger Ausklang mit netten Gesprächen und Dessert</b>	16:15 – 16:45 Uhr
<b>Ende der Veranstaltung</b>	16:45 Uhr

## Workshops

- Workshop A: *Mit Dufour das Land vermessen*, Philipp Spindler (KS Luzern, Universität Zürich)
- Workshop B: *Statistik in Maturaarbeiten*, Patric Müller (Liceo Artistico und ETH Zürich)
- Workshop C: *Mathematik fürs Gymnasium - die neuen Lehrmittel*, Armin Barth (KS Baden und ETH Zürich)
- Workshop D: *Kegelschnitte anhand von Aufgaben aus verschiedenen Bereichen des gymnasialen Unterrichts*, Dmitrij Nikolenkov (ETH Zürich)
- Workshop E: *TikZ ist kein Zeichenprogramm*, Martino Antognini (Liceo Cantonale di Mendrisio)
- Workshop F: *KI-Bildung im Mathematikunterricht*, Sarah Schönbrodt (Paris Lodron Universität Salzburg)
- Workshop G: *Data literacy: a critical element of critical thinking*, Luisa Barbanti (Zurich Data Scientists)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: [www.math.ch/TMU2024](http://www.math.ch/TMU2024)



**Schweizerische Mathematische Gesellschaft**  
**Société Mathématique Suisse**

## **Ausschreibung der Matura Awards 2024 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft**

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2024 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

Die Preisverleihung wird im Rahmen des 34. Schweizerischen Tages über Mathematik und Unterricht am 11.09.2024 an der Kantonsschule Freudenberg in Zürich stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2024 an

Prof. Christiane Tretter  
 University of Bern  
 Mathematical Institute  
 Sidlerstrasse 5  
 3012 Bern  
[tretter@math.unibe.ch](mailto:tretter@math.unibe.ch)

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird von der Vizepräsidentin der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkräfte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

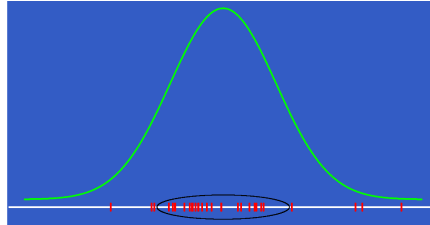
Bern, 11. März 2024

Christiane Tretter  
 Vizepräsidentin der SMG

## Extremwerttheorie

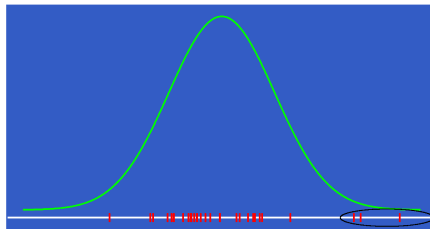
### Klassische Statistik:

Untersuchung des zentralen Bereichs der Beobachtungen, d.h. durchschnittliche/übliche Ereignisse, wie z.B. Mittelwert, Median. Extreme Ereignisse werden oft als „Ausreißer“ ausgeschlossen.



### Extremwerttheorie:

Untersuchung des dezentralen Bereichs der Beobachtungen, d.h. extreme Ereignisse, wie z.B. Maxima oder Überschreitungen extremer Schwellenwerte.



Die Extremwerttheorie (EWT) ist der Zweig der modernen Statistik, der sich mit der Prognose extremer Ereignisse und der Schätzung ihrer Eintrittswahrscheinlichkeit beschäftigt. Extrem bedeutet hierbei, dass das Ereignis weitgehend oder sogar vollständig ausserhalb des bisherigen Beobachtungsbereichs liegt, wie es z.B. bei Rekorden, Maxima/Minima oder Überschreitungen sehr grosser Schwellenwerte der Fall ist. Ausgehend von Ergebnissen aus der Schulmathematik (z.B. zentraler Grenzwertsatz für Summen von Zufallsvariablen) werden für Maxima/Minima und Überschreitungen grosser Schwellenwerte ähnliche Grenzwertsätze vorgestellt. Anhand von praxisnahen Beispielen aus der Versicherungs- und Finanzmathematik, Hydrologie sowie Sportwissenschaften wird aufgezeigt, wie mithilfe dieser Ergebnisse statistisch fundierte Aussagen über die Höhe und die Eintrittswahrscheinlichkeit extremer Ereignisse gemacht werden können.

Referent:	Prof. Dr. Michael Merz, Universität Hamburg
Zielpublikum:	Mathematik-Lehrkräfte der Sekundarstufe II Kenntnisse der Normalverteilung und des zentralen Grenzwertsatzes werden vorausgesetzt
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Jonas Gloor (DMK)
Datum und Zeit:	Mittwoch, 18. September 2024, 13:00 Uhr – 17:30 Uhr Ab 12:30 Begrüssungskaffee
Kursort:	Gymnasium Bäumlhof, Basel
Kurskosten:	Fr. 200 Fr. 150 für VSMP-Mitglieder und Studierende
Anmeldung:	<a href="https://math.ch/DMK2024b/">https://math.ch/DMK2024b/</a>
Anmeldeschluss:	11. September 2024



Lara Gafner  
Olympiades de la science, l.gafner@olympiad.ch

## Des médailles, un site web pour les enseignants et une grande fête : les nouveautés des Olympiades de mathématiques et de physique

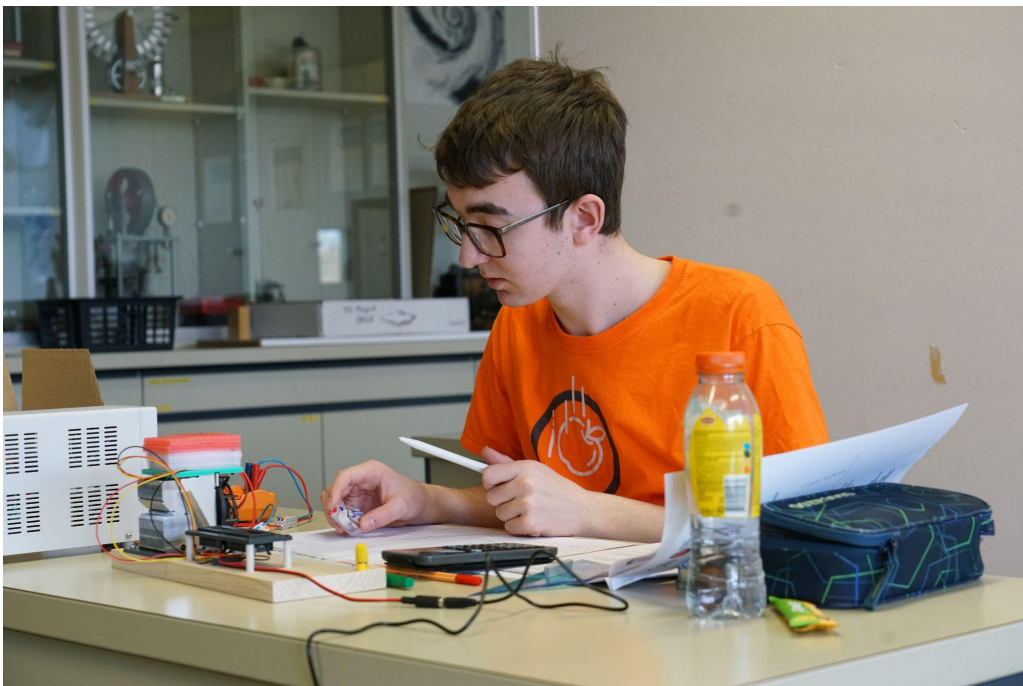
### Finales nationales, victoires internationales

La finale des Olympiades suisses de mathématiques de cette année a eu lieu le premier week-end de mars, suivie d'une cérémonie de remise des médailles début avril. Le deuxième week-end de mars a été consacré à la finale de physique à la Neue Kantonsschule d'Aarau. Au total, sept jeunes ont été récompensés par des médailles d'or.

Au niveau international également, un énorme succès a été enregistré dès la fin mars : Treize pays francophones y ont participé avec leurs jeunes talents. La victoire finale est revenue à l'équipe suisse, dont les membres ont remporté douze médailles. La compétition se poursuivra avec la European Girls' Mathematical Olympiad en avril, les Olympiades internationales de mathématiques en juillet et les Olympiades de mathématiques d'Europe centrale en août.

La Suisse ayant renoncé à participer aux Olympiades internationales de physique, qui se tiendront cette année en Iran, les gagnants se rendront "seulement" en Géorgie pour les Olympiades européennes de physique. Une autre alternative est envisagée - peut-être une participation à d'autres olympiades de physique régionales ou un événement de substitution organisé par la Suisse et d'autres pays.

→ Rapports et classements sur [science.olympiad.ch/fr/actuel](http://science.olympiad.ch/fr/actuel)



*Un participant des Olympiades de physique lors de l'examen pratique.*

## Du neutrino à l'exoplanète

Sur le site Web des enseignants des Olympiades de la science, vous trouverez non seulement des nouvelles des concours et toutes les informations nécessaires pour participer en un coup d'œil - mais aussi des articles intéressants :

- Vous souhaitez emmener vos élèves dans un petit voyage dans l'espace ? Vous souhaitez parler des exoplanètes dans votre classe ou calculer l'âge de l'univers ? Le PRN PlanetS, le Center for Space Habitability de l'Université de Berne et les bénévoles des Olympiades de physique ont des articles et du matériel pédagogique pour vous. En outre : des expériences de pendule avec le smartphone, des exercices des Olympiades de mathématiques et de nombreux anciens examens.
- L'automne dernier, des participants des Olympiades des sciences et Science et Jeunesse ont eu l'occasion de s'entretenir avec le lauréat et la lauréate des prix scientifiques suisses Benoist et Latsis. La professeure Lesya Shchutska, récompensée pour ses recherches sur les neutrinos, a elle-même participé une fois aux Olympiades internationales de physique. Nous lui avons demandé ce qu'elle dirait aux enseignants qui hésitent encore à motiver leurs élèves à participer aux Olympiades de la science.
- En tant qu'enseignant de mathématiques, vous pouvez découvrir des talents pour les Olympiades de linguistique. Cela vous surprend ? Nous vous expliquons pourquoi, lors des Olympiades de linguistique, ce ne sont pas seulement les talents linguistiques typiques qui gagnent, mais surtout les penseurs analytiques, fans de logique et résolveurs d'énigmes.

→ Cela et plus sur [science.olympiad.ch/fr/enseignantes](http://science.olympiad.ch/fr/enseignantes)



*L'astrophysicien Thibaut Roger et les participants aux Olympiades de physique dans un planétarium gonflable.*

## Un petit voyage dans le temps

L'histoire des Olympiades de la science en Suisse commence en 1987 avec l'enseignant Maurice Cosandey qui emmène quatre élèves aux Olympiades internationales de chimie. En 1991, l'élève Bea Wollenmann a été la première Suissesse à se rendre aux Olympiades internationales de mathématiques et a remporté la médaille de bronze. Elle a participé seule, mais elle s'est vite fait beaucoup d'amis : "J'ai donc été 'adoptée' chaque jour par l'équipe d'un autre pays". À partir de là, tout est allé très vite : le premier bureau de coordination a été créé en 1993, suivi en 1995 par la première participation suisse en physique. Déjà en 1999, la Suisse, avec le soutien de la conseillère fédérale de l'époque, Ruth Dreifuss, s'est portée candidate pour accueillir les Olympiades internationales de physique en 2016.



*Dans le style des années 90 : la première délégation suisse aux Olympiades internationales de physique à Canberra.*

Le 19 juin 2004, les cinq premières associations se sont réunies autour d'une table pour fonder l'association faîtière. „Une plus grande organisation serait prise plus au sérieux par les autorités, les écoles, la recherche, l'économie et les médias et pourrait également mobiliser des sponsors (...) qui, jusqu'à présent, ignoraient les Olympiades", écrit le coordinateur de l'époque, Alfredo Mastracola des Olympiades de physique, dans un rapport.

En 2024, la faîtière des Olympiades de la sciences célèbre son anniversaire. Au cours des 20 dernières années, les Olympiades des sciences ont connu une croissance rapide : le choix des disciplines a doublé, le nombre de participants au premier tour a décuplé. Chaque association apporte quelque chose à un buffet coloré pour le cerveau, dont les diverses délicatesses peuvent être dégustées par des jeunes talents de toute la Suisse. Le 14 septembre, une fête d'anniversaire aura lieu à Berne, où toute la famille des Olympiades pourra se retrouver, de l'enseignant à la participante, de la secrétaire d'État au bénévole.

→ En savoir plus : [science.olympiad.ch/anniversary](https://science.olympiad.ch/anniversary)

Résultats, matériel et agenda :  
Abonnez-vous à la newsletter pour ne rien manquer.



Lara Gafner

Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

## Medaillen, Unterrichtstipps und ein grosses Fest: Neues von den Mathematik- und Physik-Olympiaden

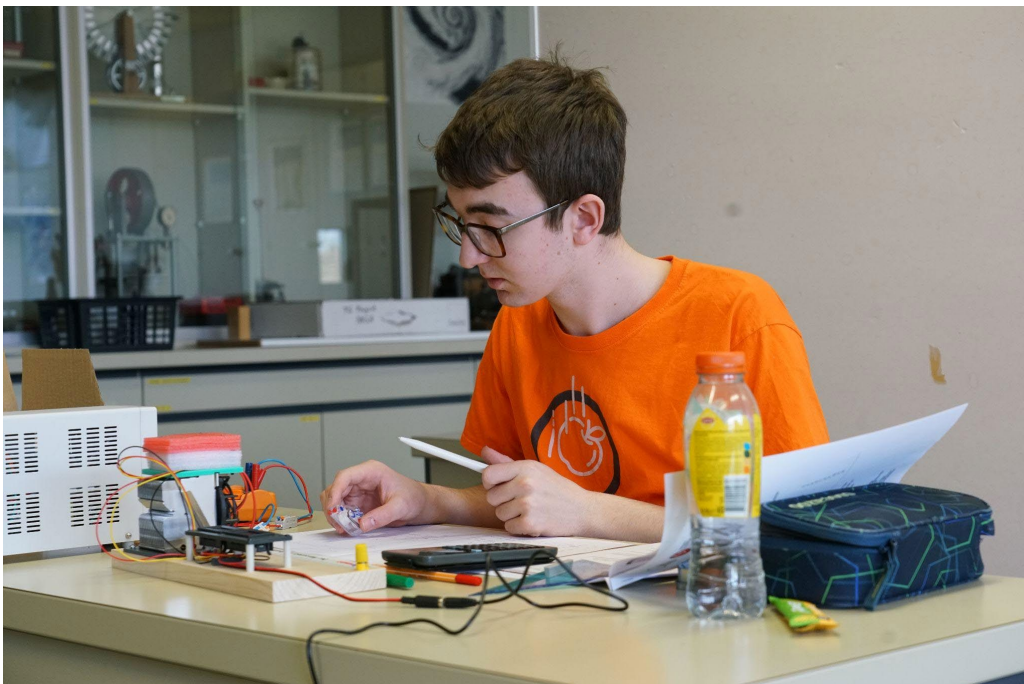
### Nationale Finals, internationale Siege

Das Finale der diesjährigen Schweizer Mathematik-Olympiade fand am ersten Märzwochenende statt, gefolgt von einer Medaillenzeremonie Anfang April. Das zweite Märzwochenende war dem Physik-Finale an der Neuen Kantonsschule Aarau gewidmet. Insgesamt wurden sieben Jugendliche mit Goldmedaillen geehrt.

Auch international konnte bereits Ende März ein enormer Erfolg verzeichnet werden: Dreizehn Länder aus der Frankophonie waren mit ihren jungen Mathetalenten bei der französischsprachigen Mathematik-Olympiade dabei. Der Gesamtsieg ging an das Schweizer Team, dessen Mitglieder ganze zwölf Medaillen holten. Weiter geht es mit der European Girls' Mathematical Olympiad im April, der Internationalen Mathematik-Olympiade im Juli und der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade im August.

Da die Schweiz dieses Jahr auf eine Teilnahme an der Internationalen Physik-Olympiade verzichtet, die im Iran stattfinden würde, geht es für die Gewinner "nur" nach Georgien an die Europäische Physik-Olympiade. Zudem ist eine weitere Alternative angedacht - möglicherweise eine Teilnahme an einer weiteren regionalen Physik-Olympiade oder ein von der Schweiz und anderen Ländern organisierter Ersatzanlass.

→ Berichte und Ranglisten auf [science.olympiad.ch/aktuell](http://science.olympiad.ch/aktuell)



*Ein Teilnehmer der Physik-Olympiade bei der praktischen Prüfung.*

## Vom Neutrino bis zum Exoplaneten

Auf der Lehrpersonen-Webseite der Wissenschafts-Olympiaden finden Sie nicht nur News von den Wettbewerben und alle Informationen zur Teilnahme auf einen Blick - sondern auch interessante Artikel:

- Sie möchten Ihre Schülerinnen und Schüler auf eine kleine Reise ins All mitnehmen? Sie möchten Exoplaneten ins Klassenzimmer bringen oder der Frage nachgehen, wie alt das Universum ist? Der NFS Planet S, das Center for Space Habitability der Universität Bern und die Freiwilligen der Physik-Olympiade haben Wissensartikel, Unterrichtstipps und Materialien für Sie. Ausserdem: Pendel-Experimente mit dem Smartphone, Einstiegsaufgaben der Mathematik-Olympiade und zahlreiche alte Prüfungen.
- Letzten Herbst durften sich Teilnehmende von Wissenschafts-Olympiaden und Schweizer Jugend Forscht mit dem Gewinner und der Gewinnerin der Schweizer Wissenschaftspreise Benoist und Latsis austauschen. Die für ihre Neutrino-Forschung ausgezeichnete Prof. Lesya Shchutska hat selbst einmal an der Internationalen Physik-Olympiade teilgenommen. Wir haben sie gefragt, was sie zu Lehrpersonen sagen würde, die noch zögern, ob Sie Ihre Schüler\*innen für eine Wissenschafts-Olympiade motivieren sollten.
- Als Mathematik-Lehrperson sind Sie gefragt, wenn es darum geht, Talente für die Linguistik-Olympiade zu entdecken. Bitte, was? Wir erklären, warum bei der Linguistik-Olympiade nicht nur typische Sprachtalente, sondern vor allem analytische Denker, Logik-Fans und Codeknackerinnen die Nase vorn haben.

→ Dies und mehr auf [science.olympiad.ch/lehrpersonen](http://science.olympiad.ch/lehrpersonen)



*Astrophysiker Thibaut Roger führt die Teilnehmenden der Physik-Olympiade durch ein aufblasbares Planetarium.*

## Eine kleine Zeitreise

Die Geschichte der Wissenschafts-Olympiaden in der Schweiz beginnt 1987 mit dem Lehrer Maurice Cosandey, der kurzerhand seine Klassenbesten an die Internationale Chemie-Olympiade mitnimmt. 1991 reiste die Schülerin Bea Wollenmann auf eigene Initiative als erste Schweizerin an eine Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) und gewann Bronze. Sie nahm allein an der IMO teil, fühlte sich aber ganz und gar nicht einsam: “Im Nu waren Kontakte zu Schülern anderer Nationen geknüpft und so wurde ich dann auch jeden Tag vom Team eines anderen Landes ‘adoptiert’”. Von da an ging alles ganz schnell: 1993 wurde die erste Koordinationsstelle gegründet, 1995 folgte die erste Schweizer Teilnahme in Physik und schon 1999 kandidierte die Schweiz, mit Unterstützung der damaligen Bundesrätin Ruth Dreifuss, als Gastgeberland für die Internationale Physik-Olympiade 2016.



*Im Stil der Neunziger: Die erste Schweizer Delegation an der Internationalen Physik-Olympiade in Canberra.*

Am 19. Juni 2004 setzten sich Vertreter der ersten fünf Vereine schliesslich an einen Tisch und gründeten den “Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden”. „Eine grössere Organisation würde von Behörden, Schulen, Wissenschaft, Wirtschaft und Medien ernster genommen und könnte auch Sponsoren (...) mobilisieren, die bisher die unwichtigen Olympiaden ignoriert haben”, argumentierte Alfredo Mastracola von der Physik-Olympiade damals in einem Bericht.

2024 wird der Dachverband Wissenschafts-Olympiade schon 20 Jahre alt. In dieser Zeit sind die verschiedenen Olympiaden nicht nur enger zusammengewachsen, sondern auch zusammen rasant gewachsen: Die Teilnehmendenzahl der ersten Runde hat sich mehr als verzehnfacht, die Auswahl an Fächern hat sich verdoppelt. Jeder der zehn Vereine trägt etwas zu einem bunten Buffet fürs Gehirn bei, dessen diverse Delikatessen von wissenshungrigen Jugendlichen aus der ganzen Schweiz degustiert werden können. Am 14. September findet in Bern eine Jubiläumsfeier statt, bei der sich die ganze Olympiaden-Familie treffen kann - vom Lehrer bis zur Teilnehmerin, von der Staatssekretärin bis zum Volunteer.

→ Mehr dazu auf [science.olympiad.ch/anniversary](https://science.olympiad.ch/anniversary)

Resultate, Tipps und Termine:  
Abonnieren Sie den Newsletter, um nichts zu verpassen.





# Bulletin N° 155

## Impressum

### Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

### Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier                      franz.meier@vsmp.ch  
 Werner-Kälin-Strasse 1      Tel. 041 210 25 58  
 8840 Einsiedeln

### Layout — *Mise en page*

Samuel Byland                  samuel.byland@vsmp.ch  
 Weinbergstrasse 48b      Tel. 079 728 63 97  
 5000 Aarau

### Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker              hjstocker@vsmp.ch  
 Friedheimstrasse 11      Tel. 044 780 19 37  
 8820 Wädenswil

### Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

#### Inserate:

ganzseitig                      Fr. 500.–  
 halbseitig                      Fr. 300.–

#### Beilagen:

bis 20 g                         Fr. 500.–  
 über 20 g                      nach Vereinbarung

### Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:  
 VSG – SSPES – SSISS  
 Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)  
 Monbijoustrasse 36  
 3011 Bern  
 Tel. 031 382 52 33  
 information@vsg-sspes.ch

#### übrige Abonnenten — autres abonnées:

Franz Meier                      franz.meier@vsmp.ch  
 Werner-Kälin-Str. 1      Tel. 041 210 25 58  
 8840 Einsiedeln

### Auflage — *Tirage*

800 Exemplare  
 erscheint dreimal jährlich

### Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger                      praesident@vsmp.ch  
 Via Salens                      Tel. 081 641 10 94  
 7402 Bonaduz

### Deutschscheizerische Mathematikkommission

Andrea Peter                      praesidium@dmk.vsmsp.ch  
 Kantonsschule Sursee  
 Moosgasse 11  
 6210 Sursee

### Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz                  christian.stulz@vsmp.ch  
 Gymnasium Burgdorf      Tel. 031 638 03 03  
 Pestalozzistrasse 17  
 3400 Burgdorf

### Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano              tatiana.mantuano@vsmp.ch  
 Grand'Rue 16                  Tél. 032 544 47 53  
 2075 Wavre

### Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher              yves.oestreicher@vsmp.ch  
 Malvand 13                      Tél. 079 796 69 95  
 1292 Chambésy

### Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob                        guido.lob@vsmp.ch  
 Via Borghese 14              Tel. 078 663 13 37  
 6600 Locarno

### Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 156                          31.07.2024 (Ende September)  
 Nr. 157                          30.11.2024 (Ende Januar)  
 Nr. 158                          31.03.2025 (Ende Mai)

### Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG  
 Letzistrasse 37  
 9015 St. Gallen  
 www.niedermanndruck.ch

### Internet:

www.vsmsp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P  
S S P M P  
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica