

the 1990s, the number of people in the UK who are aged 65 and over has increased from 10.5 million to 13.5 million, and the number of people aged 75 and over has increased from 4.5 million to 6.5 million (Office for National Statistics 2002).

There is a growing awareness of the need to address the needs of older people, and the UK Government has set out a strategy for the 21st century (Department of Health 2001). The strategy is based on the principle of 'active ageing', which is defined as 'the process of optimising opportunities for health, participation in society, and security in old age' (Department of Health 2001, p. 1).

The strategy is based on three pillars: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action. The key areas for action are: health, participation, and security. The Department of Health has set out a number of objectives for each pillar, and has identified a number of key areas for action.

Internet-Adressen – *Adresses Internet*  
[www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) – [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) – [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch)

Titelseite – *Page de Titre*  
Satz von Varignon. Artikel auf Seite 18 in dieser Ausgabe.

# Bulletin N° 154

## Inhaltsverzeichnis

<b>AUS DEM VORSTAND</b>	<b>5</b>
Josef Züger Gedanken des Präsidenten/Pensée du président/Pensieri del presidente	5
<b>DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION</b>	<b>6</b>
Martin Lieberherr Schwache Reaktion	6
<b>DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION</b>	<b>10</b>
Georg Keller Eleganter Beweis des 2-Quadrate resp. 4-Quadrate-Satzes	10
Peter Gallin Summe der Quadrate der Abstände von einem Umkreispunkt zu den Seitengeraden eines regelmässigen n-Ecks	16
Beat Jaggi Rechendreiecke/Rechenvielecke und elementare Geometrie	18
Kurs Statistische Tests leicht gemacht: Eine praxisnahe Einführung für (unbedarfte) Mathematiklehrpersonen	25
Hans Ulrich Keller Wieviel Raum beansprucht ein rotierender Würfel?	26
<b>COMMISSIONE DI MATEMATICA DELLA SVIZZERA ITALIANA</b>	<b>29</b>
Corso Blaise Pascal a 401 anni dalla nascita	29
<b>COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE</b>	<b>30</b>
Christian Aebi Pavés droits diophantiens optimisés	30
Jean-Marie Urfer Mathématiques engagées	32

Josef Züger

Präsident VSMP, praesident@vsmp.ch

# Gedanken des Präsidenten

## Pensées du président

## Pensieri del presidente

Liebe Leserinnen, liebe Leser

Der Abschluss des vergangenen Jahres war an den Gymnasien der Schweiz geprägt von der Auseinandersetzung mit dem vorgeschlagenen Rahmenlehrplan. Die fünf Kommissionen und der Vorstand des VSMP haben sich mit diesem Dokument auseinandergesetzt und eine Rückmeldung verfasst. Diese können Sie auf unserer Website unter «Aktuell» einsehen. Jetzt heisst es, auf den definitiven Rahmenlehrplan zu warten, um dann in den Kantonen und den Schulen die eigenen Lehrpläne zu überprüfen und auf die neuen Gegebenheiten anzupassen.

In den Diskussionen mit den Präsidien anderer Fachverbände darf ich erfreut feststellen, dass der VSMP, eigentlich seine fünf Kommissionen, im Bereich der Weiterbildungen überdurchschnittlich aktiv ist. Davon zeugen in diesem Bulletin ein Rückblick auf den jährlichen Kurs der CRM in Champéry und die Ankündigungen der DMK und der CMSI. Verteilt auf die verschiedenen Sprachregionen und unsere beiden Fächer Mathematik und Physik, sind auch dieses Jahr verschiedenste Veranstaltungen und Kurse geplant. Die Anzahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer motivieren die Kommissionen, die Planung von weiteren Kursen in Angriff zu nehmen.

Josef Züger, Präsident VSMP



Chères lectrices, chers lecteurs

La fin de l'année passée a été marquée, dans les gymnases de Suisse, par l'étude des nouveaux plans d'étude cadres proposés. Les cinq commissions et le comité de la SSPMP ont également étudié ces documents et ont répondu de manière circonstanciée à la consultation. Cette réponse (en allemand) peut être consultée sur notre site sous l'onglet «Actualités → EMG». Il s'agit maintenant d'attendre la version définitive du plan d'étude cadre et de vérifier la concordance avec les plans d'études en vigueur dans les cantons et les écoles et au besoin de les adapter aux nouvelles données.

Dans les discussions avec les président·e·s des

autres associations de branche, je peux avec satisfaction constater que la SSPMP, spécifiquement ses cinq commissions, sont, dans le domaine de la formation continue, plus actives que la moyenne des autres disciplines. Dans ce bulletin témoignent de cette activité le compte-rendu du cours annuel à Champéry, organisé par la CRM, ainsi que les annonces des cours organisées par la DMK et la CMSI.

Plusieurs cours et manifestations seront organisés dans les différentes régions linguistiques pour les deux disciplines mathématiques et physique. Les succès enregistrés auprès des nombreux et nombreuses participant·e·s encouragent les commissions à proposer davantage de cours.

Josef Züger, Président de la SSPMP



Care lettrici, cari lettori,

la fine dello scorso anno è stata caratterizzata dal dibattito sulla proposta del piano quadro degli studi per i licei svizzeri. Le cinque commissioni e il comitato della SSIMF hanno analizzato il documento e redatto una presa di posizione, consultabile sul nostro sito web alla voce "Attualità". Ora si tratta di attendere il piano quadro definitivo così che i cantoni e le scuole possano di riflesso rivedere i propri programmi adattandoli alle nuove disposizioni.

Nelle discussioni con i presidenti di altre associazioni di categoria ho notato con piacere che la SSIMF, o di fatto le sue cinque commissioni, è più attiva della media nel campo della formazione continua. La recensione del corso annuale della CRM a Champéry e le proposte dei prossimi corsi della DMK e della CMSI che troverete in questo Bollettino ne sono la prova. Anche per quest'anno è prevista una grande varietà di eventi e corsi distribuiti nelle varie regioni linguistiche e nelle nostre due materie, matematica e fisica. La partecipazione sempre numerosa motiva inoltre le commissioni nella pianificazione dei prossimi corsi.

Josef Züger, presidente SSIMF

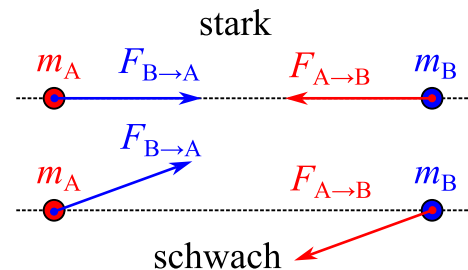
# Schwache Reaktion

## 1 Einleitung

Das Reaktionsprinzip lautet: Während ein Körper auf einen anderen Körper eine Kraft ausübt, erfährt er eine Reaktionskraft von gleicher Stärke und umgekehrter Richtung. (Wechselwirkungsprinzip, drittes newtonsches Axiom, Rückstossprinzip, actio = reactio)

Viele Physikbücher führen das Reaktionsprinzip in der starken, wenige auch in der schwachen Fassung an, siehe Abbildung 1.

Abbildung 1: Starkes und schwaches Reaktionsprinzip

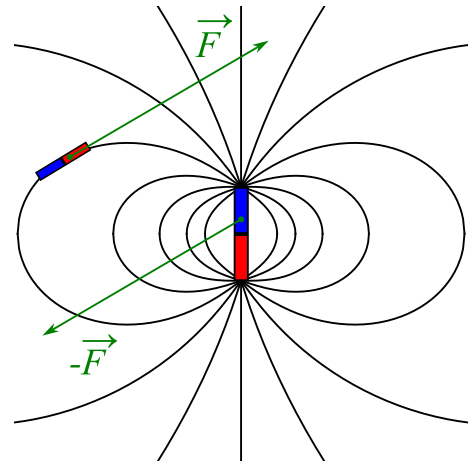


In Mittel- oder Hochschulbüchern wird meistens – implizit in begleitenden Illustrationen oder explizit in der Formulierung – das starke Wechselwirkungsprinzip vorgestellt: Aktions- und Reaktionskraft sind gleichstark, entgegengesetzt gerichtet und wirken entlang derselben Wirkungslinie.

Leider ist es nicht immer wahr, dass Aktions- und Reaktionskraft dieselbe Wirkungslinie teilen. Ein Beispiel, das alle Physiklehrkräfte kennen sollten, ist in Abbildung 2 dargestellt.

Abbildung 2: Statische Wechselwirkung zwischen einem Stabmagneten und einer Kompassnadel

Die magnetische Kraft auf die drehmomentfreie Kompassnadel wirkt tangential zu den Feldlinien. Die Tangente (Wirkungslinie) verläuft aber nicht durch den Stabmagneten. Die Reaktionskraft auf den Stabmagneten greift irgendwo am Stabmagneten an und hat eine andere Wirkungslinie. Hier gilt nur das schwache Wechselwirkungsprinzip.



Das Reaktionsprinzip hat zur Folge, dass sich innere Kräfte eines Körpers aufheben und deshalb der Gesamtimpuls konstant bleibt.

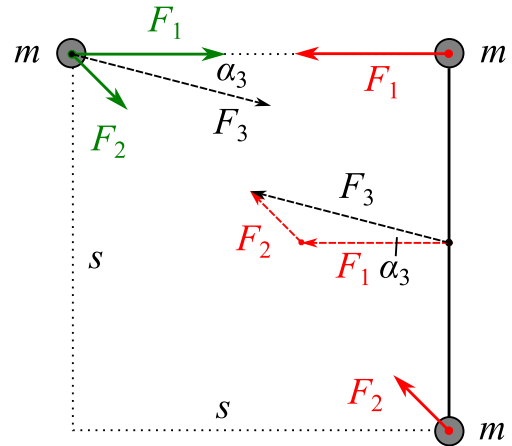
Das starke Reaktionsprinzip bewirkt, dass der Drehimpuls erhalten ist, weil Drehmomente fehlen.

Aber was passiert, wenn nur das schwache Reaktionsprinzip gilt? Ich möchte an einem Beispiel zeigen, dass der Drallsatz nicht in Gefahr ist. Weil magnetische Dipolkräfte schwierig sind, möchte ich ein ähnliches Beispiel mit Gravitationskräften ansatzweise durchrechnen.

## 2 Theorie

Betrachten wir die newtonschen Gravitationskräfte zwischen einer Punktmasse und einer idealisierten Hantel, siehe Abbildung 3.

Abbildung 3: Drei gleiche Massenpunkte mit je der Masse  $m$  liegen auf den Ecken eines Quadrates mit Seitenlänge  $s$ . Zwei Massenpunkte sind entlang einer Quadratseite mit einer masselosen Stange zu einem starren Körper verbunden. Die Hantel übt die Teilkräfte  $F_1$  und  $F_2$  auf die freie Punktmasse aus; die Reaktionskräfte wirken auf die entsprechenden Endkörper der Hantel. Die Teilkräfte können zur Resultierenden  $F_3$  zusammengesetzt werden. Die Resultierende habe ich im Massenmittelpunkt der Hantel eingezeichnet sowie umgedreht bei der Punktmasse. Die Variablen stehen für Beträge, die Richtungen werden durch die Pfeile angezeigt.



Mit den Bezeichnungen in Abbildung 3 folgt

$$F_1 = \frac{Gm^2}{s^2} \quad \wedge \quad F_2 = \frac{F_1}{2} \tag{1}$$

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(135^\circ)} = F_2 \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx F_1 \cdot 1.399 \tag{2}$$

$$\frac{\sin \alpha_3}{F_2} = \frac{\sin 135^\circ}{F_3} \Rightarrow \alpha_3 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} \approx 14.64^\circ \tag{3}$$

Der Winkel  $\alpha_3$  wird zwischen der Resultierenden  $F_3$  und der Kraft  $F_1$  gemessen. Die Massenmittelpunkte beider Körper beschleunigen in Richtung der jeweiligen Resultierenden; die Punktmasse mit  $a_p = F_3/m$  und die Hantel mit  $a_H = F_3/(2m)$ . Die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der jeweiligen Körper, aber in Gegenrichtung. Der gemeinsame Schwerpunkt ist somit unbeschleunigt und der totale Linearimpuls ist erhalten.

Auf die Hantel wirkt offensichtlich ein Drehmoment. Bezogen auf den Hantel-Massenmittelpunkt hat es anfangs die Grösse

$$M = F_1 \cdot \frac{s}{2} - F_2 \cdot \frac{s\sqrt{2}}{4} = F_1 \frac{s}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \tag{4}$$

und beginnt, die Hantel im Gegenuhrzeigersinn (positiver Drehsinn) zu drehen. Der innere oder Eigendrehimpuls (Spin) der Hantel nimmt zu. Da die Bewegung bei der Anfangslage der Hantel startet, verändert sich der Bahndrehimpuls der Hantel zumindest am Anfang nicht.

Die Punktmasse erfährt eine Kraft, die sie parallel zu  $F_3$  beschleunigt. Dadurch wird der Bahndrehimpuls bezüglich der Anfangsposition des Hantelschwerpunkts verändert. Die Drehimpulsänderung ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_3 \tag{5}$$

$$\frac{dL}{dt} = -F_1 \cdot \frac{s}{2} + F_2 \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -M \tag{6}$$

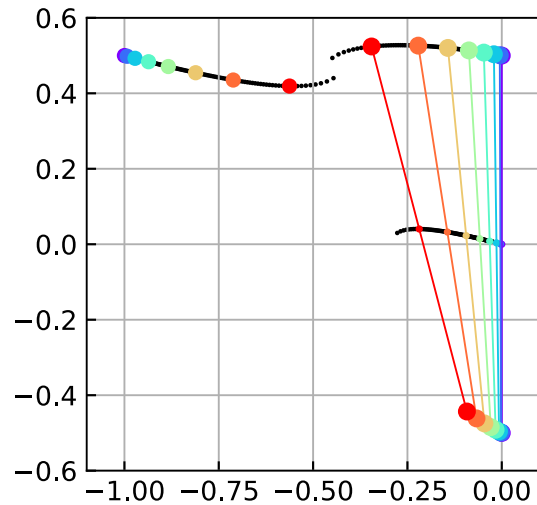
Zu Beginn nimmt also der innere Drehimpuls (Spin) der Hantel zu und der äussere (Bahn)Drehimpuls der Punktmasse gleich viel ab. Der Gesamtdrehimpuls ist erhalten. Alles andere wäre auch seltsam gewesen. Die einzelnen Gravitationskräfte zwischen den Massenpunkten erfüllen ja das starke Reaktionsprinzip und ändern den Drehimpuls nicht.

### 3 Simulationen

Die skizzierte Theorie beschreibt nur den Anfangszeitpunkt. Die Fortsetzung wird schnell kompliziert, lässt sich aber mit mässigem Aufwand simulieren, siehe Abbildung 4.

Abbildung 4: Simulation der Bewegung von Punktmasse und Hantel

Die Anfangsrichtungen der Bewegungen von Punktmasse und Hantelschwerpunkt,  $14.6^\circ$  zur Horizontalen, stimmen mit der Theorie überein.



Hantel und Punktmasse tauschen Drehimpuls aus. Ist es möglich, den Hantelschwerpunkt festzuhalten und ihre Rotation so zu steuern, dass sich die Punktmasse von der Hantel entfernt? Klar, siehe Abb. 5 und 6.

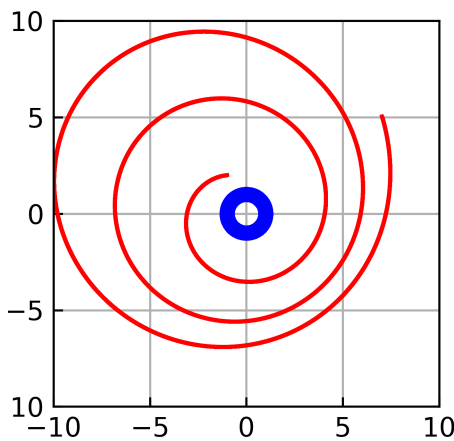


Abbildung 5: Inertialsystem

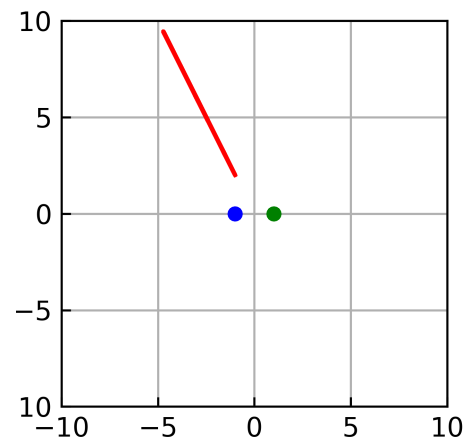


Abbildung 6: Mitrotierendes Bezugssystem

Eine Hantel kann durch gesteuerte Rotation eine Testmasse mit Hilfe der Gravitations- respektive Gezeitenkräfte wegschleudern. Der Mond entfernt sich von der Erde, weil durch Gravitationskräfte innerer Drehimpuls von der Erde auf den Bahndrehimpuls des Systems Erde-Mond übertragen wird.

Umgekehrt kann sich ein hantelförmiger Satellit durch gesteuerte Rotation oder Deformation aus dem Gravitationsfeld eines Planeten lösen.<sup>1,2</sup> Er muss nur durch z.B. Reaktionsräder seine Orientierung steuern und/oder durch Verlängerung/Verkürzung seine Form geeignet ändern. Dazu sind keine Triebwerke nötig. Er kann so innere Energie in äussere, potentielle Energie im Gravitationsfeld umwandeln. Allerdings ist der Vorgang langsam, weil Gezeitenkräfte auf Kleinkörper in der Regel schwach sind.

12. August 2023, Lie.

<sup>1</sup> J. Wisdom, “Swimming in Spacetime: Motion by Cyclic Changes in Body Shape”, Science, 27 Feb 2003, Vol 299, Issue 5614, 1865-1869

<sup>2</sup> M. J. Longo, “Swimming in Newtonian space–time: Orbital changes by cyclic changes in body shape”, Am. J. Phys. **72** (10), October 2004, 1312-1315

# Neugründung: EducaTec - Systems GmbH

## Mehr Support, Training & Services für Messtechniksysteme in Schullaboren

Die EducaTec - Systems GmbH wurde von Vance Carter, Oliver Gallus und Patrick Koch als Schwesterfirma der EducaTec AG gegründet, um Schullaboren in der Schweiz und Liechtenstein noch gezieltere Dienstleistungen wie Support, Training und andere Services für Vernier Science Education sowie andere Messtechniksysteme anzubieten.

Ab dem 1. Februar 2024 wird EducaTec - Systems GmbH die Produktlinien Vernier und Ohaus von der EducaTec AG übernehmen und weiterführen. Sarah Carter übernimmt die EducaTec AG und wird die übrigen Produkte weiterentwickeln. Beide Unternehmen werden weiterhin zusammenarbeiten.

Wir bieten Service und Training vor Ort nach Bedarf. Reparaturen, Garantearbeiten und Support versuchen wir, so weit wie möglich alles in der Schweiz vorzunehmen.

Unsere langjährige Erfahrung in diesem Bereich ermöglicht es uns, Sie kompetent zu beraten. Unsere Mission ist es, Ihnen die notwendigen Werkzeuge an die Hand zu geben, um die wissenschaftliche Neugier bei den Studierenden zu wecken.

Oliver Gallus und Vance Carter sind erfahrene Elektroingenieure, wobei Herr Gallus zusätzlich einen PhD in Physik hat. Patrick Koch übernimmt die Geschäftsleitung.

Unsere Geschäftsstelle mit Patrick Koch befindet sich in Oberwil-Lieli (AG), das Technische Büro in Büren zum Hof (BE).



Oliver Gallus



Patrick Koch



Vance Carter

## Vernier Graphical Analysis® Pro

In Echtzeit wissenschaftliche Daten sammeln, graphisch aufbereiten und analysieren

Vernier Graphical Analysis® Pro unterstützt Schüler:innen, die Zusammenhänge zwischen abstrakten wissenschaftlichen Konzepten und der physischen Welt zu verstehen.

Die Software ist mit praktisch allen Vernier-Sensoren kompatibel, inklusive der kabellosen Bluetooth-Sensoren. Die Pro-Version ist als 1- oder 3-Jahres-Standortlizenz erhältlich. Vernier bietet auch eine kostenlose Version an.

### Der Vergleich mit Logger Pro 3

Logger Pro 3 ist punkto Datenanalyse eine bewährte All-in-one-Lösung. Sie beinhaltet bspw. Spektrometrie-Funktionen, die in Graphical Analysis nur separat verfügbar sind. Im Gegensatz zu Graphical Analysis ist Logger Pro jedoch nicht mit den kabellosen Go-Direct-Sensoren kompatibel.



Graphical Analysis®  
Pro vs. Logger Pro 3



### Übersicht der neusten Analyse-Tools von Vernier

- Vernier Graphical Analysis® Pro oder Basic
- Vernier Video Analysis
- Vernier Spectral Analysis® (kostenlos)
- Vernier Instrumental Analysis® (kostenlos)

Da Logger Pro 3 künftig noch gepflegt aber nicht weiterentwickelt wird, empfehlen wir mittelfristig den Umstieg auf Vernier Graphical Analysis®:

«Vernier Graphical Analysis ist einfacher in der Handhabung und intuitiver. Zudem unterstützt die App alle wichtigen Betriebssysteme und ist gut ausgerüstet fürs BYOD. Die Templates zu den Experiment-Büchern sind teilweise schon vorhanden und werden laufend hinzugefügt.»

Oliver Gallus, Physiklehrer und Vernier-Spezialist  
oliver.gallus@educatec-systems.ch

EducaTec - Systems GmbH  
Grossächerstrasse 2  
8966 Oberwil-Lieli  
info@educatec-systems.ch



Georg Keller  
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

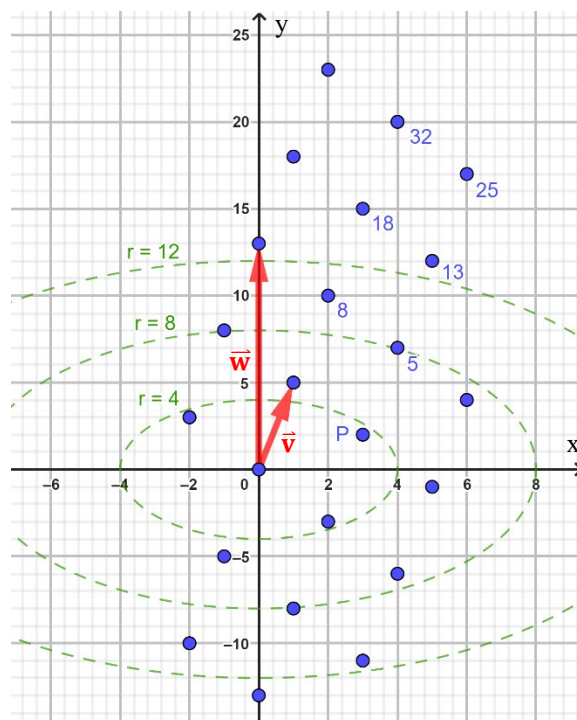
# Eleganter Beweis des 2-Quadrate resp. 4-Quadrate-Satzes

## Einleitung

Vor etwa einem Jahr begegnete ich auf den Seiten 6-9 des Buches „Combinatorial Geometry“ [1] einem mir unbekanntem und m.E. erstaunlich kurzen, sehr eleganten Beweis des 2-Quadrate- resp. 4-Quadrate-Satzes. Weil diese Beweise manchen Mathematikern unbekannt zu sein scheinen und weil sie für einen Teil der Leserschaft des VSMP-Bulletins von Interesse sein könnten, werde ich diese Beweise gerne darlegen, wobei ich die Argumentation in [1] der hoffentlich besseren Verständlichkeit halber z.T. anpassen (z.B. mit Detailausführungen ergänzen) werde.

Statt jetzt aber sogleich mit den ersten Beweisschritten für den 2-Quadrate-Satz zu beginnen, wollen wir diese Einleitung noch einen Moment weiterführen. Denn als hoffentlich nützliche Orientierungshilfe möchten wir einen wenigstens groben Einblick in die dem Beweis des 2-Quadrate-Satzes zugrundeliegende Strategie geben, allerdings ohne jegliche Begründungen (welche später, d.h. in den nächsten drei Kapiteln, erfolgen werden). - Nun, der 2-Quadrate-Satz besagt ja, dass jede Primzahl der Form  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , als Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen geschrieben werden kann. Die kleinsten Primzahlen von dieser Form sind  $p = 5, 13, 17, 29, 37, \dots$ ; das zur Illustration gut geeignete Beispiel  $p = 13$  betrachtend, kann die Beweisstrategie wie folgt umrissen werden:

- Man betrachtet das 2-dimensionale Gitter in  $\mathbb{Z}^2$ , welches durch die Vektoren  $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} := \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$  erzeugt wird (ein Ausschnitt dieses Gitters ist nebenstehend abgebildet, wobei die Gitterpunkte blau gefärbt sind; die Bedeutung der übrigen Teile der Abbildung wird im folgenden Text erläutert).
- Aufgrund der speziellen Wahl von  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  haben die Gitterpunkte  $(x, y)$  zwei bemerkenswerte und keineswegs offensichtliche Eigenschaften:
  1.  $x^2 + y^2$  ist jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von 13; so z.B. ist  $4^2 + 20^2 = 32 \cdot 13$ , weswegen beim Gitterpunkt  $(4, 20)$  die blaue Zahl 32 steht. Zwecks Illustration sind in der Abbildung noch einige weitere dieser Multiplikatoren von 13 notiert.
  2. Es ist klar, dass mit kleiner werdendem Abstand  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  der Gitterpunkte vom 0-Punkt der Wert von  $x^2 + y^2$  ein immer kleineres Vielfaches von 13 wird (vgl. auch unsere Abbildung, wo als Lesehilfe Ellipsen(bögen) mit  $r = 4, 8, 12$  abgebildet sind). Aber überhaupt nicht offensichtlich ist Folgendes: Für die am nächsten beim 0-Punkt liegenden Gitterpunkte ist  $x^2 + y^2$  nicht das 2-fache oder 3-fache oder ... von 13, sondern das kleinstmögliche (natürlich positive) Vielfache von 13, d.h. das 1-fache von 13. Angewandt auf den Gitterpunkt  $P(3, 2)$ , welcher einer der vier dem 0-Punkt am nächsten liegenden Gitterpunkte ist (zwei der übrigen drei nächstliegenden Gitterpunkte sind in der Abbildung ebenfalls gezeigt), heisst dies, dass  $3^2 + 2^2 = 1 \cdot 13$  ist, d.h.  $3^2 + 2^2 = 13$ , womit die Richtigkeit des 2-Quadrate-Satzes für  $p = 13$  nachgewiesen (und leicht verifizierbar) ist.



Dass das oben skizzierte Vorgehen nicht nur für  $p = 13$  funktioniert, sondern für alle Primzahlen der Form  $p = 4n + 1$ , sofern  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  jeweils geeignet gewählt werden (z.B. für  $p = 29$  wählt man  $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} := \begin{pmatrix} 0 \\ 29 \end{pmatrix}$ ), liegt überhaupt nicht auf der Hand, wird aber im Folgenden bewiesen werden.

## Geometrische Vorbereitung

Gitterpunktsatz von Minkowski: Es sei  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  ein abgeschlossener, konvexer Körper, symmetrisch bezgl. des Nullpunkts des Koordinatensystems, und  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  sei ein  $d$ -dimensionales Gitter (wobei wir das Volumen einer Elementarzelle von  $\Lambda$  mit  $\det(\Lambda)$  bezeichnen). Dann gilt: Falls  $\text{Vol}(C) \geq 2^d \cdot \det(\Lambda)$  ist, enthält  $C$  nebst dem Nullpunkt des Koordinatensystems mindestens noch einen weiteren Gitterpunkt von  $\Lambda$ .

Beweis: • Wenn die Mengen  $\frac{1}{2}C + u$ ,  $u \in \Lambda$ , paarweise disjunkt wären, dann müsste  $\text{Vol}(\frac{1}{2}C)$  kleiner als  $\det(\Lambda)$  sein; wegen  $\text{Vol}(\frac{1}{2}C) = \frac{1}{2^d} \cdot \text{Vol}(C)$  würde also gelten  $\text{Vol}(C) < 2^d \cdot \det(\Lambda)$ . Weil aber vorausgesetzt wird, dass  $\text{Vol}(C) \geq 2^d \cdot \det(\Lambda)$  ist, gibt es mindestens zwei Mengen  $\frac{1}{2}C + u_1$  und  $\frac{1}{2}C + u_2$  mit  $u_1 \neq u_2$ , deren Durchschnitt nicht leer ist und z.B. den Punkt  $v \in \mathbb{R}^d$  enthält.

• Es sei also  $v \in (\frac{1}{2}C + u_1) \cap (\frac{1}{2}C + u_2)$ . Daher ist  $v - u_1 \in \frac{1}{2}C$  und  $v - u_2 \in \frac{1}{2}C$ ; aus Punktsymmetriegründen gilt nebst Letzterem aber auch  $u_2 - v \in \frac{1}{2}C$ . Daher ist  $0 \neq u_2 - u_1 = (u_2 - v) + (v - u_1) \in \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C$ , was aus Konvexitätsgründen in  $C$  liegt. Also liegt nebst dem Nullpunkt des Koordinatensystems auch der Gitterpunkt  $u_2 - u_1 \neq 0$  in  $C$ . ■

## Algebraische Vorbereitung für den Beweis des 2-Quadrate-Satzes

Es sei  $p$  eine Primzahl; dann bezeichnen wir mit  $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, 2, \dots, (p - 1)\}$  den Körper der Restklassen modulo  $p$  und mit  $\mathbb{Z}_p^+ := \{1, 2, \dots, (p - 1)\}$  die multiplikative, abelsche Gruppe der positiven Restklassen modulo  $p$ . Wir erinnern an die grundlegende (aber nur mit einem gewissen Aufwand beweisbare) Tatsache, dass  $\mathbb{Z}_p^+$  eine zyklische Gruppe ist, d.h. dass es ein Element  $a \in \mathbb{Z}_p^+$  gibt, sodass  $\mathbb{Z}_p^+ = \{a, a^2 \bmod p, a^3 \bmod p, \dots, a^{p-1} \bmod p\}$  ist (wobei gemäss Kleinem Satz von Fermat  $a^{p-1} \bmod p = 1$  ist);  $a$  wird erzeugendes Element von  $\mathbb{Z}_p^+$  genannt. (Beispiele von Primzahlen  $p$  und kleinstem erzeugenden Element  $a_{\min} \in \mathbb{Z}_p^+$  sind  $(p, a_{\min}) = (2, 1), (3, 2), (5, 2), (7, 3), (11, 2), (13, 2), (17, 3), (19, 2)$ .) Der Kürze halber werden wir statt  $b \equiv c \pmod{p}$  nur  $b =_p c$  schreiben. Mit dieser Notation gilt der folgende Satz.

Satz: 1. Es sei  $w \in \mathbb{Z}_p^+$  gegeben. Dann hat für  $x \in \mathbb{Z}_p$  die quadratische Gleichung  $x^2 =_p w^2$  folgende Lösung: Für  $p = 2$  ist  $x = w$ ; für  $p > 2$  aber gibt's die zwei unterschiedlichen Lösungen

$$x_1 = w, \quad x_2 = p - w. \quad (1)$$

2. Wenn die Primzahl  $p$  von der Form  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist, existiert ein Element  $j \in \mathbb{Z}_p^+$  mit

$$j^2 =_p -1. \quad (2)$$

Beweis: 1.  $x^2 =_p w^2 \Rightarrow (x - w)(x + w) =_p 0$ ; weil  $\mathbb{Z}_p$  ein Körper ist, folgt, dass entweder  $x - w =_p 0$  ist ( $\Rightarrow x_1 = w$ ), oder dass  $x + w =_p 0$  ist ( $\Rightarrow x_2 + w = p$ , weil  $w > 0$  ist). Für  $p = 2$  kann  $w$  nur gleich 1 sein, und daraus folgt  $x_1 = x_2 = 1 \equiv w$ ; für  $p > 2$  aber kann  $x_1$  nicht gleich  $x_2$  sein, denn sonst wäre  $p$  gerade.

2. Wegen  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist  $\frac{p-1}{4} \in \mathbb{N}$ . Sei  $a$  ein erzeugendes Element von  $\mathbb{Z}_p^+$ . Wir setzen  $j := a^{\frac{p-1}{4}} \bmod p \in \mathbb{Z}_p^+$ , womit  $(j^2 \bmod p)^2 =_p a^{p-1} =_p 1$  ist. Wir sehen also, dass  $j^2 \bmod p \in \mathbb{Z}_p$  eine Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2 =_p 1$  ist; wegen  $p > 2$  besagt (1), dass entweder  $j^2 \bmod p = 1$  oder  $j^2 \bmod p = p - 1$  ist. Weil  $a$  ein erzeugendes Element von  $\mathbb{Z}_p^+$  ist und weil zur Berechnung von  $j^2$  der Exponent von  $a$  gleich  $\frac{p-1}{2}$  und daher kleiner als  $p - 1$  ist, kann  $j^2 \bmod p$  nicht gleich  $1$  sein; also gilt (2). ■

Anmerkung: Wegen (2) spielt  $j$  im Körper  $\mathbb{Z}_p$  eine Rolle, welche an die imaginäre Einheit  $i$  erinnert; aus diesem Grund haben wir (im Unterschied zu [1]) für  $j$  einen  $i$ -ähnlichen Buchstaben gewählt.

## 2-Quadrate-Satz, Beweis

2-Quadrate-Satz: Jede Primzahl  $p$  der Form  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , kann als Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen geschrieben werden.

Beweis: • Unter Verwendung der in (2) auftretenden Zahl  $j \in \mathbb{Z}_p^+$  betrachten wir dasjenige 2-dimensionale Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ , welches durch die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$  erzeugt wird. Offenbar ist  $\det(\Lambda) = p$ ; und ein beliebiger Gitterpunkt  $(x, y) \in \Lambda$  kann als  $x = \alpha$  und  $y = \alpha \cdot j + \beta \cdot p$  mit irgendwelchen ganzen Zahlen  $\alpha, \beta$  geschrieben werden, d.h. es gilt

$$y =_p x \cdot j. \tag{3}$$

- Als Nächstes betrachten wir die abgeschlossene Menge  $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 := 1.9p\}$ . Offensichtlich ist  $C$  konvex und symmetrisch bezgl. des Nullpunkts des Koordinatensystems, und  $\text{Vol}(C) = \pi r^2 = \pi \cdot 1.9p \cong 5.97p$ . Daher ist  $\text{Vol}(C) \cong 5.97p \geq 4p = 2^d \cdot \det(\Lambda)$ , womit der Gitterpunktsatz von Minkowski besagt, dass  $C$  noch (mindestens) einen von  $0$  verschiedenen Gitterpunkt  $(x', y') \in \Lambda$  ( $\Rightarrow x'^2 + y'^2 > 0$ ) enthält, welcher gemäss (3) und (2) Folgendes erfüllt:

$$x'^2 + y'^2 \stackrel{(3)}{\cong_p} x'^2 + x'^2 \cdot j^2 \stackrel{(2)}{\cong_p} 0 \tag{4}$$

(4) zeigt, dass für die zwei ganzen Zahlen  $x', y'$  die positive Zahl  $x'^2 + y'^2$  ein (natürlich positives) Vielfaches von  $p$  ist, wobei gemäss Definition von  $C$  der Wert von  $x'^2 + y'^2$  höchstens das 1.9-fache von  $p$  sein kann. Also ist  $x'^2 + y'^2 = p$ . ■

Anmerkung: Wir werden sehen, dass ein wesentlicher Teil des Beweises des 4-Quadrate-Satzes eng verwandt ist mit dem obigen Beweis. Daher wird es nicht sehr überraschen, dass wir als Nächstes eine auf den Beweis des 4-Quadrate-Satzes ausgerichtete und vom Kapitel „Algebraische Vorbereitung für den Beweis des 2-Quadrate-Satzes“ inspirierte Vorbereitung treffen.

## Algebraische Vorbereitung für den Beweis des 4-Quadrate-Satzes

Satz: Wenn  $p$  eine Primzahl ist, dann existieren Elemente  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_p$  mit

$$j_1^2 + j_2^2 =_p -1. \tag{5}$$

Beweis: • Für  $p = 2$  kann (5) z.B. mit  $j_1 = 0$  und  $j_2 = 1$  erfüllt werden.

- Und für  $p \geq 3$  ( $\Rightarrow p$  ist ungerade) können wir wie folgt argumentieren:

- Z.B. anhand einer der binomischen Formeln sieht man sofort ein, dass  $(p-1)^2 \equiv_p 1^2$ ,  $(p-2)^2 \equiv_p 2^2$ ,  $(p-3)^2 \equiv_p 3^2$ , ... ist. Daher, und weil  $(p-1)$  gerade ist, gilt:

$$\begin{aligned} & |\{1^2 \bmod p, 2^2 \bmod p, \dots, (p-2)^2 \bmod p, (p-1)^2 \bmod p\}| \\ &= \left| \{1^2 \bmod p, 2^2 \bmod p, \dots, \binom{p-1}{2}^2 \bmod p\} \right| \leq \frac{p-1}{2} \end{aligned}$$

Die eben betrachteten Zahlen  $i^2 \bmod p$ ,  $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ , sind ...

- ▶ paarweise verschieden (denn sonst gäbe es ein Paar  $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$  mit  $i \neq j$  und  $i^2 \equiv_p j^2$  <sup>(1)</sup>  
 $\Rightarrow$  entweder  $i = j$  (offensichtlich unmöglich) oder  $i = p - j$ , was aber wegen  $i + j < p$  ebenfalls unmöglich ist);
- ▶ ungleich 0 (denn alle  $i$  sind in  $\mathbb{Z}_p^+$ ).

Also enthält die Menge  $M_1 := \{0^2 \bmod p, 1^2 \bmod p, 2^2 \bmod p, \dots, (p-2)^2 \bmod p, (p-1)^2 \bmod p\} \subset \mathbb{Z}_p$  genau  $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$  Elemente.

- Auf analoge Weise sieht man ein, dass auch die Menge  $M_2 := \{(-0^2 - 1) \bmod p, (-1^2 - 1) \bmod p, (-2^2 - 1) \bmod p, \dots, (-(p-2)^2 - 1) \bmod p, (-(p-1)^2 - 1) \bmod p\} \subset \mathbb{Z}_p$  genau  $\frac{p+1}{2}$  Elemente enthält.
- Weil  $\mathbb{Z}_p$  genau  $p$  Elemente enthält, ist es daher unmöglich, dass  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  ist. Also gibt es ein Element  $j_1^2 \bmod p$  von  $M_1$  und ein Element  $(-j_2^2 - 1) \bmod p$  von  $M_2$  (mit  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_p$ ), welche übereinstimmen, d.h. mit  $j_1^2 \equiv_p -j_2^2 - 1$ ; und daraus folgt (5). ■

## 4-Quadrate-Satz, Beweis

4-Quadrate-Satz: Jede natürliche Zahl kann als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden.

Beweis: • Teil 1: Wir zeigen, dass jede Primzahl als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden kann. Nun, der Fall  $p = 2$  ist rasch erledigt, denn  $p = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ ; daher beschäftigen wir uns im Folgenden mit dem Fall  $p \geq 3$ :

- Unter Verwendung der in (5) auftretenden Zahlen  $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_p$  betrachten wir das 4-dimensionale Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^4$ , welches durch die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ j_2 \\ -j_1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$  erzeugt wird. Es ist  $\det(\Lambda) = p^2$ ; und ein beliebiger Gitterpunkt  $(x, y, z, w) \in \Lambda$  hat die Form  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $z = \alpha \cdot j_1 + \beta \cdot j_2 + \gamma \cdot p$  und  $w = \alpha \cdot j_2 - \beta \cdot j_1 + \delta \cdot p$  für irgendwelche  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ , d.h. es gilt

$$z \equiv_p x \cdot j_1 + y \cdot j_2 \quad \text{und} \quad w \equiv_p x \cdot j_2 - y \cdot j_1 \quad . \quad (6)$$

- Jetzt betrachten wir die abgeschlossene Menge  $C := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2 := 1.9p\}$ , welche konvex und symmetrisch bezgl. des Nullpunkts des Koordinatensystems ist; offenbar ist  $\text{Vol}(C) = \frac{\pi^2 r^4}{2} = \frac{\pi^2 \cdot 1.9^2}{2} p^2 \cong 17.8 p^2$ .

- Also ist  $\text{Vol}(C) \cong 17.8 p^2 \geq 16 p^2 = 2^d \cdot \det(\Lambda)$ , womit der Gitterpunktsatz von Minkowski besagt, dass  $C$  noch (mindestens) einen von  $0$  verschiedenen Gitterpunkt  $(x', y', z', w') \in \Lambda$  ( $\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 > 0$ ) enthält, welcher gemäss (6) und (5) folgende Eigenschaft besitzt:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 &\stackrel{(6)}{\cong_p} x'^2 + y'^2 + (x' \cdot j_1 + y' \cdot j_2)^2 + (x' \cdot j_2 - y' \cdot j_1)^2 \\ &= (x'^2 + y'^2) \cdot (1 + j_1^2 + j_2^2) \stackrel{(5)}{\cong_p} 0 \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

- Aufgrund von (7) ist für die vier ganzen Zahlen  $x', y', z', w'$  die positive Zahl  $x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2$  ein (sicherlich positives) Vielfaches von  $p$ ; gemäss Definition von  $C$  ist  $x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2$  aber höchstens das 1.9-fache von  $p$ , also ist  $x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = p$ .
- Teil 2: Wir zeigen zuerst, dass wenn  $n_1, n_2$  natürliche Zahlen sind, welche je als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen, d.h. als  $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2$  mit  $i \in \{1, 2\}$ , geschrieben werden können, dies auch für ihr Produkt  $n_1 \cdot n_2$  gilt. Beweis:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_2 &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)^2 \\ &\quad + (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2)^2 + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 \end{aligned}$$

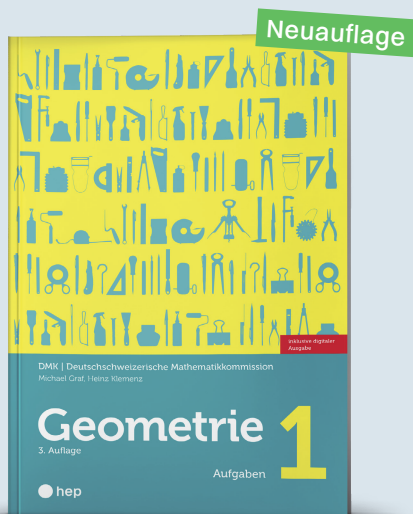
Iterativ folgt daraus sofort: Wenn die natürlichen Zahlen  $n_i$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  je als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden können, dann gilt das auch für ihr Produkt  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_m$ .

- Teil 3: Die kleinste natürliche Zahl  $1$  kann offensichtlich als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden:  $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ . Und jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  ist ...
  - entweder prim und kann, gemäss Teil 1 des Beweises, daher als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden;
  - oder sie ist das Produkt von mindestens zwei Primzahlen und kann damit (vgl. Teile 1, 2 des Beweises) ebenfalls als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen geschrieben werden. ■

## Referenz

- [1] J. Pach, P.K. Agarwal: Combinatorial Geometry. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization (1995)

# Neuauflagen der DMK



DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission  
Michael Graf, Heinz Klemenz

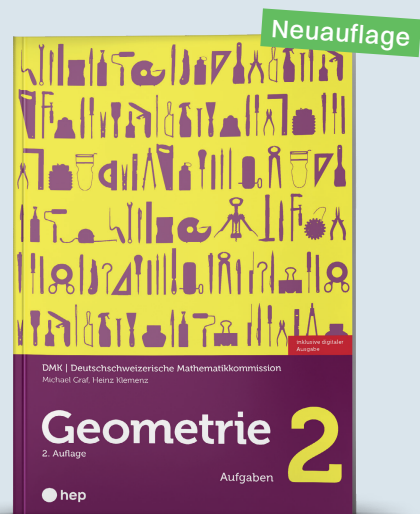
## Geometrie 1 (Print inkl. E-Book Edubase)

Aufgaben

ISBN 978-3-0355-2509-0 | CHF 32.-

## Kommentierte Lösungen

ISBN 978-3-280-04038-6 | CHF 87.-



DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission  
Michael Graf, Heinz Klemenz

## Geometrie 2 (Print inkl. E-Book Edubase)

Aufgaben

ISBN 978-3-0355-2561-8 | CHF 32.-

## Kommentierte Lösungen

ISBN 978-3-0355-2563-2 | CHF 87.-

→ Erscheint im Mai 2024

## Begegnungstag 2024 in Bern

Weiterbildungsangebot für Lehrpersonen

**Datum** Samstag, 9. März 2024

**Zeit** 08.15 bis 15.00 Uhr

Unter [hep-verlag.ch/begegnungstag](https://hep-verlag.ch/begegnungstag) werden weitere Informationen aufgeschaltet, sobald diese bekannt sind. Tragen Sie dort Ihre Mailadresse ein, um über Neuigkeiten zum Begegnungstag informiert zu werden.

# SAVE THE DATE

Die eintägige Veranstaltung mit zahlreichen interessanten und abwechslungsreichen Referaten, Workshops und Präsentationen bietet Ihnen die Gelegenheit, Ihr didaktisches und methodisches Wissen zu vertiefen.

Die Teilnahme am Begegnungstag ist kostenlos und kann an die berufliche Weiterbildung angerechnet werden.

Peter Gallin  
peter@gallin.ch

# Summe der Quadrate der Abstände von einem Umkreispunkt zu den Seitengeraden eines regelmässigen n-Ecks

Gegeben sei ein regelmässiges  $n$ -Eck ( $n > 2$ ), das im Einheitskreis mit Zentrum  $O$  eingeschrieben ist. Gesucht ist die Summe  $S$  aller Quadrate der Abstände, die von einem beliebigen Punkt  $P$  des Einheitskreises aus zu den Seitengeraden des Vielecks gemessen werden:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} d_k^2$$

Da wir mit komplexen Zahlen rechnen werden, ist eine mathematische Vorbereitungen notwendig.

## Summenformeln

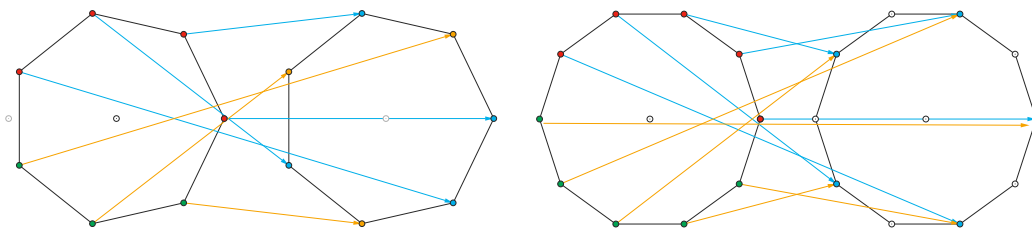
Wir betrachten in der komplexen Zahlenebene für  $\phi = \frac{2\pi}{n}$  und  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\lambda_k = e^{ik\phi}$ , die ein regelmässiges  $n$ -Eck im Einheitskreis bilden. Es gilt  $\lambda_k \lambda_1 = \lambda_{k+1}$ , so dass für die Summe  $s = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$  gilt  $s\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1}$ . Da nun  $\lambda_n = 1 = \lambda_0$ , folgt  $s\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$  und somit  $s = s\lambda_1$  oder  $s(1 - \lambda_1) = 0$ . Da  $\lambda_1 \neq 1$ , folgt  $s = 0$ , was physikalisch klar ist, da der Schwerpunkt von  $n$  Einheitsmassen in den Ecken des  $n$ -Ecks im Ursprung liegt. Wir halten für beliebiges  $\beta$  fest:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\cos(k\phi + \beta) + i \cdot \sin(k\phi + \beta)) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k\phi + \beta)} = e^{i\beta} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\phi} = e^{i\beta} \cdot s = 0$$

Das bedeutet für den Real- und Imaginärteil  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\phi + \beta) = 0$  und  $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi + \beta) = 0$ . Nun gilt aber auch für  $n > 2$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(k\phi + \beta)})^2 = e^{2i\beta} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ik\phi})^2 = 0.$$

Anhand der folgenden Bilder macht man sich klar, dass das Verdoppeln der Zentriwinkel bei allen Ecken eines regelmässigen  $n$ -Ecks, also beim Quadrieren der  $n$ -ten Einheitswurzeln, im Fall  $n$  ungerade die Ecken des gleichen regelmässigen  $n$ -Ecks erreicht werden und die Summe demzufolge Null ist. Im Fall, dass  $n$  gerade ist, werden die Ecken eines  $\frac{n}{2}$ -Ecks doppelt belegt, was wiederum die Summe Null zur Folge hat. Natürlich könnte man diese Tatsache auch rein rechnerisch nachweisen.

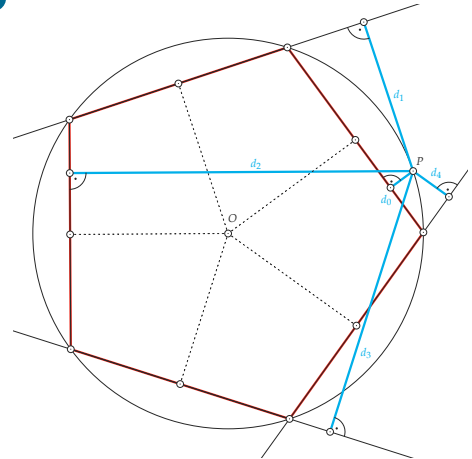


Damit erhalten wir einerseits

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \cdot 2(k\phi + \beta)} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2(k\phi + \beta)) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2(k\phi + \beta)) = 0$$

und andererseits

$$\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(k\phi + \beta)})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(k\phi + \beta) + i \sin(k\phi + \beta))^2 = 0 \quad \text{oder}$$



$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi + \beta) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi + \beta) + 2i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi + \beta) \cos(k\phi + \beta) = 0 .$$

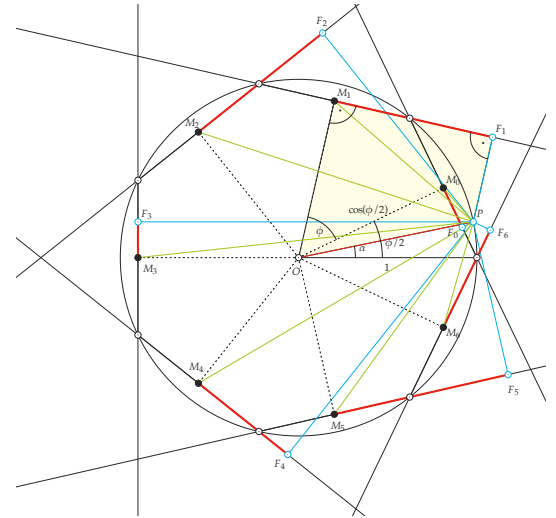
Der dritte Summand  $2i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi + \beta) \cos(k\phi + \beta)$  kann als  $i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2(k\phi + \beta))$  geschrieben werden und ist gemäss der ersten obigen Folgerung gleich Null. So erhalten wir die bemerkenswerte Beziehung, dass die Summen für Sinus und für Cosinus gleich sind:  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi + \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi + \beta)$ . Zusammen mit  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi + \beta) + \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi + \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$  folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi + \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi + \beta) = \frac{n}{2} .$$

**Berechnung von  $T$  und  $S$**

Kehren wir zurück zum regelmässigen  $n$ -Eck, dessen Ecken die  $n$ -ten Einheitswurzeln in der komplexen Ebene sind. Zuerst berechnen wir in der nebenstehenden Figur die Summe  $T$  der Quadrate der  $k$  rot eingezeichneten Strecken  $M_k F_k$ , welche zwischen den Seitenmitten  $M_k$  und den Lotfusspunkten  $F_k$  liegen. Der Punkt  $P$  habe den Winkel  $\alpha$  gegenüber der reellen Achse. Da  $|OP| = 1$  sieht man am besten im Fall  $k = 1$  mit Hilfe des gelben rechtwinkligen Trapezes, dass  $|M_1 F_1| = \sin(\frac{3\phi}{2} - \alpha)$ . Für  $k = 2$  ist der Winkel  $\frac{5\phi}{2} - \alpha$  bereits stumpf. Trotzdem ist  $|M_2 F_2| = \sin(\frac{5\phi}{2} - \alpha)$ . Die Formel gilt auch für  $k = 0$  und die übrigen  $k$ . Somit sind die Längen der roten Strecken  $\sin(\frac{\phi}{2} - \alpha), \sin(\frac{3\phi}{2} - \alpha), \sin(\frac{5\phi}{2} - \alpha), \dots, \sin(\frac{(2n-1)\phi}{2} - \alpha)$ . So erhalten wir mit  $\beta = \frac{\phi}{2} - \alpha$  und der vorangehenden Berechnung

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left( \frac{(2k+1)\phi}{2} - \alpha \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left( k\phi + \frac{\phi}{2} - \alpha \right) = \frac{n}{2} .$$



Nun ist das Trägheitsmoment  $J_O$  der  $n$  Einheitsmassen in den Seitenmitten (schwarze Punkte) bezüglich  $O$  gleich  $J_O = n \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2}$  und bezüglich  $P$  nach dem Satz von Steiner

$$J_P = n \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2} + n \cdot 1^2 = n(1 + \cos^2 \frac{\phi}{2}) .$$

Es ist aber  $J_P$  gleich der Summe der Quadrate der grün eingezeichneten Strecken, da wir Einheitsmassen auf die schwarzen Punkte gesetzt haben. Daher ist die Summe der Quadrate der blauen Lotstrecken, also  $S$ , nach dem Satz von Pythagoras gleich die Summe der grünen Quadrate minus die Summe der roten Quadrate.

$$S = n(1 + \cos^2 \frac{\phi}{2}) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + n \cos^2 \frac{\phi}{2} .$$

Im Spezialfall  $n = 3$  ist  $\phi = 120^\circ$  und somit  $S = \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$  also  $S = h^2$  ( $h =$  Höhe des Dreiecks).

Die gefundene Formel für  $S$  könnte auch als Trägheitsmoment interpretiert werden, nämlich der  $n$  Einheitsmassen bezüglich eines beliebigen Punktes  $Q$ , der auf einem zum Einheitskreis konzentrischen Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  liegt. Ausgehend von  $J_P$  wäre dann wiederum nach dem Satz von Steiner

$$J_Q = n \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2} + n \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{n}{2} + n \cos^2 \frac{\phi}{2} .$$

Beat Jaggi  
jaggibe@outlook.com

# Rechendreiecke/Rechenvierecke und elementare Geometrie

## Rechendreiecke/Rechenvierecke

Rechendreiecke wurden erstmals im Jahre 1975 in einem Artikel von A. McIntosh und D. Quadling beschrieben (siehe [4]). Die ursprüngliche englische Bezeichnung ist **arithmogons**.

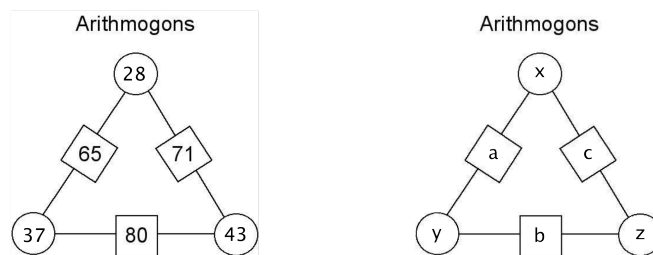


Abbildung 1

Das Grundprinzip ist einfach: Es sind stets sechs Zahlen (oder Terme) im Spiel:

In Abbildung 1 links ist  $28 + 37 = 65$ ,  $37 + 43 = 80$  und  $43 + 28 = 71$ .

Allgemein muss  $x + y = a$ ,  $y + z = b$  und  $z + x = c$  gelten (siehe Abbildung 1 rechts).

In Schweizer Mathematik-Lehrmitteln kommen Rechendreiecke insbesondere im Zahlenbuch [1] und im mathbuch [2] als Aufgabenformate häufig vor. Die Darstellung ist etwas anders, das Prinzip ist gleich.

Von den sechs Zahlen sind in der Regel drei gegeben, die restlichen drei sind gesucht.

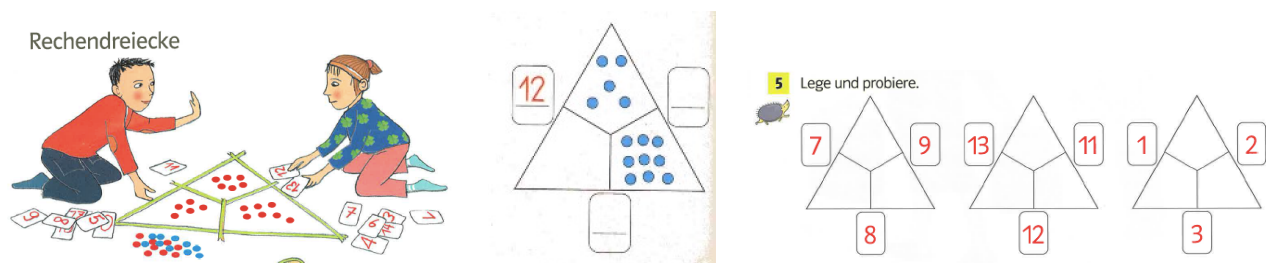


Abbildung 2: Im Schweizer Zahlenbuch 1 werden Anzahlen von Plättchen addiert.

Wie Abbildung 2 rechts suggeriert, gibt es nur einen wirklich interessanten Fall: Die 'Mittelzahlen'  $a, b, c$  sind gegeben, die 'Eckzahlen'  $x, y, z$  sind gesucht.

Das Prinzip der Rechendreiecke lässt sich in natürlicher Weise auf Vier- und  $n$ -Ecke übertragen.

Es zeigt sich, dass zwei (elementar-)geometrische Probleme auf gleiche oder ähnliche Gleichungssysteme führen, wie sie bei Rechendreiecken und Rechenvierecken auftreten.

**Problem 1**

- (a) Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten(-längen)  $a, b$  und  $c$ . Die Berührungspunkte des Inkreises teilen jede Seite des Dreiecks in zwei Abschnitte. Gesucht sind die Längen dieser Abschnitte?
- (b) Gegeben ist ein Tangentenviereck mit den Seiten(-längen)  $a, b, c$  und  $d$ . Die Berührungspunkte des Inkreises teilen jede Seite des Vierecks in zwei Abschnitte. Gesucht sind die Längen dieser Abschnitte?
- (c) Analoge Frage wie bei (a) und (b) für ein  $n$ -Eck mit Inkreis.

Die zwei Tangentenabschnitte von einem Punkt ausserhalb an einen Kreis sind gleich lang.

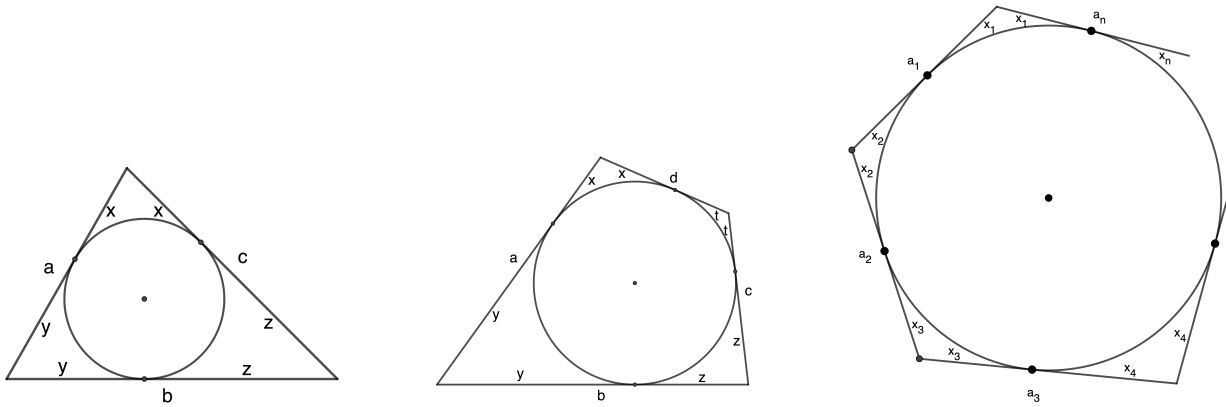


Abbildung 3

Mit den Bezeichnungen von Abbildung 3 ergeben sich deshalb die selben Gleichungssysteme wie bei den Rechendreiecken/-vielecken!

Dreieck	Viereck	$n - \text{Eck}$
$x + y = a$	$x + y = a$	$x_1 + x_2 = a_1$
$y + z = b$	$y + z = b$	$x_2 + x_3 = a_2$
$z + x = c$	$z + t = c$	$x_3 + x_4 = a_3$
	$t + x = d$	$x_4 + x_5 = a_4$
		$\vdots$
		$x_{n-1} + x_n = a_{n-1}$
		$x_n + x_1 = a_n$

**Rechendreiecke**

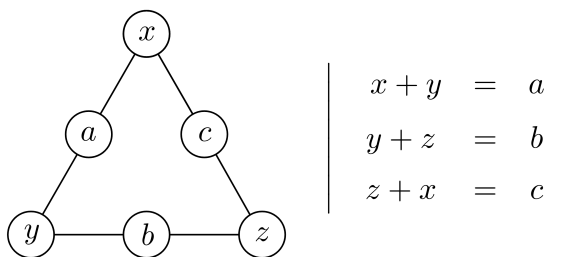


Abbildung 4

Die (eindeutig bestimmte) Lösung ist  $x = \frac{a - b + c}{2}$  ;  $y = \frac{b - c + a}{2}$  ;  $z = \frac{c - a + b}{2}$

Man sieht, dass  $x, y$  und  $z$  genau dann positiv sind, wenn die Dreiecksungleichungen  $a < b + c$ ,  $b < a + c$  und  $c < a + b$  erfüllt sind. Das beweist auch, dass jedes Dreieck einen Inkreis besitzt.

**Rechenvierecke**

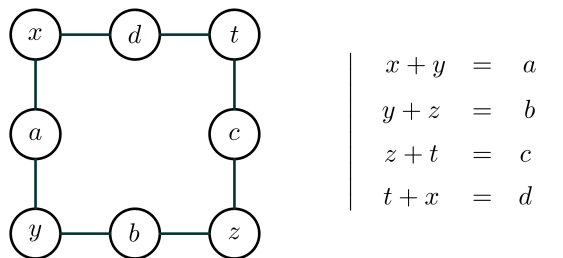


Abbildung 5

Zählt man die erste und die dritte, resp. die zweite und die vierte Gleichung zusammen, dann wird

$$x + y + z + t = a + c \quad \text{und} \quad y + z + t + x = b + d$$

Also muss  $a + c = b + d$  gelten. Das ist die wohlbekannte Bedingung an die Seitenlängen eines Tangentenvierecks, also eines Vierecks, das einen Inkreis besitzt.

Jedes konvexe Viereck mit Seitenlängen  $a, b, c, d$  und  $a + c = b + d$  besitzt einen Inkreis.

**Rechenvielecke**

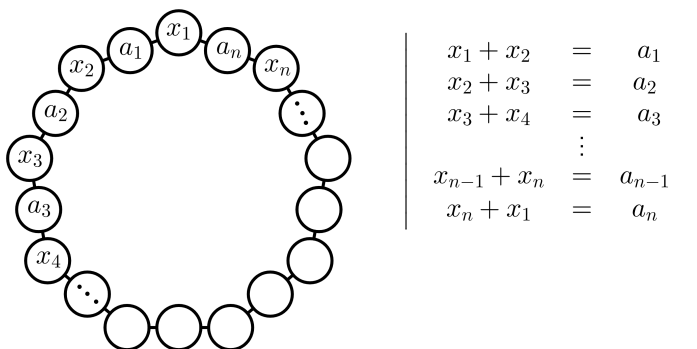


Abbildung 6

Für  $n$  ungerade ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, siehe zum Beispiel [3].

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n}{2} \\ x_2 &= \frac{a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1} - a_n + a_1}{2} \\ x_3 &= \frac{a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n - a_1 + a_2}{2} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{a_n - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

Für  $n$  gerade hat das Gleichungssystem von Abbildung 6 nur dann Lösungen, wenn die Bedingung

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n = 0 \quad \text{erfüllt ist.}$$

In diesem zweiten Fall darf eine der Unbekannten, zum Beispiel  $x_1$  frei gewählt werden. Die anderen Unbekannten ergeben sich durch

$$x_2 = a_1 - x_1; \quad x_3 = a_2 - a_1 + x_1; \quad x_4 = a_3 - a_2 + a_1 - x_1; \quad \dots; \quad x_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - \cdots + a_1 - x_1$$

Ein Vieleck mit Seitenlängen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  besitzt in beiden Fällen nur dann einen Inkreis, wenn eine Lösung  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  existiert, bei der alle  $x_k$  positiv sind.

Für  $n$  ungerade sind diese Inkreis-Konfigurationen eindeutig bestimmt, für  $n$  gerade liegt eine einparametrische Schar von Vielecken vor. Für Details und Beweise siehe [3].

**Problem 2**

Gegeben sind  $n$  Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  in der Ebene. Gesucht ist ein  $n$ -Eck (ein geschlossener Streckenzug) mit Eckpunkten  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  so, dass

- $A_1$  der Mittelpunkt der Seite  $X_1X_2$ ,
- $A_2$  der Mittelpunkt der Seite  $X_2X_3$ ,
- $A_3$  der Mittelpunkt der Seite  $X_3X_4$ ,
- $\vdots$
- $A_{n-1}$  der Mittelpunkt der Seite  $X_{n-1}X_n$ ,
- $A_n$  der Mittelpunkt der Seite  $X_nX_1$  ist. (Abbildung 7 links)

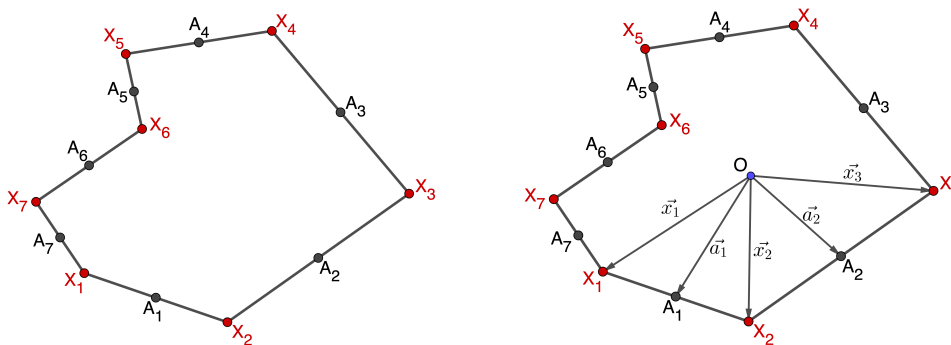


Abbildung 7: Hier ist  $n = 7$

Wir führen in der Ebene ein Koordinatensystem mit Ursprung  $O$  ein (Abbildung 7 rechts).  
Mit den Bezeichnungen

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}; \quad \vec{x}_1 = \overrightarrow{OX_1}; \quad \vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}; \quad \vec{x}_2 = \overrightarrow{OX_2}; \quad \dots; \quad \vec{a}_n = \overrightarrow{OA_n}; \quad \vec{x}_n = \overrightarrow{OX_n}$$

gilt

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2} = \vec{a}_1 \\ \frac{\vec{x}_2 + \vec{x}_3}{2} = \vec{a}_2 \\ \frac{\vec{x}_3 + \vec{x}_4}{2} = \vec{a}_3 \\ \frac{\vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n}{2} = \vec{a}_{n-1} \\ \frac{\vec{x}_n + \vec{x}_1}{2} = \vec{a}_n \end{array} \right| \iff \left| \begin{array}{l} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = 2\vec{a}_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 2\vec{a}_2 \\ \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = 2\vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n = 2\vec{a}_{n-1} \\ \vec{x}_n + \vec{x}_1 = 2\vec{a}_n \end{array} \right|$$

Es ist, bis auf die Vektorpfeile und die Faktoren 2, das gleiche System wie in Abbildung 6.  
Wir können die Lösung(en) übertragen.

Ist  $n$  gerade, muss wie vorher

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \dots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n = \vec{0}$$

gelten. Wie oben kann zum Beispiel  $\vec{x}_1$  resp. der Punkt  $X_1$  beliebig gewählt werden.

Für  $n = 4$  heisst das

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \vec{a}_4 = 0 \iff \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_3 - \vec{a}_4 \iff \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}.$$

Das ist die Aussage des Satzes von Varignon: Die Seitenmitten eines beliebigen ebenen Vierecks bilden ein Parallelogramm, siehe Abbildung 8.

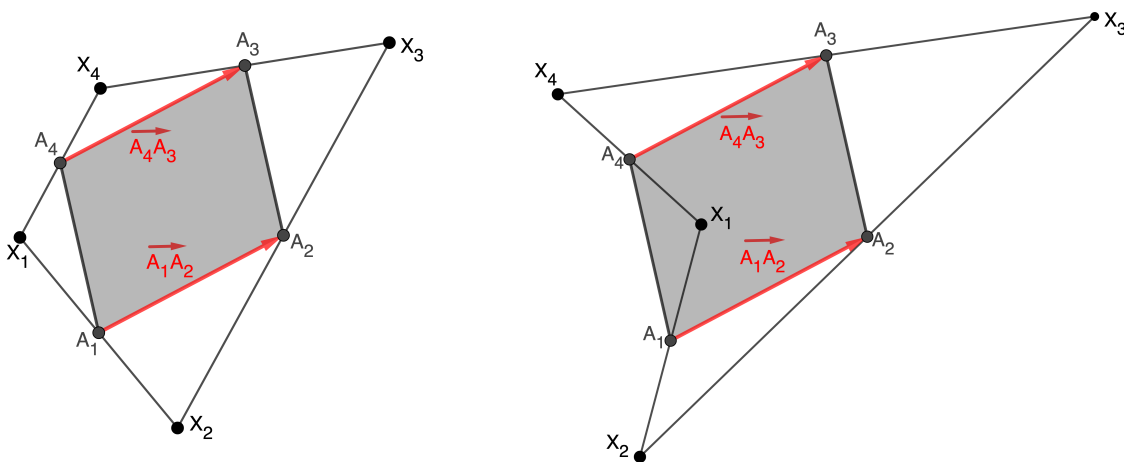


Abbildung 8: Zwei Realisierungen eines Vierecks  $X_1X_2X_3X_4$   
mit den vorgegebenen Seitenmitten  $A_1, A_2, A_3, A_4$

Für (fast) jeden Punkt  $X_1$  der Ebene ergibt sich ein entsprechendes Viereck.

Ist  $n$  ungerade, dann lässt sich die eindeutige Lösung des Systems angeben.

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \cdots - \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n \\ \vec{x}_2 &= \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 - \cdots - \vec{a}_n + \vec{a}_1 \\ \vec{x}_3 &= \vec{a}_3 - \vec{a}_4 + \vec{a}_5 - \cdots - \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ &\vdots \\ \vec{x}_{n-1} &= \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n + \vec{a}_1 - \cdots - \vec{a}_{n-3} + \vec{a}_{n-2} \\ \vec{x}_n &= \vec{a}_n - \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \cdots - \vec{a}_{n-2} + \vec{a}_{n-1} \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Vektoren  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  mit Hilfe der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  (resp. der Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) berechnen und damit auch die Punkte  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Betrachten wir noch einmal die beiden Gleichungssysteme

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{array} \right| \quad \text{resp.} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = 2\vec{a}_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 2\vec{a}_2 \\ \vec{x}_3 + \vec{x}_4 = 2\vec{a}_3 \\ \vdots \\ \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n = 2\vec{a}_{n-1} \\ \vec{x}_n + \vec{x}_1 = 2\vec{a}_n \end{array} \right|$$

Nehmen wir an,  $n$  sei ungerade, so dass es genau eine Lösung gibt. Diese Lösung kann mittels Matrizen und deren Inversen, mit Matrizen und Zeilenumformungen, mit der Cramerschen Regel, etc. gefunden werden.

Für die beiden obigen Systeme bietet sich aber ein viel 'primitiverer' Lösungsweg an. Wir erläutern das Vorgehen am System rechts, lassen aber aus Gründen der Übersichtlichkeit die Pfeile weg.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ x_3 + x_4 = 2a_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{array} \right|$$

Wir wählen für  $x_1$  eine beliebige Zahl  $y_1$  und berechnen dann sukzessive

$$\begin{aligned} y_2 &= 2a_1 - y_1 \\ y_3 &= 2a_2 - 2a_1 + y_1 \\ y_4 &= 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 - y_1 \\ &\vdots \\ y_n &= 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} - \dots - 2a_1 + y_1 \\ y_{n+1} &= 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - \dots + 2a_1 - y_1 \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass  $x_1 = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{n-1} + a_n$  (siehe oben) gerade das arithmetische Mittel von  $y_{n+1}$  und  $y_1$  ist!

Die Tatsache überträgt sich nun in besonders schöner Art und Weise auch auf das geometrische Problem 2: Die Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  seien gegeben. Gesucht ist ein  $n$ -Eck  $X_1X_2X_3 \dots X_n$  so, dass  $A_i$  der Mittelpunkt der Strecke  $X_iX_{i+1}$  ist mit  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  und  $n + 1 \equiv 1 \pmod n$ .

Wir wählen einen beliebigen Punkt  $Y_1$  und spiegeln diesen zuerst an  $A_1$ , den Bildpunkt  $Y_2$  an  $A_2$ , dann  $Y_3$  an  $A_3$ , ...,  $Y_n$  an  $A_n$  und erhalten schliesslich einen Punkt  $Y_{n+1}$ . Weil  $n$  ungerade ist, haben wir eine ungerade Anzahl von Punktspiegelungen ausgeführt. Die Verkettung einer ungeraden Anzahl von Punktspiegelungen ist wieder eine Punktspiegelung! Der Spiegelpunkt, also das Zentrum dieser Punktspiegelung, muss der Mittelpunkt der Strecke  $Y_1Y_{n+1}$  sein. Dieser Mittelpunkt ist der gesuchte Punkt  $X_1$ . Die Punkte  $X_2, X_3, \dots, X_n$  ergeben sich dann wieder durch Punktspiegelungen.

Im nachfolgenden Beispiel ist  $n = 5$ . Die Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  sind gegeben.

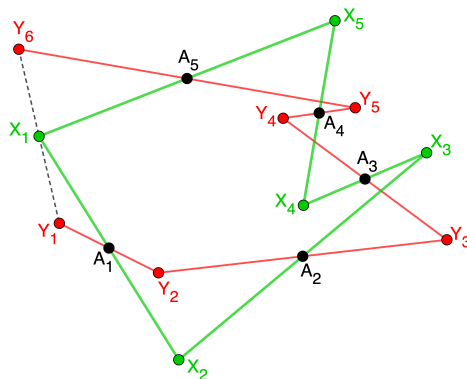


Abbildung 9:  $Y_1$  ist beliebig gewählt.  $X_1$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $Y_1Y_6$ . Die Punkte  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  sind die Eckpunkte des gesuchten Fünfecks.

### Literaturverzeichnis

- [1] Affolter W. et al., *Schweizer Zahlenbuch*, Klett und bmv, 1995, Überarbeitung 2010
- [2] Affolter W. et al., *mathbu.ch*, Klett und bmv, 2003
- [3] Jaggi B., *Inkreis-Konfigurationen ebener Vielecke*, Elemente der Mathematik 77 (2022), Seiten 63-74
- [4] McIntosh A. und Quadling D., *Arithmogons*, Mathematics Teaching 70, p 18-23

## **Statistische Tests leicht gemacht: Eine praxisnahe Einführung für (unbedarfte) Mathematiklehrpersonen**

Mathematiklehrpersonen meiden häufig das Themengebiet der statistischen Testverfahren. Die Gründe hierzu sind vielfältig. Heute sind jedoch genau Grundlagen in diesem Themenkomplex zunehmend gefragt, da unter anderem die Behandlung von Binomialtests im Grundlagenfach im Kanon gefordert wird. Ebenso sind die Anforderungen bei der Betreuung von Matura- und Projektarbeiten hinsichtlich statistischer Auswertungen drastisch gestiegen, ein Trend, der sich kontinuierlich fortsetzt.

Unser Kurs zielt darauf ab, diesen grundlegenden Bedarf zu decken. Die Teilnehmer/innen erhalten einen praxisnahen Einblick in das Themengebiet der statistischen Tests, einen Grundstock an Unterrichtsmaterial auf Grundlagenfach-Niveau und Ideen zur Integration von statistischen Tests in Maturaarbeiten. Dies soll Mathematiklehrpersonen in ihrem Schulalltag unterstützen.

Die Kursleiterin ist keine Statistikerin und hat vor ein paar Jahren aufgehört, sich dem Themengebiet zu entziehen. Ihr erklärtes Ziel ist es, anderen Lehrpersonen den spannenden Einstieg in ein eher vernachlässigtes Thema praxisnah zu erleichtern.

### Kursinhalte:

- Klärung grundlegender Begriffe anhand des Binomialtests
- Theorie des Fischer-Tests
- Theorie des Wilcoxon-Mann-Whitney-Rangsummen-Tests
- Anwendung der open source Statistik-Software R zur Berechnung von Hypothesentests mithilfe von Code-Vorlagen
- Interpretation der R-Ergebnisse
- Sichtbarmachen der Anwendung anhand ausgewählter Maturaarbeiten

Hinweis: Keine Vorkenntnisse in R erforderlich, es wird mit Code-Vorlagen gearbeitet

Referentin: Daniela Grawehr, Mathematiklehrperson Stiftungsschule Engelberg, Fachdidaktikerin Mathematik Universität Zürich

Zielpublikum: Mathematik-Lehrkräfte der Sekundarstufe II, die eine leichte und praxisnahe Einführung in statistische Testmethoden wünschen

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),  
Angela Vivot (DMK)

Datum und Zeit: Montag, 25. März 2024, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr  
Ab 9:00 Begrüssungskaffee

Kursort: ETH Zürich

Kurskosten: Fr. 200.- (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)  
Fr. 150.- für VSMP-Mitglieder und Studierende

Anmeldung: <https://math.ch/DMK2024a/>  
Anmeldeschluss: 15. März 2024



Hans Ulrich Keller  
 ehem. MNG Rämibühl, hukkeller@bluewin.ch

# Wieviel Raum beansprucht ein rotierender Würfel?

Ein Würfel mit einer Kantenlänge 1 wird um eine seiner Raumdiagonalen rotiert.

Welches Volumen  $V = V_1 + V_2 + V_3$  wird durch den dabei entstehenden Rotationskörper beansprucht?

Die Würfeldiagonalen haben alle je die Länge  $\sqrt{3}$ . Als Rotationsachse wählen wir die  $x$ -Achse vom Würfelpunkt  $O(0,0,0)$  zum diagonal gegenüberliegenden Würfelpunkt  $Z(\sqrt{3},0,0)$ . Die drei nun am nächsten beim Ursprung liegenden anderen Würfelpunkte  $E$ ,  $F$  und  $G$  bilden ein gleichseitiges Dreieck, welches in einer Ebene senkrecht zur  $x$ -Achse steht, wie dies aus folgender Figur 1 ersichtlich wird:

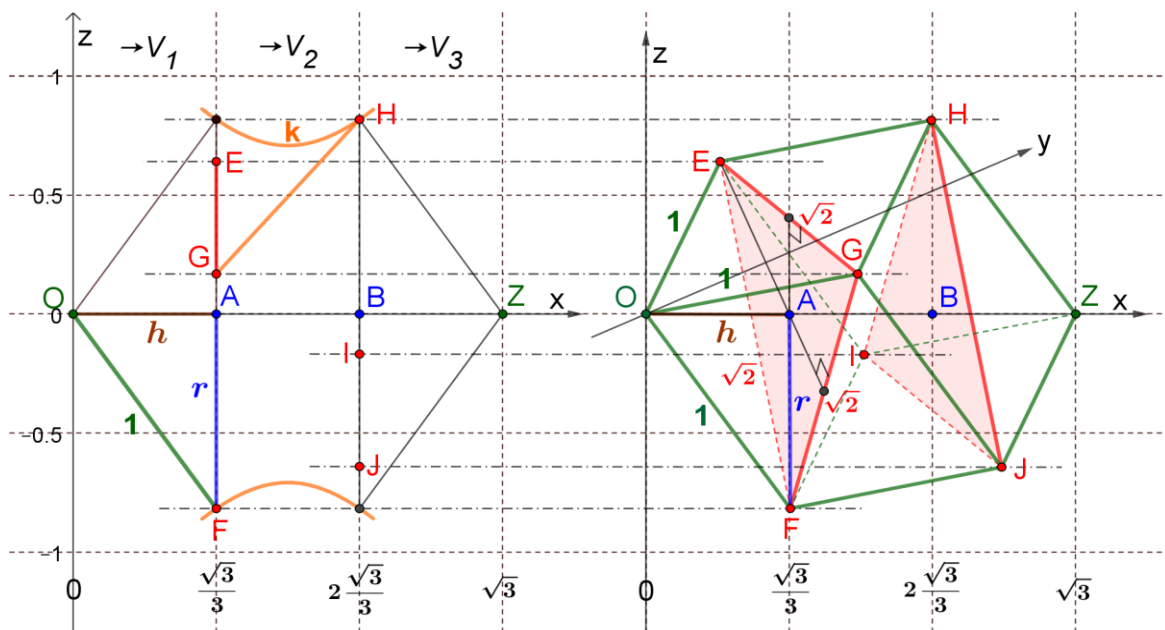


Fig. 1: Projektion auf die  $x-z$ -Ebene und eine räumliche Darstellung des rotierenden Würfels.

Die drei Punkte  $E$ ,  $F$  und  $G$  haben untereinander einen Abstand von je  $\sqrt{2}$  und je einen Abstand 1 zum Würfelpunkt  $O$  im Ursprung. Die Ebene dieser drei Punkte hat somit einen Abstand  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$  zum Ursprung. Die anderen drei ebenfalls nicht auf der  $x$ -Achse liegenden Würfelpunkte  $H$ ,  $I$  und  $J$  liegen in einer ebenfalls senkrecht zur  $x$ -Achse stehenden Ebene, die einen Abstand  $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$  vom Ursprung hat.

Der rotierende Würfelteil im ersten Drittel der Würfeldiagonale beansprucht bei der Rotation um diese Achse das Volumen eines Kegels mit der Höhe  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$  und dem Radius  $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , was ein Kegelvolumen von

$V_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$  ergibt. Das gleiche Volumen  $V_3 = V_1$  nimmt der dazu kongruente Kegel im dritten Drittel der Diagonale ein.

Etwas schwieriger ist es, das Volumen  $V_2$  des Rotationskörpers im Mitteldrittel des rotierenden Würfels zu berechnen. Dieses ist durch eine Kurve begrenzt, welche in der obigen Figur 1 mit  $k$  bezeichnet wurde. Diese Kurve ist die Einhüllende aller Projektionen der Verbindungsgeraden von Würfelpunkten wie z. B.  $G$  und  $H$  auf die  $x-z$ -Ebene.

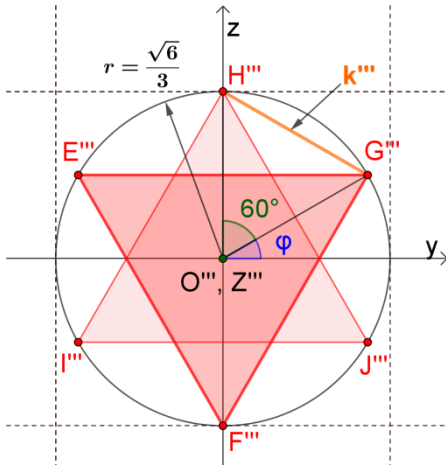


Fig. 2: Projektion des Würfels auf die  $y-z$ -Ebene.

Der Punkt  $G$  hat bei der Rotation um die  $x$ -Achse die Koordinaten

$$G \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi) \right).$$

Der Punkt  $H$  ist dabei, in Blickrichtung der  $x$ -Achse, um einen Winkel von  $60^\circ$  verdreht, wie das in der nebenstehenden Figur 2 dargestellt ist. Der Punkt  $H$  hat darum die Koordinaten

$$H \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}, r \cdot \cos(\varphi + 60^\circ), r \cdot \sin(\varphi + 60^\circ) \right).$$

Die Gerade  $GH$  hat damit die Gleichung 
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ r \cdot (\cos(\varphi + 60^\circ) - \cos(\varphi)) \\ r \cdot (\sin(\varphi + 60^\circ) - \sin(\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Die Projektion dieser Geraden  $GH$  auf die  $x-z$ -Ebene ist die Gerade

$$\vec{s}''' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ r \cdot (\sin(\varphi + 60^\circ) - \sin(\varphi)) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

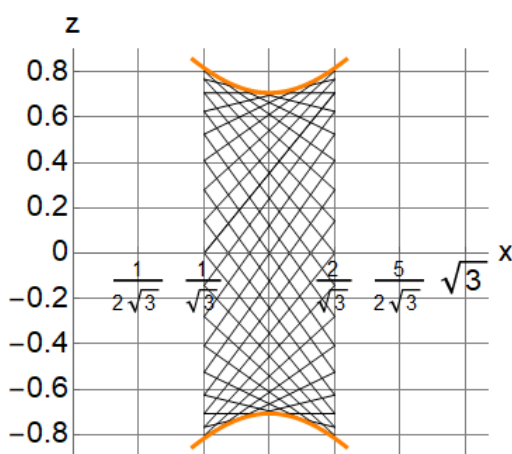


Fig. 3: Projektionen der Würfelmante  $GH$ .

Daraus kann durch Eliminieren von  $\lambda$  die Geradenschar

$$z(x, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( (\sqrt{3} \cdot x - 1) \cdot \cos(\varphi) + (\sqrt{3} - x) \cdot \sin(\varphi) \right) \quad (\text{Gl. *})$$

gefunden werden; die Strecke  $GH$  liegt auf einer dieser Geraden.

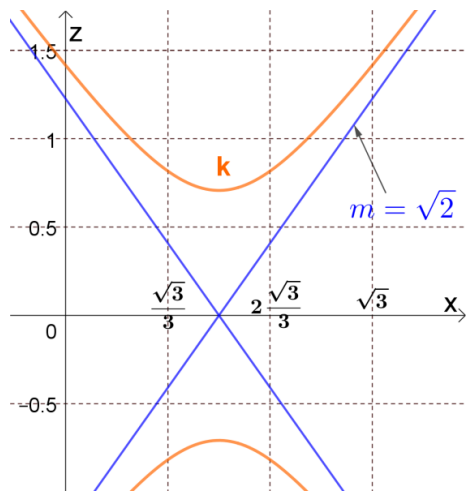
In der nebenstehenden Figur 3 sind für Winkelintervalle  $\Delta\varphi$  von je  $10^\circ$  die jeweiligen Projektionen der Strecke  $GH$  in die  $x-z$ -Ebene wiedergegeben, zusammen mit deren in Gelb eingezeichneten einhüllenden Kurve  $k$ .

Jetzt muss diese einhüllende Kurve der Schargeraden aber noch gefunden werden! Dazu wird die Ableitung von  $z(x, \varphi)$  (s. Gl. \*) nach  $\varphi$  gleich Null gesetzt und die entstehende Gleichung nach  $\varphi$  aufgelöst.

Das ergibt den Winkel  $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)$ . Dieser Term für  $\varphi$  wird in der Gl. \* eingesetzt, was die

Gleichung der Einhüllenden ergibt:  $z(x) = \pm\sqrt{2-2\sqrt{3}\cdot x+2x^2}$ .

Die Einhüllende ist eine Hyperbel mit der Gleichung  $\frac{z^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{(x-\sqrt{3}/2)^2}{(1/2)^2} = 1$ .



Ihr Graph ist die volumenbegrenzende Kurve des rotierenden Würfels im Intervall  $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Damit kann das in diesem Intervall vom rotierenden Würfel in Anspruch genommene Volumen  $V_2$  berechnet werden:

$$V_2 = \pi \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} z(x)^2 dx = \pi \cdot \pi \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} (2 - 2\sqrt{3}x + 2x^2) dx .$$

Dieses Integral für  $V_2$  ist gleich  $\frac{5\pi\sqrt{3}}{27}$ .

Fig. 4: Einhüllende k mit ihren Tangenten.

Das gesamte vom rotierenden Würfel beanspruchte Volumen  $V$  ergibt sich damit wie folgt:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{5\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

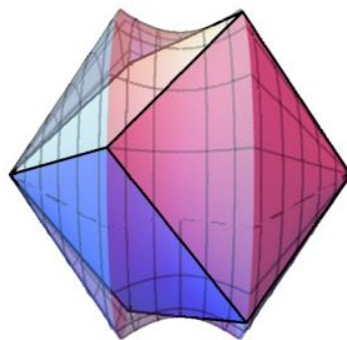


Fig. 5: Würfel mit seinem bei der Rotation beanspruchten Volumen in einer typischen Lage.

**Literatur:** Zum Bild in Fig. 5:

Rob Johnson, <https://math.stackexchange.com/questions/115743/question-about-a-rotating-cube>.

**Corso d'aggiornamento**  
**Blaise Pascal a 401 anni dalla nascita**  
**Scuola Cantonale di Commercio, Bellinzona, venerdì 1° marzo 2024**

Blaise Pascal nasce nel 1623 a Clermont-Ferrand. Dopo il suo debutto, a soli 16 anni, con "Essai pour les coniques" i suoi contributi hanno spaziato dall'algebra alla probabilità, dalla computazione alla fisica e la loro importanza per la matematica è stata tale che la loro eco risuona ancora oggi nelle aule di liceo e negli auditori universitari.

Oltre allo studio del celebre "Triangolo", Pascal formalizza il concetto di induzione, getta le basi per quello che diventerà lo studio della probabilità, sviluppa e costruisce la Pascalina, una delle prime macchine aritmetiche (calcolatrici) mai esistite.

Obiettivo della giornata è quello di conoscere meglio questi aspetti tramite quattro interventi che partano dalle idee di Pascal e illustrino le ripercussioni che queste osservazioni di 400 anni fa hanno ancora oggi sulla matematica, l'informatica e altri ambiti ancora.

**Relatori e titoli degli interventi:**

- **Emanuele Delucchi** (SUPSI) - Rapsodia triangolare
- **Giuseppe Primiero** (UniMi) - Da Pascal al Pascal - Algoritmi, Correttezza e Incertezza
- **Laura Pozzi** (USI) - Dalla Pascalina alla computazione e alla computabilità
- **Ioan Manolescu** (UniFr) - Du triangle de Pascal à la recherche d'aujourd'hui. ([in francese](#))

Per ulteriori informazioni e l'abstract degli interventi consultare il sito della CMSI: <https://www.vsmf.ch/cmsi/>

Organizzatore: Guido Lob, Liceo Cantonale di Locarno, Docenti di matematica e informatica, Presidente CMSI

Destinato a: Docenti di matematica e informatica delle Scuole medie superiori e interessati

Data e orario: Venerdì 1 marzo 2024, 09.00 – 16.00  
Accoglienza a partire dalle 8.30

Luogo: Auditorium Scuola Cantonale di Commercio, Bellinzona

Costo: Gratuito

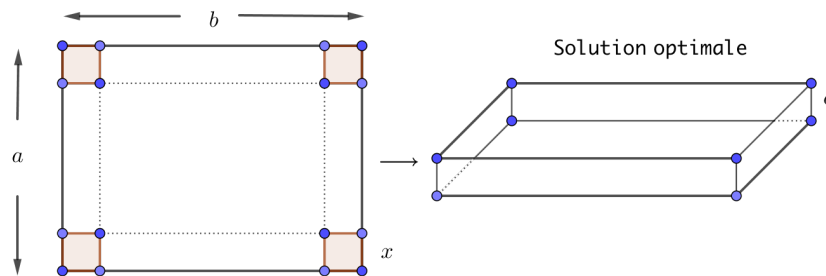
Iscrizione Per email all'organizzatore [guido.lob@edu.ti.ch](mailto:guido.lob@edu.ti.ch)

Termine d'iscrizione 20 febbraio 2024

Christian Aebi  
 Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

## Pavés droits diophantiens optimisés

Un problème d'optimisation classique que l'on soumet volontiers à nos élèves est le suivant : prendre une feuille de papier rectangulaire de dimensions  $a \times b$  avec  $a < b$ , découper un carré de côté  $x$  dans chaque coin, replier les bords pour obtenir un pavé droit et déterminer la valeur de  $x$  pour que le volume du pavé soit optimal [1, Ex. 4.45]. Si  $a$ ,  $b$  et  $x$  sont des entiers et que  $x = c$  correspond à la valeur maximale pour  $a$  et  $b$  fixés alors le pavé droit est dit diophantien optimisé.



L'objectif de cette note est de fournir une paramétrisation de l'ensemble des pavés droits diophantiens optimisés.

**Théorème.** *Toute solution du problème ci-dessus s'obtient en choisissant deux entiers positifs  $s$  et  $t$  et en posant*

$$a = s(s + 2t)k \qquad b = t(t + 2s)k \qquad c = \frac{kst}{2},$$

où  $k = 1$  si  $st \equiv 0 \pmod{2}$  et  $k = 2$  sinon.

*Démonstration.* Avec les notations ci-dessus, le volume du pavé est donné par  $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ . On vérifie aisément que les points critiques de  $V$  remplissent les deux conditions ci-dessous pour que les solutions soient entières

$$4(a+b)^2 - 12ab = d^2 \quad \text{avec } d \in \mathbb{N} \quad \text{et } 12 \mid 2(a+b) - d, \tag{1}$$

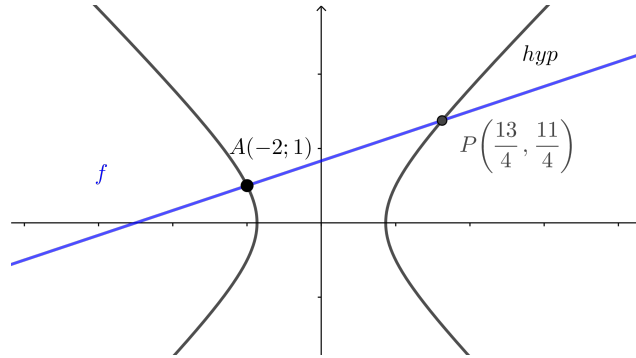
puisque  $\frac{1}{12}(2(a+b) \pm d)$  sont respectivement l'abscisse du minimum et du maximum local de  $V$ . Afin d'identifier  $d$ , posons  $a+b = n$  et  $b-a = m$  d'où  $\frac{1}{4}(n^2 - m^2) = ab$ ,  $b = \frac{n+m}{2}$ ,  $a = \frac{n-m}{2}$ . Observons que  $0 < m < n$  et qu'ils appartiennent aux entiers naturels. La substitution dans (1) donne

$$3m^2 + n^2 = d^2 \iff 3 = \left(\frac{d}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

En déterminant l'intersection de l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 3$  avec une droite de pente rationnelle  $p$ , passant par exemple par  $A(-2, 1)$ , c'est-à-dire  $y = p(x+2) + 1$ , on obtient alors une paramétrisation de tous les points à coordonnées rationnelles de l'hyperbole du premier quadrant à condition que  $\sqrt{3} - 2 < p < 1$ .

Par exemple, la droite bleue ci-dessous a une pente de  $\frac{1}{3}$  et détermine le point  $P(13/4, 11/4)$ . Il est aisé de démontrer que l'intersection de la droite de pente  $p$  avec l'hyperbole du premier quadrant est

$$\left( \frac{2(p^2 + p + 1)}{1 - p^2}, \frac{p^2 + 4p + 1}{1 - p^2} \right).$$



Si  $p = \frac{s}{t}$  alors  $x = \frac{2(s^2 + st + t^2)}{t^2 - s^2}$ ,  $y = \frac{s^2 + 4st + t^2}{t^2 - s^2}$  et donc

$$n = (s^2 + 4st + t^2)k \qquad m = (t^2 - s^2)k \qquad d = 2k(s^2 + st + t^2).$$

En substituant les expressions ci-dessus on obtient finalement

$$a = \frac{n - m}{2} = ks(s + 2t) \qquad b = \frac{n + m}{2} = kt(t + 2s) \qquad c = \frac{kst}{2}.$$

Remarquons d'abord que  $s \leq 0 < t$  implique la contradiction

$$2bc = k^2 t^2 s(t + 2s) \leq 0,$$

puisque  $\frac{|s|}{t} < 2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$  et  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . De plus,  $2(a + b) - d = 6stk$  est divisible par 12 si  $st$  est pair ou si  $k = 2$ . □

**Remarque.** En prenant  $s = 1, t = 2$  on déduit  $a = 5, b = 8, c = 1$ . D'où, le plus petit parallélépipède rectangle diophantien optimisé possible a pour dimensions,  $3 \times 6 \times 1$ . Cette solution me semble répondre à la Question Ouverte posée dans [2] :

**Open Question.** *As before, a computer check has suggested that  $a = 5$  and  $b = 8$  are the minimal distinct integral values of  $a$  and  $b$  so that the maximum volume occurs at an integral value of  $s$ . Is this true ?<sup>1</sup>*

Comme laisse suggérer le titre de [2], ce dernier traite essentiellement du cas rationnel. Cependant, on trouve dans la dernière partie une caractérisation particulièrement alambiquée des solutions entières (théorème 2). L'avantage de notre résultat est de fournir une paramétrisation explicite et élémentaire.

## Références

- [1] C.R.M., *FUNDAMENTUM de mathématique, ANALYSE*, (2010).
- [2] Philip K. Hotchkiss, *It's Perfectly Rational*, *Colleg Math. J.*, vol 33 (2), March 2002.

<sup>1</sup>**Problème ouvert.** Comme précédemment, une simulation sur ordinateur suggère que  $a = 5$  et  $b = 8$  sont les valeurs entières minimales de  $a$  et  $b$ , afin que le volume du pavé droit soit maximal pour en une valeur entière  $c$ . Est-ce vrai ?

Jean-Marie Urfer  
CRM

## Mathématiques engagées

### Colloque annuel de la CRM organisé à Champéry du 12 au 15 septembre 2023

La CRM a organisé son traditionnel cours de formation continue pour les enseignant-e-s du secondaire II qui a réuni quatre conférenciers, huit conférencières et plus de cinquante participant-e-s à l'Hôtel Suisse à Champéry. Cette salle avec vue sur le massif des Dents du Midi, de mieux en mieux équipée, a permis à tout le monde de profiter des conférences dans de bonnes conditions.

Pour cette formation, la CRM a collaboré avec l'association La Matrice (la-matrice.ch) afin de proposer un programme un peu différent des années précédentes. Après un début de semaine plus traditionnel avec des présentations autour de la théorie des graphes et de ses applications, la deuxième partie était plus variée. Nous avons en effet pu découvrir et expérimenter différents ateliers autour de la logique ou encore réfléchir aux mathématiques d'un point de vue sociologique ou encore éthique.

La première conférence, donnée par Laura Grave de Peralta, a rappelé les bases de la théorie des graphes, en particulier les notions de matrice d'adjacence, de laplacien ou encore les indices de centralité et comment la théorie des graphes intervient dans l'algorithme Page-Rank des moteurs de recherche sur internet.

Xavier Richard nous a ensuite enthousiasmé avec sa conférence sur les graphes dynamiques et les écosystèmes. Après une présentation très claire du modèle de Lotka-Volterra qui décrit un réseau trophique simple ne comprenant que deux individus, il nous a montré ensuite comment généraliser à des systèmes plus complexes en utilisant des matrices aléatoires. À l'aide de simulations, nous avons pu alors découvrir comment des petits changements dans les réseaux trophiques peuvent avoir des conséquences significatives pour la survie des espèces et la santé globale des écosystèmes, soulignant ainsi la fragilité de ces derniers.

La troisième conférence, donnée par Ariadna Fossas Tenas, a montré comment la théorie des graphes peut s'appliquer aux sciences économiques et sociales en expliquant comment les graphes peuvent modéliser une partie des relations humaines. En deuxième partie de sa présentation, Ariadna nous a présenté les résultats de sa recherche<sup>1</sup> sur un modèle permettant de mettre en relation un réseau d'acteurs, la notion d'altruisme et le bien commun.

La présentation de Robin Delabays sur les graphes et les réseaux électriques nous a permis, après une présentation de l'application des différents indices de centralité aux réseaux électriques, de simuler différentes évolu-

tions possibles du réseau électrique suisse pour se rendre compte des problèmes de surcharge suivant les modèles choisis et tenter de les résoudre.

Nathalie Krell nous a présenté (par visioconférence) une initiative citoyenne relative à l'acquisition et au traitement de données libres sur les mobilités avec l'exemple de l'association environnementale Agis-Ta-Terre à Châteaubourg (F). Les participant-e-s ont pu réfléchir à la manière d'introduire ce type d'activités dans un cours de statistiques ou dans un travail de maturité.

C'est ensuite Elise Raphaël qui nous a montré en quoi l'algèbre linéaire était centrale dans les calculateurs d'empreinte carbone, en utilisant le modèle d'analyse entrée-sortie développé par l'économiste Wassily Leontief.

Mathieu Jacquemet nous a présenté et fait expérimenter un module TecDay autour des sophismes et des biais cognitifs : le but est de proposer aux élèves une introduction de 90 minutes à des questions telles que "comment argumenter", "à quoi faire attention dans un débat rationnel", ou encore "comment détecter des mécanismes fallacieux, intentionnels ou non".

L'atelier « Les maths pour comprendre le monde », présenté par Adélie Garin, a pour but d'apprendre aux élèves à identifier les sophismes couramment utilisés dans la vie de tous les jours et de faire le lien avec la logique enseignée en mathématiques.

Pour clore une journée intensive, nous avons suivi la présentation de Clémence Perronnet sur la sociologie des inégalités devant les sciences. Elle nous a présenté comment les inégalités de genre ou de classe sociale se reflètent dans les choix des filières d'étude et surtout comment expliquer ces inégalités qui ne sont pas dues à une « bosse des maths »<sup>2</sup>.

Le vendredi, Indira Chatterji nous a présenté le charcutage électoral (gerrymandering) ou comment le découpage des zones électorales peut influencer les résultats d'élections ou de votes et quelles sont les mathématiques en arrière plan. Elise Raphaël en a profité pour montrer les résultats du travail des collégiennes genevoises ayant participé au stage d'initiation à la recherche mathématique aux Diablerets sur ce sujet (Les Marmottes 2023, Filles et Maths).

Nous avons terminé par une conférence de Camille Bossart sur les liens entre mathématiques et éthique et de Nicolas Berkouk sur des travaux classiques de sociologie sur l'évaluation scolaire des mathématiques.

<sup>1</sup> FOSSAS TENAS, ARIADNA et al. Paradoxical effects of altruism on efforts to mitigate climate change. In: Scientific reports, 2022, vol. 12, n° 1, p. 13072. doi: 10.1038/s41598-022-17535-y

<sup>2</sup> CLÉMENCE PERRONNET, La bosse des maths n'existe pas. Rétablir l'égalité des chances dans les matières scientifiques, Paris, Éditions Autrement, 2021.





# Bulletin N° 154

## Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier                      franz.meier@vsmp.ch  
Werner-Kälin-Strasse 1    Tel. 041 210 25 58  
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland                samuel.byland@vsmp.ch  
Weinbergstrasse 48b    Tel. 079 728 63 97  
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker            hjstocker@vsmp.ch  
Friedheimstrasse 11    Tel. 044 780 19 37  
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig                      Fr. 500.–

halbseitig                      Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g                         Fr. 500.–

über 20 g                      nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

Monbijoustrasse 36

3011 Bern

Tel. 031 382 52 33

information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier                      franz.meier@vsmp.ch

Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58

8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare

erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger                      praesident@vsmp.ch

Via Salens                      Tel. 081 641 10 94

7402 Bonaduz

Deutschschweizerische Mathematikkommission

Andrea Peter                      praesidium@dmk.vsms.ch

Kantonsschule Sursee

Moosgasse 11

6210 Sursee

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz                      christian.stulz@vsmp.ch

Gymnasium Burgdorf    Tel. 031 638 03 03

Pestalozzistrasse 17

3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano              tatiana.mantuano@vsmp.ch

Grand'Rue 16                      Tél. 032 544 47 53

2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher              yves.oestreicher@vsmp.ch

Malvand 13                      Tél. 079 796 69 95

1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob                         guido.lob@vsmp.ch

Via Borghese 14                      Tel. 078 663 13 37

6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 155                              31.03.2024 (Ende Mai)

Nr. 156                              31.07.2024 (Ende September)

Nr. 157                              30.11.2024 (Ende Januar)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG

Letzistrasse 37

9015 St. Gallen

www.niedermanndruck.ch

Internet:

www.vsms.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P  
S S P M P  
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica