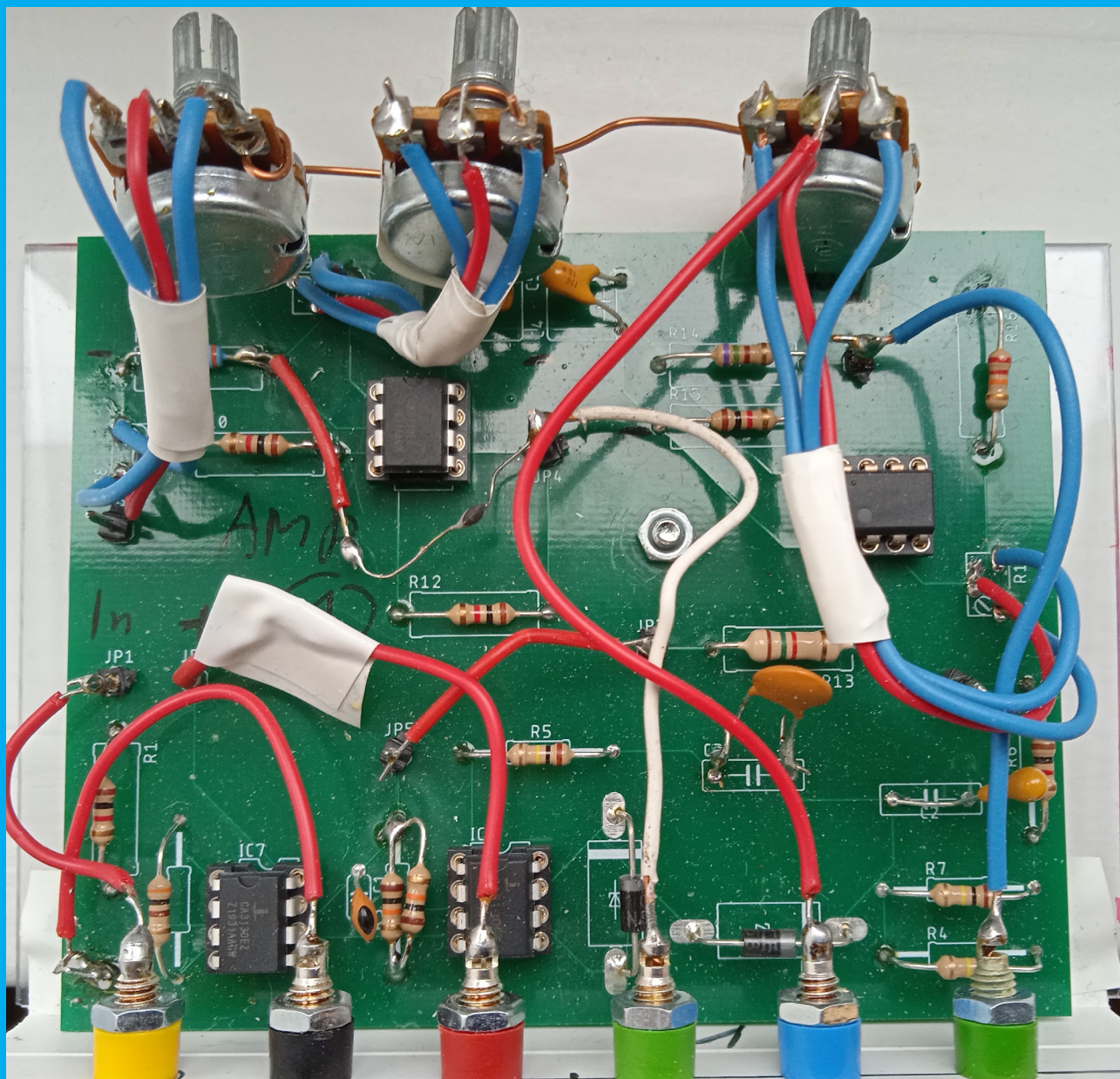


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Januar 2021 — Janvier 2021 — Gennaio 2021

N° 148



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Spektrometer-Platine. Artikel auf Seite 10 in dieser Ausgabe.

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

Deutscheschweizerische Physikkommission	2
Martin Lieberherr Wider die Zentripetalkraft	2
Henning Zhang Mathematisch musizieren	7
Martin Lehner Experimente mit Silizium-Photomultipliern	10
Deutscheschweizerische Mathematikkommission	16
Peter Gallin Verkannte Symmedianen, Lemone-Punkt, Gergonne-Punkt und ein Muster von vielen ähnlichen Dreiecken	16
Nina Stumpf, Hana Rozhonová Mathematikteamwettbewerb Náboj 2022	20
Hans Walser (Buchrezension) Michael Schmitz – Mathe kannste knicken. Kreativer und aktivierender Mathematikunterricht mit Papierfalten	22
Josef Züger (Buchbesprechung) Claudia Albertini, Martin Huber: Kalender – Kunstwerke aus Mathematik, Astronomie und Geschichte	24
Meike Akveld, Monika Krichel The Shape of Space – Welche Form hat das Universum	26
<i>Kurs: Mathematik dynamisch erkunden mit GeoGebra</i>	28
<i>Kurs: 3D Geometrie mit GeoGebra</i>	29
Commission Romande de Physique	30
Didier Roulet Congrès des professeurs de sciences à Gembloux	30
Commission Romande de Mathématique	32
Christophe Bolle La Suite de Tribonacci	32
Damien Dobler <i>Rapport du colloque annuel de la CRM: Géométries d’hier et d’aujourd’hui : inégalités isopérimétriques et géométrie projective</i>	38
Christian Aebi Quelques résultats historiques sur le produit vectoriel	39

Wider die Zentripetalkraft

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Huygens (1658) und Newton (1665) haben sich darum verdient gemacht, die Kreisbewegung als beschleunigte Bewegung zu erkennen. Der Ausdruck “Zentripetalkraft” geht auf Newton zurück, der damit einen Fehler von Huygens (“vis centrifuga”) korrigierte. Leider hat sich die Zentripetalkraft zur didaktischen Altlast entwickelt – ähnlich der dynamischen Masse in der speziellen Relativitätstheorie – die mehr schadet als nützt. Der Begriff ist zwar nicht völlig falsch, aber unnötig und gibt zu Missverständnissen Anlass. Sätze der Art “Die Zentripetalkraft erzwingt die Kreisbewegung” oder “Bei einer Kreisbewegung zeigt die Kraft stets zum Kreiszentrum” zeigen das Problem auf: Eine Kraft ist nämlich niemals in der Lage, eine Kreisbewegung zu erzwingen. Ein paar Beispiele mögen das zeigen: Für das velofahrende Söhnchen bewegt sich ein Stück Pneu auf einem Kreis, wogegen dasselbe Reifenstück für die still beobachtende Mutter entlang einer Zykloiden läuft. Die Wahl des Bezugssystems ist nicht Teil eines Kraftgesetzes. Ein ebenes Fadenpendel bewegt sich auf einem Kreis, aber weil die Kreisbewegung ungleichmässig ist, zeigt die Kraft fast nie zum Zentrum des Kreisbogens. Die blinde Anwendung von “Kraft = Zentripetalkraft” verdeckt diese Aspekte. Frage ich Lehramtsstudierende, was denn diese Zentripetalkraft eigentlich sei, höre ich meist ausweichende Antworten. Wird sie als Komponente der Resultierenden definiert, provoziert man die Verwechslung mit einer real einwirkenden Kraft, denn schliesslich muss existieren, was einen Namen hat. Ausserdem liesse sich eine Kreisbewegung auch programmieren: Es ist aber deplatziert, Animationen mit Kräften zu erklären.

Man kommt bei der Kreisbewegung nicht umhin, *beide* Seiten in $\vec{F}_{\text{res}}/m = \vec{a}$ zu betrachten, d.h. Dynamik (Kräfte, Masse) *und* Kinematik (Beschleunigung, Geometrie im gewählten Bezugssystem, Startwerte). Dazu ist es nützlich, die Kinematik der krummlinigen Bewegung, d.h. nicht nur der Kreisbahn, zu studieren. So lernt man, welche der Begriffe aus der Kreisbewegung verallgemeinerbar sind und welche lediglich spezielle Situationen beschreiben. So werden die Grundkonzepte der Kreisbewegung viel klarer herausgeschält.

Im nächsten Abschnitt werde ich die Kinematik der krummlinigen Bahnen vorstellen und danach zeigen, wie ich das im Unterricht umsetze. Im fünften Abschnitt möchte ich zwei schwierigere Beispiel durchrechnen.

2 Mathematischer Hintergrund

Theoretische Kinematik ist nichts anderes als Geometrie in speziellen Koordinaten. Sei $\vec{r}(s)$ eine mathematische Kurve in gewöhnlichen, kartesischen Koordinaten, die durch ihre Bogenlänge s parametrisiert ist. Jean Frédéric Frenet (1847) und Joseph Serret (1851) fanden unter anderem, dass folgende Beziehung⁴ gilt:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad (1)$$

Die zweite Ableitung des Ortsvektors \vec{r} nach der Bogenlänge s der Bahnkurve ist gleich dem Quotienten aus Hauptnormalenvektor \vec{n} und Krümmungsradius ρ . Die Beziehung lässt sich an einer Kreislinie nachrechnen:

$$\vec{r} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos s/\rho \\ \sin s/\rho \end{pmatrix} \quad \rho = |\vec{r}| = r \quad \varphi = s/\rho \quad (2)$$

wobei die Bogenlänge $s = \rho\varphi = r\varphi$ der Länge des Kreisbogens entspricht. Die erste Ableitung ergibt den Tangenten-Einheitsvektor \vec{t} , die zweite Ableitung den skalierten Hauptnormalenvektor \vec{n} des Kreises:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin s/\rho \\ \cos s/\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \vec{\tau} \quad \vec{\tau} \perp \vec{r} \quad (3)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -\cos s/\rho \\ -\sin s/\rho \end{pmatrix} = \frac{-1}{\rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad \vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r} \quad (4)$$

Diese Beziehungen bleiben erhalten, wenn wir die Kreislinie im Raum drehen oder verschieben. Ist die Kurve kein Kreis, so gelten diese Beziehungen für den Schmiege- oder Krümmungskreis, denn dieser stimmt per Definition in der ersten und zweiten Ableitung mit der Kurve im betrachteten Bahnpunkt überein.

Die Frenet-Serret-Formel wird kinematisch, wenn die Bogenlänge s von der Zeit t abhängt:

$$s = s(t) \quad \frac{ds}{dt} = v = |\vec{v}| \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a_B \quad (5)$$

Die erste Ableitung der Bogenlänge nach der Zeit ergibt die Bahngeschwindigkeit oder Schnelligkeit v , die zweite Ableitung die Bahnbeschleunigung a_B . Nun müssen wir die Frenet-Serret-Formel in diese Koordinaten transformieren. Dazu benötigen wir nur die Kettenregel:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{v} \cdot \frac{1}{v} = \vec{\tau} \quad (6)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{v}}{v} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{v} \right) \cdot \frac{dt}{ds} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{v} - \frac{\vec{v}}{v^2} \cdot \frac{dv}{dt} \right) \cdot \frac{1}{v} \stackrel{!}{=} \frac{\vec{n}}{\rho} \Rightarrow \quad (7)$$

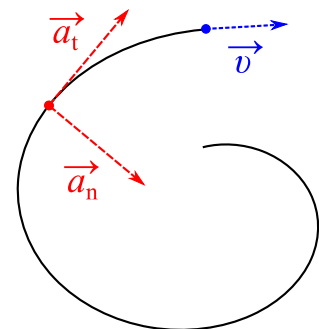
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{a} \quad (8)$$

Wir erhalten so die Zerlegung¹ der Beschleunigung \vec{a} in normale (\vec{a}_n) und tangentiale (\vec{a}_t) Komponenten. Die Bahn- oder Tangentialbeschleunigung \vec{a}_t verändert nur die Schnelligkeit, die Normalbeschleunigung \vec{a}_n verändert nur die Richtung der Bewegung. Die Beziehung $a_n = v^2/\rho$ ist rein kinematisch!

3 Grundgesetz der krummlinigen Dynamik

Jüngere Schülerinnen und Schüler sind mit Differentialgeometrie natürlich überfordert. Der Einstieg nach Abbildung 1 über die Dynamik krummliniger Bewegungen hat sich bei mir bewährt. Ich thematisiere die Kreisbewegung nach der Kinematik der geradlinig beschleunigten Bewegung, nach der Einführung in die Kräftelehre und auch nach dem Kapitel Arbeit/Energie.

Abbildung 1: Der Schwerpunkt eines Körpers folge einer krummlinigen Bahn. Der momentane Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ist in jedem Bahnpunkt tangential zur Bahn, denn die Geschwindigkeit zeigt ja die Bewegungsrichtung an. Die krummlinige Bewegung ist beschleunigt, weil die Geschwindigkeit (Richtung!) ändert. Der Beschleunigungsvektor darf bei jedem Bahnpunkt in eine normale (\vec{a}_n) und eine tangentiale (\vec{a}_t) Komponente zerlegt werden.



Die Zerlegung des Beschleunigungsvektors nach Abbildung 1 kann im Grundgesetz der Mechanik (zweites newtonsches Axiom, Aktionsprinzip) verwendet werden:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t \quad (9)$$

Diese Zerlegung ist recht praktisch, denn sie ordnet verschiedenen Komponenten der Beschleunigung respektive der resultierenden Kraft unterscheidbare Effekte auf die Bewegung zu: Die Tangentialkomponente $m\vec{a}_t$ der Resultierenden macht den Körper schneller oder langsamer, hat aber keinen Einfluss auf die Bewegungsrichtung. Die Normalkomponente $m\vec{a}_n$ verändert offensichtlich die Bewegungsrichtung, lässt aber die Schnelligkeit (Bahngeschwindigkeit) konstant. Dies sieht man daran, dass die senkrechte Komponente der resultierenden Kraft keine Arbeit verrichtet und somit die kinetische Energie konstant lässt.

4 Unterrichtsablauf

Nach der Vorbemerkung zu Kräften bei krummlinigen Bewegungen folgen die kinematischen Beziehungen der *gleichmässigen* Kreisbewegung, damit wir bei konkreten Aufgaben auf *beiden* Seiten des Grundgesetzes (9) etwas einzusetzen haben. Die Einführung ist Standard, deshalb seien die Begriffe und Resultate nur kurz aufgelistet: Umlaufzeit T , Frequenz $f = 1/T$ in Hertz, Winkelgeschwindigkeit $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi f = 2\pi/T$ in Radiant pro Sekunde, Bahngeschwindigkeit (Schnelligkeit) $v = r\omega$, momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ und Zentripetalbeschleunigung $a_z = v^2/r$ respektive $\vec{a}_n = -\vec{r}(t) \cdot \omega^2$. Bei der *gleichmässigen* Kreisbewegung hat die Beschleunigung nur eine normale (zentripetale) Komponente. Die tangential Komponente verschwindet, weil der betrachtete Punkt gleich schnell bleibt. Das Adjektiv “zentripetal” ist hier noch sinnvoll, weil das Zentrum der Kreisbahn und/oder der Bahnradius bekannt sind.

Nach einigen Anwendungsbeispielen zur Kinematik folgen Beispiele zur Dynamik der gleichmässigen Kreisbewegung, damit die Schülerinnen und Schüler sehen, wie die Grundgleichung (9) verwendet wird. Ein Einstiegsbeispiel wäre das Kurvenfahren, ein klassisch-mittelschweres das Kegelpendel, siehe Abbildung 2.

1. Beispiel: Ein Auto von 985 kg fährt mit konstant 20 m/s durch eine horizontale Kurve mit 180 m Radius auf trockener Asphaltstrasse. a) Berechnen Sie die resultierende Kraft auf das Auto. b) Aus welchen Kräften setzt sich die Resultierende zusammen?

a) $\vec{F}_{res} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t$ Die Bewegung ist *gleichmässig*: $a_t = 0$ (10)

$$F_{res} = ma_n = \frac{mv^2}{r} = \frac{985 \text{ kg} \cdot (20 \text{ m/s})^2}{180 \text{ m}} = \underline{\underline{2.2 \text{ kN}}} \quad (11)$$

b) $\vec{F}_{res} = \vec{F}_G + \vec{F}_N + \vec{F}_R \stackrel{\text{hier}}{=} \vec{F}_R$ Gewicht-, Normal- und Reibungskraft (12)

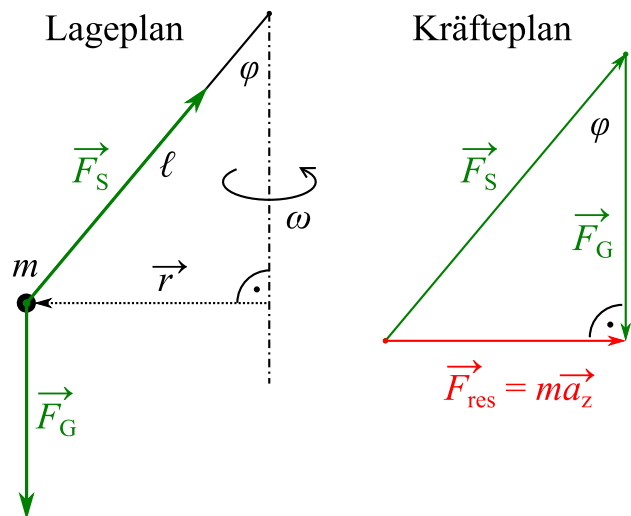
2. Beispiel siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Kegelpendel

Ein Fadenpendel der Länge ℓ und Masse m wird *gleichmässig* mit Winkelgeschwindigkeit ω auf einem horizontalen Kreis mit Radius r herum bewegt. Der Faden schliesst den Winkel φ mit der Vertikalen ein.

Wie gross ist φ als Funktion von ω ?

Im Lageplan (*free body diagram*) zeichnen wir das stilisierte Pendel mit den einwirkenden Kräften (Schnurkraft F_S und Gewichtskraft F_G); im Kräfteplan setzen wir die einwirkenden Kräfte vektoriell zur Resultierenden F_{res} zusammen, von der wir wegen der Zentripetalbedingung die Richtung kennen.



2. Beispiel: Kegelpendel (Fortsetzung, siehe Abbildung 2)

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t \quad \text{Die Bewegung des Kegelpendels ist gleichmässig: } a_t = 0 \quad (13)$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_z = -m\omega^2\vec{r} \quad \text{Kreisbahn: Die Beschleunigung ist zentripetal: } -\vec{r} \parallel \vec{F}_{\text{res}} \quad (14)$$

$$F_G \tan \varphi = m\omega^2 r \quad \text{Das Kräfte-dreieck bestimmt die Resultierende.} \quad (15)$$

$$mg \tan \varphi = m\omega^2 \ell \sin \varphi \quad \text{Die Geometrie bestimmt den Radius.} \quad (16)$$

$$\left(\frac{g}{\cos \varphi} - \omega^2 \ell \right) \cdot \sin \varphi = 0 \quad \text{Die Gleichung hat eine oder zwei Lösungen für } 0 \leq \varphi < \pi/2. \quad (17)$$

5 Schrauben- und Ellipsenbahn

Beispiel Helix: Ein geladenes Teilchen bewegt sich im homogenen Magnetfeld in der Regel auf einer Schraubenlinie. Nur in bestimmten Bezugssystemen respektive bei speziellen Startbedingungen resultiert eine gleichmässige Kreisbewegung. Schauen wir mal den Fall an, wo sich das Teilchen auf einer Schraubenbahn bewegt:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t \quad \text{Die Bewegung bleibt gleich schnell: } a_t = 0 \quad (18)$$

$$q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}_n \quad \text{Die magnetische Kraft ist parallel zur Normalbeschleunigung.} \quad (19)$$

$$qvB \sin \alpha = mv^2/\rho \quad \text{Zwischenwinkel } \alpha = \angle \vec{v} \vec{B} \quad (q > 0) \quad (20)$$

$$\rho = \frac{mv}{qB \sin \alpha} \quad \text{Krümmungsradius der Schraubenbahn} \quad (21)$$

Zerlegen wir den Geschwindigkeitsvektor in Komponenten $\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}/B^2$ parallel sowie $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}/B^2$ senkrecht zu \vec{B} und wechseln wir in ein Bezugssystem, das sich mit \vec{v}_{\parallel} bewegt, so erhalten wir den altbekannten Fall einer Kreisbahn mit Larmor- oder Zyklotronradius $r_Z = mv_{\perp}/(qB)$. Im ursprünglichen Bezugssystem setzt sich die Bewegung aus einer gleichmässigen Kreisbewegung mit Bahngeschwindigkeit $v_{\perp} = v \sin \alpha$ senkrecht sowie einer gleichförmigen Bewegung mit $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ parallel zu den Feldlinien zusammen. Die Bahn ist dann eine Schraubenlinie. Wie hängen der Zyklotronradius r_Z im speziellen Fall und der Krümmungsradius ρ der Schraubenlinie im allgemeinen Fall zusammen?

$$r_Z = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB} = \frac{mv}{qB \sin \alpha} \sin^2 \alpha = \rho \sin^2 \alpha \quad (22)$$

Der Krümmungsradius ρ der Schraubenbahn ($0 < \alpha < \pi/2$) ist grösser als der Zyklotronradius r_Z der Kreisbahn ($\alpha = \pi/2$). Die Hauptnormalenvektoren der Schrauben- respektive Kreisbahn sind aber parallel. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte (Evolute) ist eine zur Schraubenbahn "ähnliche" Schraubenlinie mit anderem Radius und gleicher Ganghöhe. Die Bezeichnung "zentripetal" verliert ihren unmittelbaren Nutzen, weil das Krümmungskreiszentrum in jedem Bahnpunkt anderswo liegt.

Beispiel Ellipse: Man sagt, die Planeten umkreisen die Sonne. Die Bahn ist aber kein Kreis, sondern in besserer Näherung eine Ellipse. Wo herum kreisen die Planeten dann?

Wir betrachten eine elliptische Bahn mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b respektive numerischer Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ und Halbparameter $p = b^2/a$ (Abb. 3). Der Planet mit Masse m wird nur durch die Gravitationskraft F_G der Sonne (Masse M) beschleunigt. Die lokale Beschleunigung \vec{g} ist dann

$$m\vec{g}_n + m\vec{g}_t = \vec{F}_{\text{res}} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{newtonsche Gravitationskraft} \quad (23)$$

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \text{Energieerhaltungssatz} \quad (24)$$

$$\vec{r} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Ellipse parametrisiert durch den Polarwinkel } \varphi \quad (25)$$

Um das Zentrum des Schmiegekreises an die Ellipse im Punkt (r, φ) zu bestimmen, gehen wir so vor:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \quad \text{unnormierter Tangentenvektor} \quad (26)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} \quad \text{unnormierter Hauptnormalenvektor} \quad (27)$$

$$v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a} \quad \text{Schnelligkeit via Energiesatz} \quad (28)$$

$$\vec{g}_n = \frac{\vec{g} \cdot \vec{n}}{n} \cdot \frac{\vec{n}}{n} \quad \text{Normalbeschleunigung} \quad (29)$$

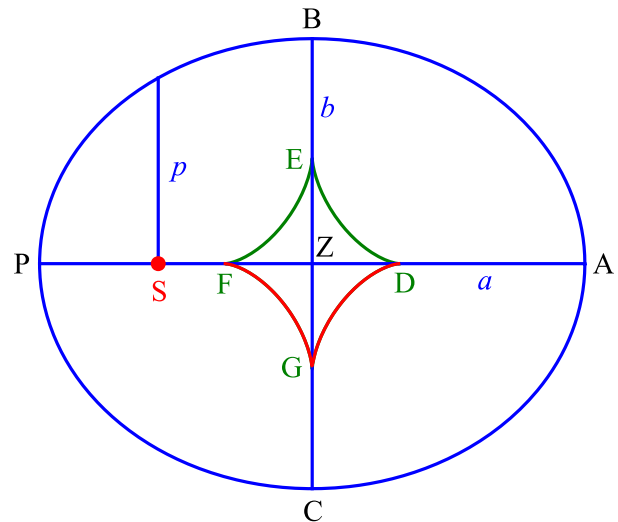
$$\rho = \frac{v^2}{g_n} = \dots = \left(2 - \frac{r}{a}\right) \cdot n \quad \text{Krümmungskreisradius} \quad (30)$$

$$\vec{r}_E = \vec{r} + \left(2 - \frac{r}{a}\right) \cdot \vec{n} \quad \text{Schmiegekreiszentrum auf der Evolute} \quad (31)$$

Der geometrische Ort aller Schmiegekreismittelpunkte einer Kurve heisst Evolute. Die Evolute einer Ellipse² ist eine schiefe Astroide, d.h. eine Astroide mit ungleichen Achsen, siehe Abbildung 3. Auf der unteren Hälfte ist eine solche Astroide über die nach dem oben skizzierten Algorithmus gezeichnete Evolute gelegt.

Abbildung 3: Massstäbliche Bahn des Planetoiden (887) Alinda mit $a = 2.4842$ au und $\varepsilon = 0.5647$ sowie der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte (Evolute, hier die schiefe Astroide DEFG). Die Sonne S befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse.

Der Krümmungsradius in den Hauptscheiteln (Aphel A, Perihel P) ist gerade der Parameter $p = b^2/a$, in den Nebenscheiteln B und C beträgt er $\rho = a^2/b$. Die Astroide (Lamé-Kurve) hat folgende Darstellung, falls man den Nullpunkt ins Ellipsenzentrum Z verlegt:



$$\left| \frac{x}{a-p} \right|^{2/3} + \left| \frac{y}{b-a^2/b} \right|^{2/3} = 1 \quad (32)$$

6 Schluss

Die Dynamik der gleichmässigen Kreisbewegung ist eine Anwendung von $\vec{F}_{res}/m = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ bei der die Tangentialbeschleunigung \vec{a}_t verschwindet und die Geometrie oder Kinematik die Richtung sowie ev. den Betrag der Normalbeschleunigung \vec{a}_n festlegt. Diese Darstellung ist nicht neu, aber sie scheint etwas in Vergessenheit geraten zu sein. Die "Zentripetalkraft" stört, denn sie wird oft mit einer einwirkenden Kraft verwechselt und lässt sich nicht leicht auf krummlinige Bahnen oder ungleichmässige Kreisbewegungen verallgemeinern.³ Streichen Sie den Begriff aus Ihrem Aktivwortschatz und verwenden Sie "Zentripetalbeschleunigung" oder "Zentripetalbedingung", wenn Sie bei gleichmässigen Kreisbewegungen ein ähnliches Schlüsselwort verwenden wollen. Die Zentrifugalkraft taucht nicht auf, falls wir Inertialsysteme verwenden.

¹ DMK/DPK/DCK, "Formeln - Tabellen - Begriffe", Orell Füssli Verlag, 7. Auflage, Seite 156

² <https://mathworld.wolfram.com/EllipseEvolute.html> (23. Juli 2021)

³ Läuchli/Müller, "Physik Aufgaben", Orell Füssli Verlag, 12. Auflage (1987), Seite 114, Aufgabe 421*

⁴ https://de.wikipedia.org/wiki/Frenetsche_Formeln (5. Sept. 2021)

Mathematisch musizieren

Henning Zhang, Wissenschafts-Olympiade, henning@imosuisse.ch

Mit nichts als Wasser und ein paar Weingläsern bekannte Melodien spielen – das geht! In diesem Experiment werden mit selbst gemessenen Frequenzen Berechnungen angestellt, bis die Gläser richtig klimpern.

Für das Experiment benötigst du:

- Weingläser, Proseccogläser (am besten 6 gleiche)
- Wasser
- Waage
- Eine App, die Frequenzen misst (Playstore: Sound Analyzer Free, Appstore: n-Track Tuner). Alternativ kannst du mit dem eigenen Gehör plus einer Frequenz-Generator App messen.
- Stift und Papier

Der Versuch besteht aus 2 Teilen. Der erste Teil ähnelt einem klassischen Physik-Experiment. Wir werden das Weinglas mit unterschiedlichen Wassermengen füllen und die Volumen-Frequenz Kennlinie unseres Glases bestimmen. Im zweiten Teil kannst du mit Hilfe der gemessenen Kennlinie herumspielen. Wir geben dir einige Tipps und Ideen, welche du ausprobieren kannst.

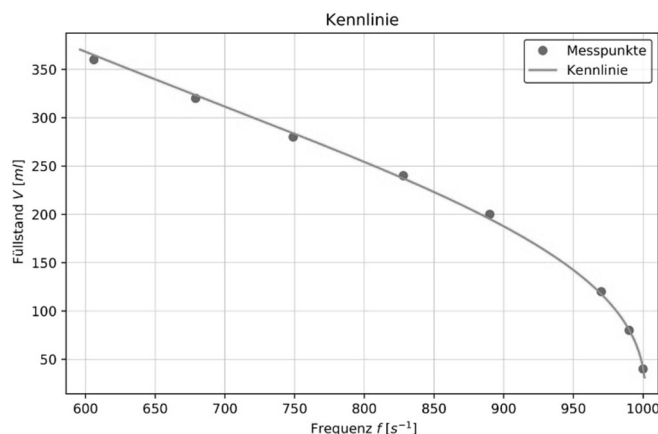
Erster Teil

Zur Bestimmung der Volumen-Frequenz-Kennlinie brauchen wir zuallererst einige Messdaten.

- 1.) Messe zuerst die Frequenzen der leeren Weingläser. Nehme für den Rest des ersten Teils jenes Glas mit der mittleren Frequenz.
- 2.) Fülle nun das Glas schrittweise auf. Bestimme nach jedem Schritt die Wassermenge im Glas. Am besten tust du dies mit Hilfe einer elektronischen Waage. Bestimme auch die jeweilige Tonhöhe. Tipp: Bei den meisten Gläsern ändert sich die Tonhöhe anfangs sehr langsam, erst wenn das Glas halbgefüllt ist beginnt die Tonhöhe schneller anzusteigen. Versuche dort mehr Messungen zu machen, wo es grosse Änderungen der Tonhöhe gibt.
- 3.) Für ein genaues Ergebnis solltest du in etwa 8-10 verschiedene Füllstände vermessen haben.

Jetzt kommen wir zum Analyseteil. Im Folgenden bezeichnen wir mit f_i die gemessenen Frequenzen in Hertz und mit V_i die Füllstände in Milliliter. Der Index i (in f_i und V_i) nummeriert die verschiedenen Messungen, d.h. wir bezeichnen beispielsweise die gemessene Frequenz der dritten Messung mit f_3 und den dazugehörigen Füllstand mit V_3 .

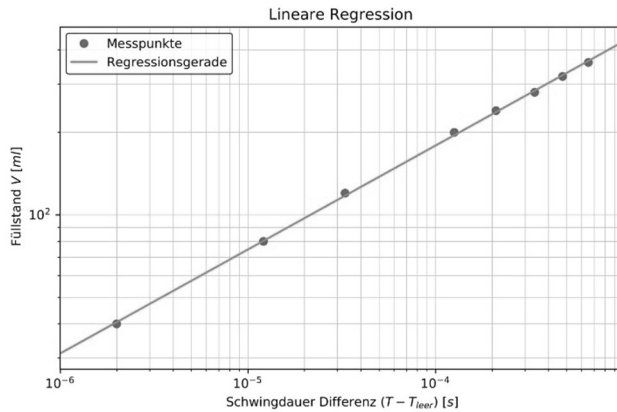
- 4.) Stelle nun deine Daten graphisch dar. Bilde dabei die Frequenzen auf der x-Achse und die Füllstände auf der y-Achse ab. Du solltest nun in etwa folgenden Graphen erhalten:



Wir suchen nun nach einer empirischen Formel, welche den von dir gezeichneten Graphen möglichst einfach beschreibt. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- 5.) Berechne für jede Frequenz f_i die Schwingdauer $T_i = \frac{1}{f_i}$
- 6.) Ziehe nun von jedem T_i die Schwingdauer des leeren Glases T_{leer} ab. Hierbei ist wiederum $T_{leer} = \frac{1}{f_{leer}}$, wobei f_{leer} die zu Beginn gemessene Frequenz des leeren Glases ist. Beachte: Je kleiner die Differenz $T_i - T_{leer}$ ist, desto mehr werden allfällige Ungenauigkeiten bei der Messung ins Gewicht fallen. Es kann deshalb von Vorteil sein die Messungen mit kleiner Differenz $T_i - T_{leer}$ für die Analyse wegzulassen (siehe Punkt 7). Völlig unbrauchbar sind Messwerte mit $T_i < T_{leer}$.
- 7.) Trage nun $\log(T_i - T_{leer})$ auf der x-Achse und $\log(V_i)$ auf der y-Achse auf. Du solltest eine mehr oder weniger gerade Linie erhalten:

Anmerkung: Für dieses Bild wurden die ursprünglichen Daten am Computer in einem log-log-Plot abgebildet, was ohne Computer oder log-log-Papier nicht so einfach möglich ist. Qualitativ ist ein auf Papier gezeichneter Graph gleichwertig.



Tipp: Die in Punkt 6 erwähnten problematischen Messwerte befinden sich im Graphen meist links unten. Es kann also gut sein, dass die übrigen Punkte eine schöne gerade Linie bilden auf welcher sich diese problematischen Punkte nicht befinden. Lasse sie in diesem Fall einfach weg.

- 8.) Bestimme für deine Gerade die Steigung m und den y-Achsenabschnitt a . Du kannst dies von Auge machen. Wenn du möchtest darfst du natürlich auch eine lineare Regression durchführen.
- 9.) Wie berechnet man nun den Füllstand in Milliliter für eine bestimmte gewünschte Frequenz? Schreibe deine Formel in Abhängigkeit von m , a und T_{leer} auf. *Lösung:*

$$V = e^a \left(\frac{1}{f} - T_{leer} \right)^m$$

Zweiter Teil

Mit dem Bestimmen der Kennlinie können wir nun beliebige Frequenzen erzeugen, indem wir die dazugehörigen Wassermengen ganz einfach mit der Waage abmessen. Als Erstes versuchen wir uns an den Tönen einer Durtonleiter.

- 1.) Schreibe jeweils auf, aus wie vielen Halbtönen der Tonabstand zum nächsten Ton der Durtonleiter besteht. *Lösung: Startend vom Grundton 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1 (wir brauchen aber nur die ersten 5 Tonabstände)*

Was hat dies nun mit den Frequenzen zu tun? Wir bemerken zuerst, dass sich die Frequenz für eine Oktave verdoppelt, d.h. die Frequenz des Grundtons ist die Hälfte der Frequenz des Tones, welcher eine Oktave über ihm liegt.

- 2.) Nehme nun an die Frequenz nimmt mit jedem Halbton um einen Faktor z zu. Wieviel ist z ? *Lösung: Es gibt 12 Halbtöne in der Oktave. Das heisst $z^{12} = 2$ oder $z = 2^{\frac{1}{12}}$.*

- 3.) Fange nun bei der niedrigsten Frequenz f_0 an, welche du gut mit deinem Glas erzeugen kannst. Welche Frequenzen haben nun die ersten 6 Töne in deiner Durtonleiter?

Lösung: $f_0, f_0 z^2, f_0 z^4, f_0 z^5, f_0 z^7, f_0 z^9$

- 4.) Optional: Interessanterweise sollte sich die Frequenz für eine Quinte verdreizweifelfachen. Aus wie vielen Halbtonschritten besteht eine Quinte und um ein wie vielfaches vergrößert sich folglich die Frequenz für eine Quinte nach unseren Berechnungen? Diese Diskrepanz zeigt, dass wir unsere Instrumente im 12 Ton-System nie ganz richtig stimmen können. In der westlichen Musik hat sich die wohltemperierte Stimmung durchgesetzt, welche unseren Berechnungen mit den Halbtönen entspricht. Dadurch sind unsere Quinten aber immer etwas falsch.
- 5.) Berechne nun die Füllstände, welche zu den Frequenzen in Punkt 3 gehören und fülle sie in deine Weingläser ein.

Falls du anfangs festgestellt hast, dass die Grundfrequenzen deiner Gläser sehr unterschiedlich wird sich natürlich auch die Kennlinie der Gläser relativ stark unterscheiden. Um nicht für jedes Glas nochmals separat die Kennlinie messen zu müssen kannst du folgendes tun: Fülle alle Gläser etwa $\frac{3}{4}$ voll und messe wiederum den Füllstand $V_{\frac{3}{4}}$ und die Frequenz $f_{\frac{3}{4}}$. Finde nun für jedes der Gläser b , sodass gilt:

$$V_{\frac{3}{4}} = e^a \left(\frac{1}{f_{\frac{3}{4}}} - T_{\text{leer}} \right)^m + b$$

Vergiss dabei nicht auch das anfangs gemessene T_{leer} des jeweiligen Glases einzusetzen. Die Formel für die Kennlinie eines spezifischen Glases ist nun

$$V = e^a \left(\frac{1}{f} - T_{\text{leer}} \right)^m + b$$

Dabei sind m und a universell für alle Gläser, und T_{leer} und b für das jeweilige Glas einzusetzen.

- 6.) Du kannst nun einige einfache Lieder auf deinen Gläsern spielen. Im Folgenden bezeichnet 1 das Glas mit der niedrigsten und 6 das Glas mit der höchsten Frequenz. Einige Beispiele:
- Alle Meine Entlein: 123455 6666 5 6666 5 4444 33 2222 1
 - Jingle Bells: 333 333 35123 4444433 32232 5, 333 333 35123 44444333 55421
 - Hänschen klein: 533 422 1234555 533 422 13551
 - Bruder Jakob: 1231 1231 345 345 565431 565431 1 5 1
 - Funkel funkel kleiner Stern: 11 55 66 5 44 33 22 1, 55 44 33 2 55 44 33 2, 11 55 66 5 44 33 22 1
- 7.) Das Gleiche können wir auch mit der Molltonleiter machen. Die Abstände in Halbtönen hier ist: 2, 1, 2, 2, 1
- Heart of Courage (Two Steps from Hell): 123 345 2346543
 - Havana (Camila Cabello und Daddy Yankee): 355331 545654 355331 5456543 55331 545654353 5454352
 - Sweet Dreams (Annie Lennox und Eurythmics): 13313 11 33 32 3131 33432
 - Bad Guy (Billie Eilish): 33 3333 14 33 3333 14 33 3333 15 22 2217 (wir können hier die 6 Gläser so füllen, dass der tiefste Ton der siebte Ton der harmonischen Molltonleiter ist)
- 8.) Optional: Interessierte können versuchen die Oktave in mehr als 12 Halbtöne zu unterteilen. Finde beispielsweise einen Faktor z für welchen eine besonders reine Quinte zu erreichen ist. Berechne dann wiederum die Füllstände und schaue wie dieses Tonsystem klingt.

Neugierige Schülerinnen und Schüler? Informieren Sie sich auf science.olympiad.ch über das vielseitige Förderangebot der Wissenschafts-Olympiade – in Mathematik, Physik und acht weiteren Fächern!

Experimente mit Silizium-Photomultipliern

Martin Lehner, Gymnasium Biel-Seeland, martin.lehner@gbsl.ch

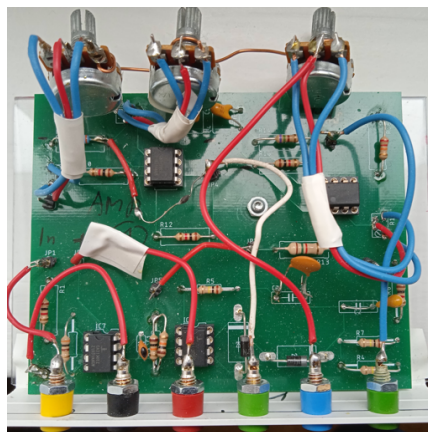
1 Einleitung

Silizium-Photomultiplier (SiPM) bestehen aus Gittern von winzigen Avalanche-Photodioden und erreichen eine ähnliche Empfindlichkeit wie konventionelle Photomultiplier. Eine ausführliche Einführung in ihre Funktionsweise findet man z.B. bei Gundacker und Heering [1]. Kurz gesagt, erzeugen auftreffende Photonen Elektron-Loch-Paare, die via Stossionisation zu einer 'lawinenartigen' Ladungsvervielfachung führen. Vorteile der SiPM sind die niedrige Versorgungsspannung (ca. 30V), ihre Kompaktheit und die relativ günstigen Anschaffungskosten. Sie lassen sich gut mit NaI-, CsI-, LaBr₃- oder Plastikszintillatoren kombinieren. Im medizinischen Bereich werden z.B. bei der PET Diagnose zunehmend SiPM eingesetzt. Im Gymnasium wären u.a. Gamma-spektroskopie oder Koinzidenzmessungen interessante Anwendungsgebiete.

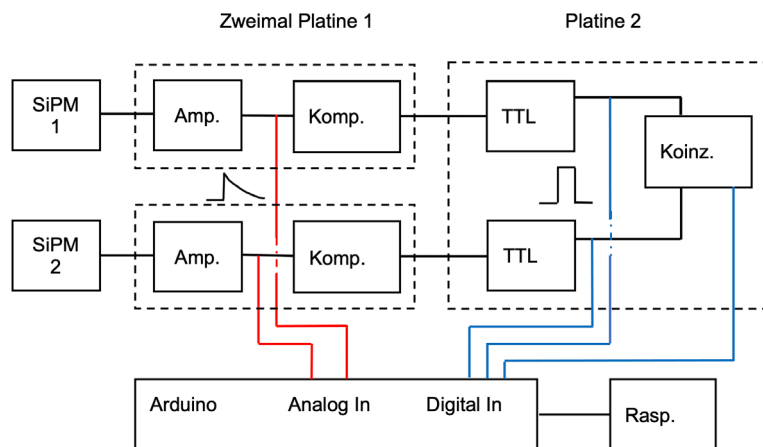


Abbildung 1: SiPM mit Lötstiften.

Seit etwa zwei Jahren habe ich mich nebenbei und ohne spezielle Vorkenntnisse mit SiPM und der zugehörigen Elektronik beschäftigt. Dieser Artikel berichtet von meinen Erfahrungen. Unter Link [2] sind alle Details zu den entwickelten Schaltungen und zum experimentellen Vorgehen zusammengefasst. Es wurden 6mm×6mm grosse SiPM (siehe Abbildung 1) mit etwa 19000 Zellen verwendet, die man für ca. SFr. 100.- erhält. Passende zylindrische NaI Szintillatoren kann man für etwa 90 SFr. pro Stück in China bestellen. **Die beiden selbst entwickelten Platinen können bei mir zum Selbstkostenpreis bezogen werden.**



(a)



(b)

Abbildung 2: (a) Spektrometer-Platine: Die wichtigsten Anschlüsse sind mit 2 mm Bananenbuchsen verbunden. Eine Plexiglas-Trägerplatte erlaubt es, die Schaltung in die integrierten Führungsschienen eines einfachen Standardgehäuses einzuschieben. (b) Blockschaltbild der Elektronik. Die (schnellen) Digitaleingänge des Arduino triggern die (langsamen) Analogmessungen.

2 Elektronik und Zubehör

Die ersten beiden Verstärkerstufen, der von mir entworfenen Spektrometer-Platine, sind vom Projekt 'Cosmic Watch' [3] übernommen, wo es um Experimente mit Myonen der kosmischen Strahlung geht. Nach diesen zwei OpAmp Stufen wird ein Kondensator geladen, dessen Spannungsmaximum möglichst proportional zur Energie

des ursprünglichen Peaks sein soll. Da diese Spannung mit einer (gross gewählten) Zeitkonstanten von etwa 300 μs abfällt, kann die Peakenergie mit einem (langsamen) Arduino erfasst werden. Allerdings sind so nur einige Hundert Pulse pro Sekunde verarbeitbar. Die ursprünglichen SiPM-Pulse sind etwa 1 μs lang. Die Schaltung weist auch einen Komparator auf, mit dem die Ansprechschwelle eingestellt wird. Der Verstärkungsgrad der zusätzlichen dritten Stufe kann mit zwei Potentiometern geregelt werden. Für die Einstellung der Elektronik ist ein Oszilloskop mit mindestens 20MHz Bandbreite sehr nützlich.

Die zweite Platine dient zur Koinzidenzmessung der Signale zweier SiPM. In jedem Kanal werden Rechteckpulse mit zwischen 5 und 25 μs einstellbarer Länge geformt und dann auf Gleichzeitigkeit getestet. Koinzidenzergebnisse werden ebenfalls vom oben erwähnten Arduino registriert und zusammen mit den beiden Pulsenergien auf einem Raspberry Pi abgespeichert. Die gesamte Elektronik ist also sehr einfach und billig gehalten. Abbildung 2 zeigt als Beispiel die Spektrometer-Platine und ein Blockschaltbild der gesamten Elektronik.

3 Experimente (Spektren, Koinzidenz, Quantenverschränkung)

3.1 Gamma-Spektroskopie

Die meisten Gymnasien besitzen wohl einige Gammaquellen, Spektrometer sind an Schulen aber wahrscheinlich weniger verbreitet. Abbildung 3 zeigt einige mit dem hier vorgestellten Eigenbau aufgenommene Spektren. Die Anzahl 'Slots' (1024) auf der horizontalen Achse ist durch den Arduino vorgegeben. Die verwendete Cobaltquelle war etwas schwach, der bekannte Doppelpack ist aber immerhin gut auflösbar. Natürlich muss das Spektrometer vor Verwendung geeicht werden. Wegen des nicht ganz linearen Verhaltens der SiPM und der Elektronik ist eine Kalibrierung mit zwei Quellen empfehlenswert. Reizvoll für eine Schulstunde ist z.B. die Eichung mit einer Cäsiumquelle und anschliessend die Messung der Elektronmasse via Annihilations-Peak (511 keV) mit einer Positronenquelle (Na-22). Der Aufbau der ganzen Apparatur braucht natürlich Zeit und auch Geduld, Matura-Arbeiten könnten dazu ideal sein.

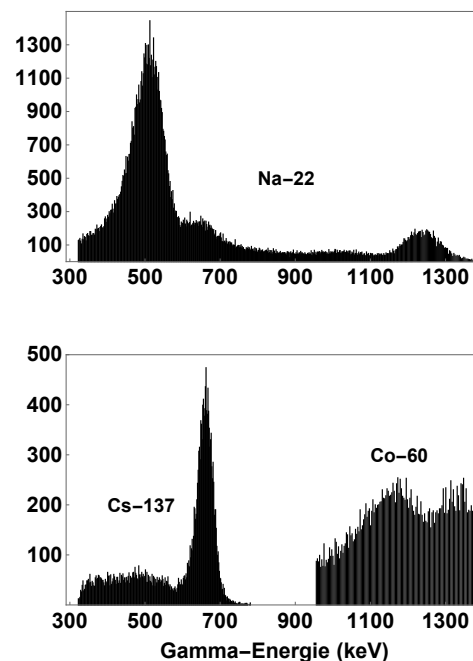


Abbildung 3: Gemessene Gamma-Spektren, die Eichung erfolgte mit Hilfe der beiden Na-22 Peaks. Typischerweise ergibt sich 'links' des jeweiligen Photopeaks eine relativ breite Struktur, welche durch Compton-Streuung innerhalb des Szintillators entsteht. Vertikale Achse: Anzahl registrierte Photonen pro 'Slot'.

3.2 Koinzidenz (Na-22 oder Myonen)

Beim β^+ -Zerfall von Na-22 annihiliert das Positron nach sehr kurzer Zeit mit einem Elektron. Deutlich am häufigsten entstehen dabei zwei 511 keV Gammaquanten, die unter 180° auseinander fliegen. Hier spielt es im vorliegenden Fall keine Rolle, ob die Annihilation direkt oder unter zwischenzeitlicher Bildung eines Para-Positronium-Atoms erfolgt. Durch Messung der γ -Koinzidenzrate als Funktion des Winkels lässt sich die Impulserhaltung bei der Positron-Annihilation testen, wozu natürlich zwei SiPM mit Szintillator notwendig sind. Bei Na-22 ist es sinnvoll die Koinzidenz-Ereignisse auszuschliessen, bei denen mindestens eines der beiden Gammas dem 1275 keV Peak entspricht.

Ähnliche Koinzidenz-Experimente können auch mit der kosmischen Strahlung durchgeführt werden, wobei Myonen auf der Erdoberfläche den Hauptanteil bilden. So lässt sich z.B. untersuchen, ob die Myonen vorzugsweise von 'oben' kommen. Da nur wenige Myonen pro Minute detektiert werden, sind relativ lange Messzeiten nötig. Mangels Eichmöglichkeit lässt sich die Energie von unbekanntem Teilchen nicht messen. Weiter können

Myonen auch nicht von anderen Teilchen der kosmischen oder terrestrischen Hintergrundstrahlung unterschieden werden. Trotzdem sieht man in Tabelle 1 dargestellten Messbeispiel eine deutlich höhere Anzahl von Koinzidenzereignissen in der vertikalen als in der horizontalen Anordnung. In beiden Fällen wurden die beiden Szintillatoren ohne Zwischenraum aufgestellt. Die Kontrollmessung mit 20 cm Abstand zwischen den beiden Detektoren ergab (wie erwartet) gar keine Koinzidenzen.

Tabelle 1: Messbeispiel: Koinzidenzraten mit Myonen (und anderen Teilchen der kosmischen und terrestrischen Strahlung)

Anordnung	Koinzidenzrate pro Minute	Messzeit
Vertikal (aufeinander)	0.58 min^{-1}	3 h
Horizontal (nebeneinander)	0.15 min^{-1}	3 h
20 cm voneinander entfernt	0	1 h

3.3 Verschränkung, Comptonstreuung und Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

3.3.1 Theorie der Winkelkorrelation

Bei der dominierenden Singulett-Kopplung von Positron und Elektron bilden die beiden entstehenden Photonen ein verschränktes System mit Gesamtspin Null im Sinne des Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) Paradoxons [4, 5]. Die Korrelation der Photonen Spins lässt sich mit einfachsten Mitteln via Compton-Streuung an einem Metall-Würfel nachweisen. Schon lange vor den theoretischen Arbeiten von Bell [6] und den dadurch angelegten Experimenten wurde die Winkelkorrelation bei der Positronannihilation um 1950 vorausgesagt [7] und gemessen [8]. Nach der Klein-Nishina Formel [9]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \hbar \lambda}{m_e c \lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \right] \quad (1)$$

aus dem Jahr 1929 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung eines (linear) 'polarisierten' Photons an einem Elektron (mit Masse m_e) nicht nur vom Streuwinkel θ , sondern auch vom azimutalen Winkel ϕ zwischen Polarisations- und Beobachtungsrichtung abhängig. λ und λ' sind dabei die Wellenlängen vor und nach der Streuung, und α steht für die Feinstrukturkonstante. Die Herleitung der Gleichung (1) war eine der ersten Anwendungen der damals neuen Quantenelektrodynamik von Dirac. Da die Spinkomponente eines Photons in Bewegungsrichtung nur $\pm \hbar$ sein kann, was (im System des Detektors) links- bzw. rechtszirkulär polarisierter Strahlung entspricht, kann man sich ein linear polarisiertes Gammaquant als eine Überlagerung beider Helizitäten vorstellen. Werden nun beide Gammaquanten aus der Annihilation des selben Positrons gemäss Abbildung 4a via Compton-Streuung gemessen, so ist die Koinzidenzrate $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ u.a. abhängig vom azimutalen Winkel $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den Richtungen zu den beiden Detektoren. Setzt man die Streuwinkel gleich ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$), so lässt sich das Koinzidenzraten-Verhältnis

$$V(\theta) = \frac{\Gamma(\theta, \varphi = 90^\circ)}{\Gamma(\theta, \varphi = 0^\circ)} = 1 + \frac{2 \sin^4(\theta)}{\eta^2 - 2\eta \sin^2(\theta)} \quad (2)$$

aus Gleichung (1) herleiten. Dabei wurde die Abkürzung $\eta = \frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda}$ verwendet und die Photonwellenlänge λ' nach der Streuung ergibt sich nach der bekannten Comptonformel $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} [1 - \cos(\theta)]$. Die Herleitung von Gleichung (2) findet man im Anhang. Das maximale Koinzidenzraten-Verhältnis $V = 2.83$ ergibt sich für $\theta \approx 82^\circ$. Besonders einfach werden die Verhältnisse für $\theta = 90^\circ$: Die Wellenlänge eines Photons aus der Positronannihilation wird genau verdoppelt, und es ergibt sich das theoretische Verhältnis $V = 2.6$.

3.3.2 Messungen zur Winkelkorrelation bzw. Quantenverschränkung

Der erwähnte zu erwartende Wert für das Koinzidenzraten-Verhältnis V gemäss Gleichung (2) bezieht sich auf die idealisierte Situation punktförmiger Streuzentren. Die Abschätzung des Einflusses endlich grosser Kollimatorblenden und der Comptonstreuung an ausgedehnten Metallkörpern wäre ein mögliches Thema für eine

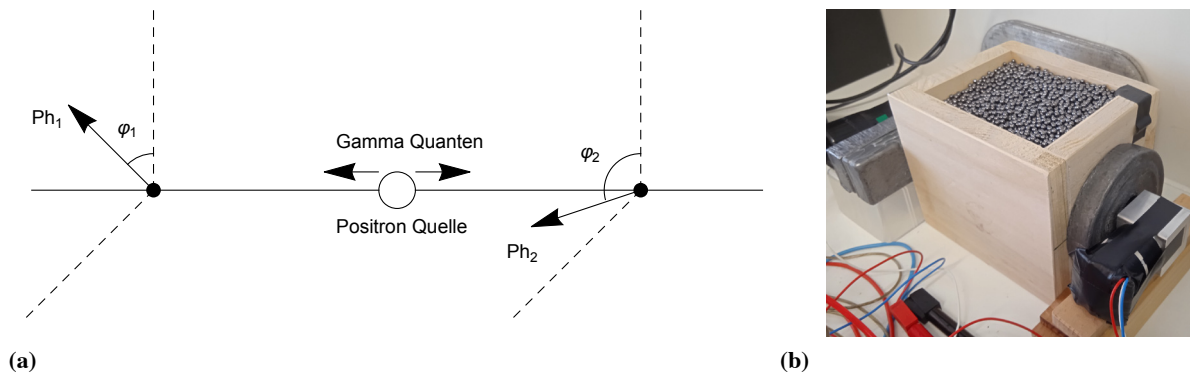


Abbildung 4: a) Messanordnung für den Nachweis der Winkelkorrelation: Streuwinkel $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ für beide Photonen, azimutale Winkeldifferenz $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den Flugrichtungen der beiden Photonen Ph_1 und Ph_2 nach der Compton-Streuung. Die schwarz ausgefüllten Scheibchen bezeichnen die beiden Streuzentren (Elektronen). b) Messanordnung: Im Innern der Holzbox verläuft ein Kunststoffrohr von vorne rechts nach hinten links. Die Na-22 Quelle befindet sich in der Mitte des Rohres, der umgebende Raum ist mit Bleikugeln gefüllt. Auf der rechten Seite sieht man einen der beiden Aluminiumwürfel, an denen Compton-Streuung stattfinden soll. Die zylindrischen Szintillatoren sind mit Klebeband an den Würfeln befestigt, unmittelbar anschliessend folgen (lichtdicht) die SiPM mit den nötigen Kabeln. Zusätzliche Bleiabschirmungen (Kollimatoren) vermindern die Anzahl Photonen, die direkt von der Quelle zu den Szintillatoren fliegen und unerwünschte (zufällige) Koinzidenzen auslösen. Das Bild zeigt die Anordnung zu $\varphi = 0^\circ$ (und $\theta = 90^\circ$).

(theoretische) Matura-Arbeit. In der Praxis muss man (für $\theta = 90^\circ$) einen Energiebereich um $\frac{511}{2}$ keV definieren, aus dem Koinzidenzereignisse akzeptiert werden. Ausserdem kann es trotz Bleiabschirmung zu Fehlmessungen durch Photonen kommen, die den Szintillator direkt erreichen und dort Compton gestreut werden. Typischerweise ergeben sich mit der Na-22 Quelle unserer Schule (Restaktivität ca. 3 μCi) in der gewählten Testanordnung (siehe Abbildung 4b) nur relativ wenige Koinzidenzereignisse pro Stunde, bei denen beide Gamma-Energien im definierten Intervall liegen. Um statistisch signifikante Aussagen zur Winkelkorrelation und damit zur Verschränkung der beiden Photonen nach der Positron-Annihilation zu erhalten, sind recht lange Messzeiten nötig. Tabelle 2 zeigt die Koinzidenzraten Γ in den beiden Anordnungen $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$ für einige Messserien. In der ersten Zeile sind die Koinzidenzraten zwar deutlich höher, bei diesem Experiment wurde aber nur auf der Primärseite ein zusätzlicher Bleikollimator verwendet. In den folgenden Zeilen sind die Raten kleiner, das Verhältnis $\Gamma_1(\varphi = 90^\circ) / \Gamma_2(\varphi = 0^\circ)$ ist andererseits aber näher am theoretischen Wert für punktförmige Streuzentren. Die Unterschiede der Raten zwischen der zweiten und dritten Zeilen lassen sich durch eine verbesserte Ausrichtung der Kollimatoren erklären. Ein weiterer Effekt ist eine mögliche leichte Verschiebung der Peaks während der Messzeit von einigen Stunden. Für wirklich fundierte Aussagen wären sehr sorgfältige Analysen und längere Messzeiten nötig. Aber immerhin deuten die jeweils innerhalb eines Schultages erzielten Ergebnisse auf einen deutlichen Effekt der Verschränkung der Photon-Spins hin. Eine mechanisch verbesserte Anordnung mit einer fest montierten Drehachse und Detektor-Drehung via Schrittmotor ist in Planung. Damit liessen sich dann bequem tagelange Mess-Serien steuern.

Tabelle 2: Messergebnisse zur Winkelkorrelation nach Comptonstreuung an Aluminiumwürfeln für $\theta = 90^\circ$. Gesamte Messzeit in Stunden (h). Alle Koinzidenzraten Γ pro Minute. Die Bemerkungen mit/ohne beziehen sich auf einen zusätzlichen Bleikollimator auf der Sekundärseite. Die Messzeit ist die Summe der Anteile in den beiden Anordnungen. Der absolute Fehler von Γ_1 / Γ_2 ist geschätzt via Poissonverteilung und Fehlerfortpflanzung.

Messung	$\Gamma_1(\varphi = 90^\circ)$	$\Gamma_2(\varphi = 0^\circ)$	Γ_1 / Γ_2	Messzeit	Bemerkungen
1	2.544 min^{-1}	1.374 min^{-1}	1.85 ± 0.26	2 h	ohne
2	0.478 min^{-1}	0.221 min^{-1}	2.16 ± 0.46	5.2 h	mit
3	0.588 min^{-1}	0.296 min^{-1}	1.99 ± 0.41	4.2 h	mit

4 Schlussfolgerungen und Ausblick

Experimente und Basteleien mit SiPM sind nach meiner Einschätzung ein reizvolles Gebiet, sowohl für Physiklehrkräfte, als auch für interessierte Schüler/innen (z.B. im Rahmen einer Matura-Arbeit). Vor allem bei Koinzidenz-Messungen mit kleinen Raten stellen sich ausserdem interessante, statistische Fragen nach der Signifikanz der Ergebnisse. Für mich persönlich war die Wiederentdeckung der Elektronik (kurz vor der Pensionierung) ein gutes Erlebnis. Als Theoretischer Physiker ohne fundierte Kenntnisse in Elektronik habe ich Vieles durch Ausprobieren gelernt. Es würde mich freuen, wenn dieser Artikel ähnliche Aktivitäten an anderen Schulen anregen könnte. Verbesserungsvorschläge von Kolleginnen und Kollegen mit mehr Elektronik-Erfahrung wären sehr erwünscht.

Dank

Mein besonderer Dank gilt Martin Schranz für die kompetente Hilfe bei mechanischen Problemen.

Anhang: Herleitung von Gleichung (2)

Man kann annehmen, dass beide Helizitäten des 'ersten' Gammaquants (vor der Streuung) gleich wahrscheinlich sind. Die folgende kleine Herleitung ist aber für lineare Polarisation formuliert, wie es auch der Klein-Nishina Formel (1) entspricht. Die beiden Darstellungen lassen sich mit einer linearen Abbildung in einander transformieren. Wir verwenden als Referenz die Streuebene des ersten Photons Ph_1 . Nach Gleichung (1) erhält man für die Wahrscheinlichkeiten der Polarisationsrichtung des (ersten) Photons nach der Streuung $p_1^p = \left[\frac{\eta - 2 \sin^2(\theta)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ (in der Streuebene $\phi = 0^\circ$) bzw. $p_1^s = \left[\frac{\eta}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ (senkrecht zur Streuebene $\phi = 90^\circ$). Wenn wir annehmen, dass die beiden Photonen vor der Streuung senkrecht zueinander polarisiert und die beiden Streuwinkel gleich (θ) sind, dann ergeben sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für das 'zweite' Photon Ph_2 : $p_2^p = \left[\frac{\eta}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$ bzw. $p_2^s = \left[\frac{\eta - 2 \sin^2(\theta)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)} \right]$. Damit wird der Wirkungsquerschnitt dafür das zweite Photon Ph_2 in Koinzidenz mit Ph_1 zu detektieren proportional zu $W(\theta, \varphi) = p_2^p [\eta - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)] + p_2^s [\eta - 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi - 90^\circ)]$, wobei φ nach wie vor für die azimutale Winkeldifferenz zwischen den beiden Beobachtungsrichtungen steht. Vereinfachung liefert $W(\theta, \varphi) = \frac{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta) + 4 \sin^4(\theta) \sin^2(\varphi)}{2\eta - 2 \sin^2(\theta)}$. Bildet man nun das Verhältnis

$$\frac{W(\theta, \varphi = 90^\circ)}{W(\theta, \varphi = 0^\circ)} = \frac{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta) + 4 \sin^4(\theta)}{2\eta^2 - 4\eta \sin^2(\theta)}, \quad (3)$$

so ergibt sich Gleichung (2).

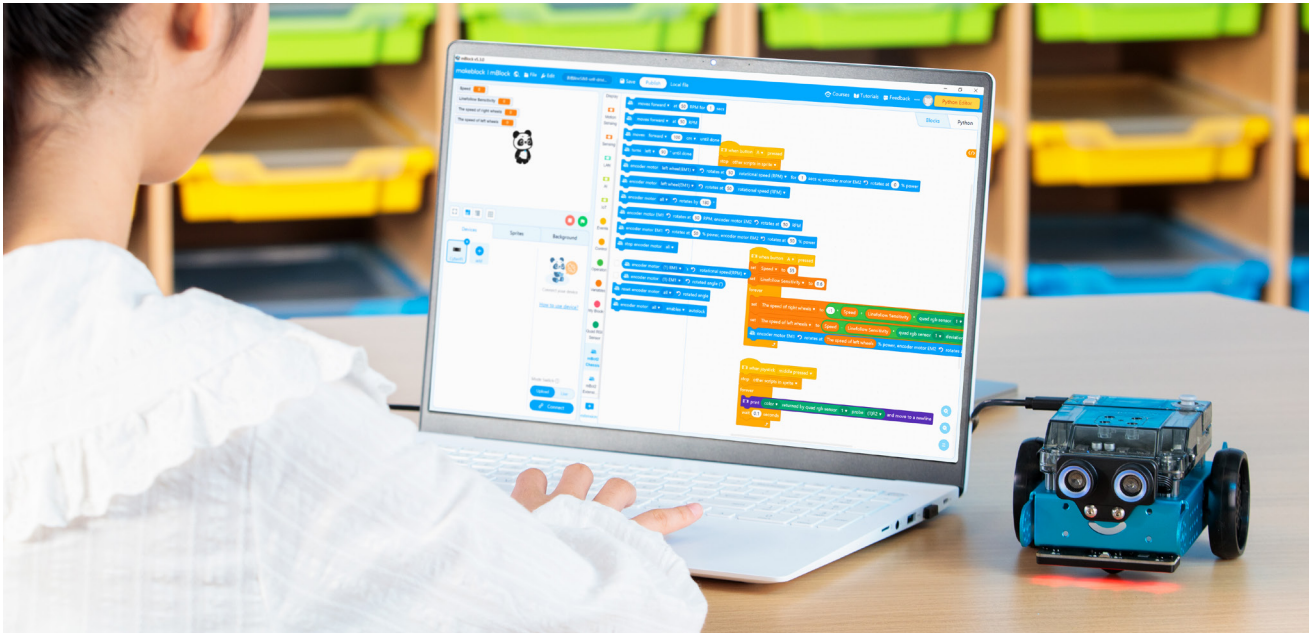
Literatur und Links

- [1] Stefan Gundacker and Arjan Heering, 2020, *Phys. Med. Biol.* **65** 17TR01
- [2] <https://www.martinlehner.ch>
- [3] <http://www.cosmicwatch.lns.mit.edu>
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, 1953, *Phys. Rev.* **47** 777
- [5] A. Faraci, D. Gutkowski, S. Notarrigo, A.R. Pennisi, 1974, *Lett. al Nuovo Cimento* **9** 607
- [6] J.S. Bell, 1964, *Physics* **1** 195
- [7] M.H.L. Pryce, J.C. Ward, 1947, *Nature* **160** 435
- [8] C.S. Wu, I. Shaknov, 1950, *Phys. Rev.* **77** 136
- [9] O. Klein, Y. Nishina, 1929, *Z. Physik* **52** 853

DIE NEUEN MAKEBLOCK PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/mbot2

Der neue, netzwerkfähige Roboter zur Vermittlung von Informatik-, Robotik und MINT-Kenntnissen



mBot2 ist ein Lernroboter der nächsten Generation, der als Einstiegslösung für die Sekundarstufe konzipiert worden ist. Mit mBot2 lassen sich reale Anwendungen auf modernsten Technologie-Standards - einschliesslich **Robotik, künstlicher Intelligenz, Internet of Things und DataScience** - lehren und lernen. mBot2 wurde entwickelt, um Schülerinnen und Schülern einen interaktiven und intelligenten Unterricht zu ermöglichen, welcher fesselnd ist und Spass macht.

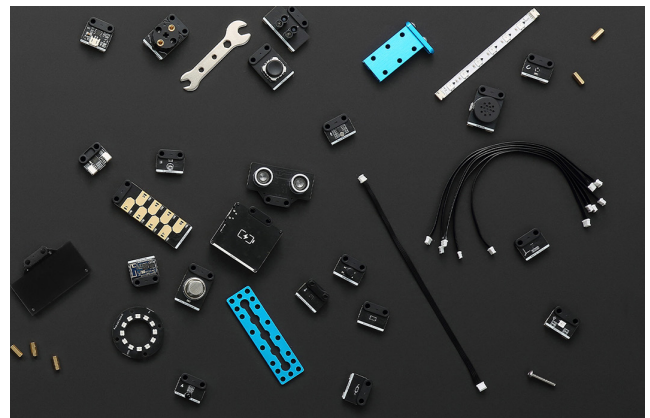
Mit der verbesserten Coding-Lernerfahrung von **mBlock** ermöglicht mBot2 Studenten und Pädagogen, mit dem blockbasierten Programmier-Ansatz zu beginnen und nahtlos in die objektorientierte, textbasierte Programmierung mit dem **Mu Python Editor** überzugehen - alles in derselben Umgebung.

Weitere Informationen zu mBot2 finden Sie unter: educatec.ch/mbot2

Elektronische KI-Module der nächsten Generation

mBuild ist eine Serie von elektronischen KI-Modulen. Diese zusätzlichen Module lassen sich am **mBot2** Roboter anschliessen und programmieren. Die Serie verfügt beispielsweise über ein Smart-Kamera-Modul, mit dem der mBot2 intelligente Augen erhält. Unterstützt von der grafischen Programmiersprache mBlock und dem Mu Python Editor, bietet mBuild eine breite Anzahl von Möglichkeiten interessante Projekte für Anfänger und Profis zu erstellen. mBuild vermittelt spielerisch die Grundlagen von **künstlicher Intelligenz** und **Internet of Things** durch seine vielfältigen und programmierbaren Module.

Weitere Informationen zu mBuild finden Sie unter: educatec.ch/tectools/makeblock/mbuild



makeblock
education

Sind Sie Lehrer/In und möchten mBot2 drei Wochen lang unverbindlich in Ihrem Klassenzimmer testen? Dann nutzen Sie die Gelegenheit und fordern Sie über den **QR-Code kostenlos** eine Produktdemo an.

EducaTec AG
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educatec

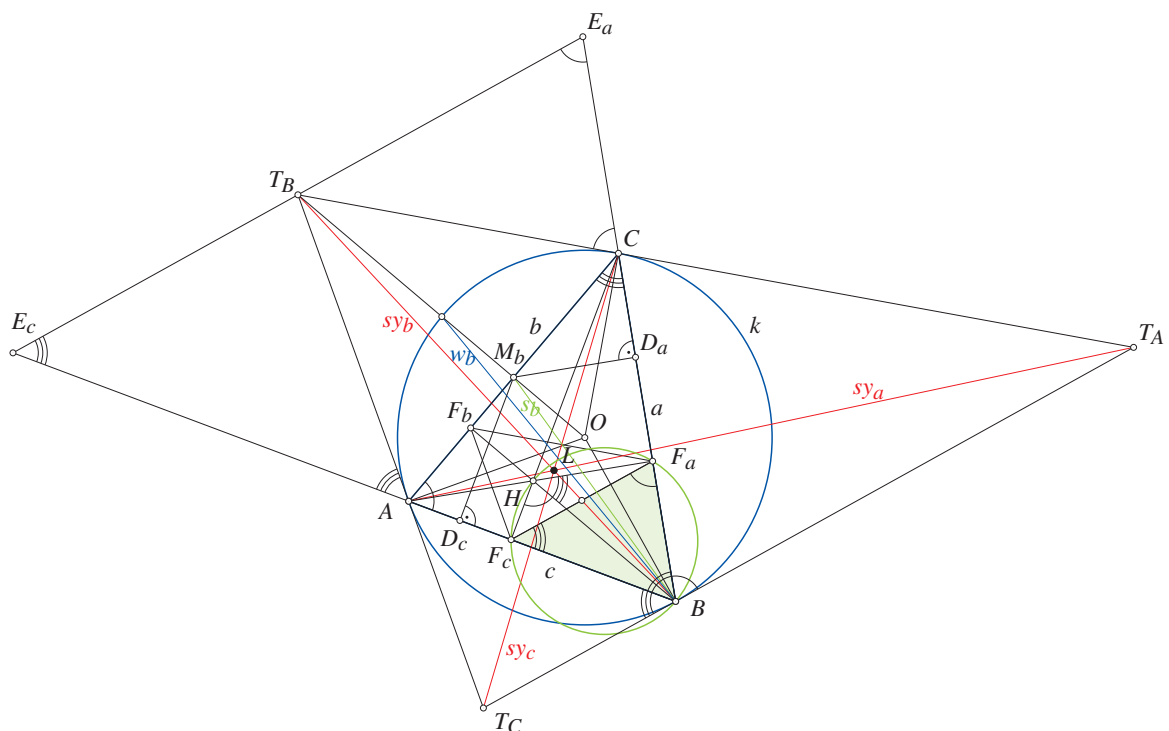
Verkannte Symmedianen, Lemoine-Punkt, Gergonne-Punkt und ein Muster von vielen ähnlichen Dreiecken

Peter Gallin, peter@gallin.ch

1 Einführung und Grundlagen

Man mag über die sozialen Medien — wie etwa Twitter — denken, was man will, in meinem Fall als pensioniertem Mathematiklehrer bietet gerade diese Plattform die Möglichkeit, sich mit anderen Mathematikbegeisterten zu vernetzen und so laufend neue kleine Probleme in Form von knappen Bildchen und kurzen Texten zu erhalten, auf die man dann durch eigene Lösungen reagieren kann. So bin ich vor Kurzem dank @Math26039335 auf zwei Probleme gestossen, die Symmediane und Lemoine-Punkt thematisierten. Die zugehörigen Links gebe ich später an.

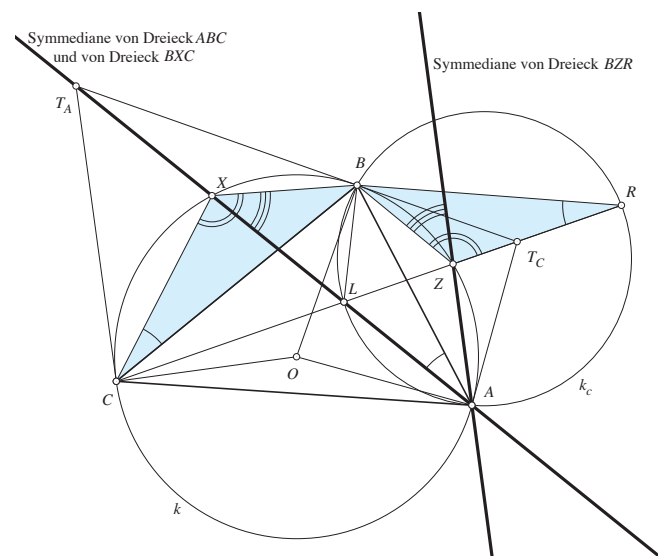
Erinnern wir uns an ein paar Grundtatsachen zu den Symmedianen in einem $\triangle ABC$. Man erhält z. B. die Symmediane sy_b durch Spiegeln der Seitenhalbierenden s_b an der Winkelhalbierenden w_b des $\triangle ABC$. Da ein Punkt der Seitenhalbierenden — wie etwa der Mittelpunkt M_b auf b — wegen der Gleichheit des Flächeninhalts von $\triangle M_bCB$ und $\triangle M_bAC$ das Abstandsverhältnis $|M_bD_a| : |M_bD_c| = c : a$ hat, verhält sich der Abstand eines Punktes der Symmedianen sy_b zu a zum Abstand zu c wie $a : c$. Im VSMP-Bulletin Nr. 87 vom September 2001 (Seite 24) habe ich im kleinen Beitrag «Die Symmediane», nachgewiesen, dass die Symmediane sy_b die Gegenseite b im Verhältnis $a^2 : c^2$ teilt während ja die Winkelhalbierende w_b sie im Verhältnis $a : c$ teilt. Daraus ergibt sich mit dem Satz von Ceva direkt, dass sich die drei Symmedianen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, dem Lemoine-Punkt L .



Die eleganteste Konstruktion der Symmedianen geht nun allerdings nicht über das Spiegeln an den Winkelhalbierenden, sondern über das $\Delta T_A T_B T_C$, das aus den Tangenten an den Umkreis k des $\Delta^s ABC$ gebildet wird: $BT_B = sy_b$ usw. Um dies einzusehen, betrachten wir zuerst das Höhenfusspunkt-dreieck $F_a F_b F_c$ des $\Delta^s ABC$. Das (grüne) Teildreieck $F_a F_c B$ besitzt einen Umkreis, der durch den Höhenschnittpunkt H geht, so dass mit dem Peripheriewinkelsatz sofort ersichtlich ist, dass es den gleichen Winkel wie das ΔABC besitzt. Es ist also ähnlich zu ihm, allerdings ungleichsinnig ähnlich. (Das gilt für auch für $\Delta F_c F_b A$ und $\Delta F_b F_a C$.) Eine Spiegelung an w_b bringt es in perspektiv-ähnliche Lage zum ΔABC . Das bedeutet, dass seine Seitenhalbierende auf der Symmedianen sy_b liegen muss, denn nach dem Spiegeln fällt seine Seitenhalbierende auf die Seitenhalbierende s_b von ΔABC . Man kann also nur die Mittelpunkte der Seiten des Höhenfusspunkt-dreiecks bestimmen, um die Symmedianen zu konstruieren. Da nun aber mit dem Sehnen-Tangenten-Satz die Seiten des Höhenfusspunkt-dreiecks parallel zu den Seiten des Tangentendreiecks liegen, verschieben wir z. B. die Tangente $T_C T_A$ parallel durch T_B und erhalten die Punkte E_a und E_c auf den verlängerten Seiten a und c des $\Delta^s ABC$. Dadurch entstehen — wieder nach dem Sehnen-Tangenten-Satz — zwei gleichschenklige Dreiecke $T_B E_a C$ und $T_B E_c A$. Daraus ergibt sich $|T_B E_a| = |T_B C| = |T_B A| = |T_B E_c|$. T_B ist also Mittelpunkt der zu $F_a F_c$ parallelen Strecke $E_a E_c$, womit gezeigt ist, dass T_B auf sy_b liegen muss. Damit ist gleichzeitig gezeigt, dass der Lemoine-Punkt von ΔABC auch Gergonne-Punkt des aus den Tangenten an k in A , B und C gebildeten $\Delta^s T_A T_B T_C$ ist.

2 Eine erste Drehstreckung

Die Hauptrolle der folgenden Untersuchungen spielen die Umkreise von ΔABL , ΔBCL und ΔCAL . Beginnen wir mit k_c , dem Umkreis von ΔABL . L haben wir natürlich über die Symmedianen sy_a resp. sy_c als Geraden AT_A resp. CT_C konstruiert. Sie schneiden k in X resp. Z . Erstaunlicherweise sind die Dreiecke BXC und BZR ähnlich zueinander, denn wegen des Peripheriewinkelsatzes sind die Winkel mit einem oder zwei Bogen jeweils gleich gross. Ausserdem stellen wir fest, dass die Gerade $sy_a = AT_A$ nicht nur Symmediane von ΔABC ist, sondern auch Symmediane von ΔBXC , denn k ist auch Umkreis dieses Dreiecks und die Tangenten in B und C sind für die Bestimmung der Symmedianen massgebend. Also ist XT_A Symmediane von ΔBXC . Da nun auch die Winkel mit drei Bogen gleich sind, muss auch AZ Symmediane von ΔBZR sein. Insgesamt liegt also eine Drehstreckung mit Zentrum B , Drehwinkel $\angle XBZ$ und Faktor $|BZ| : |BX|$ vor, welche das ΔBXC in das ΔBZR mitsamt der Symmedianen abbildet.

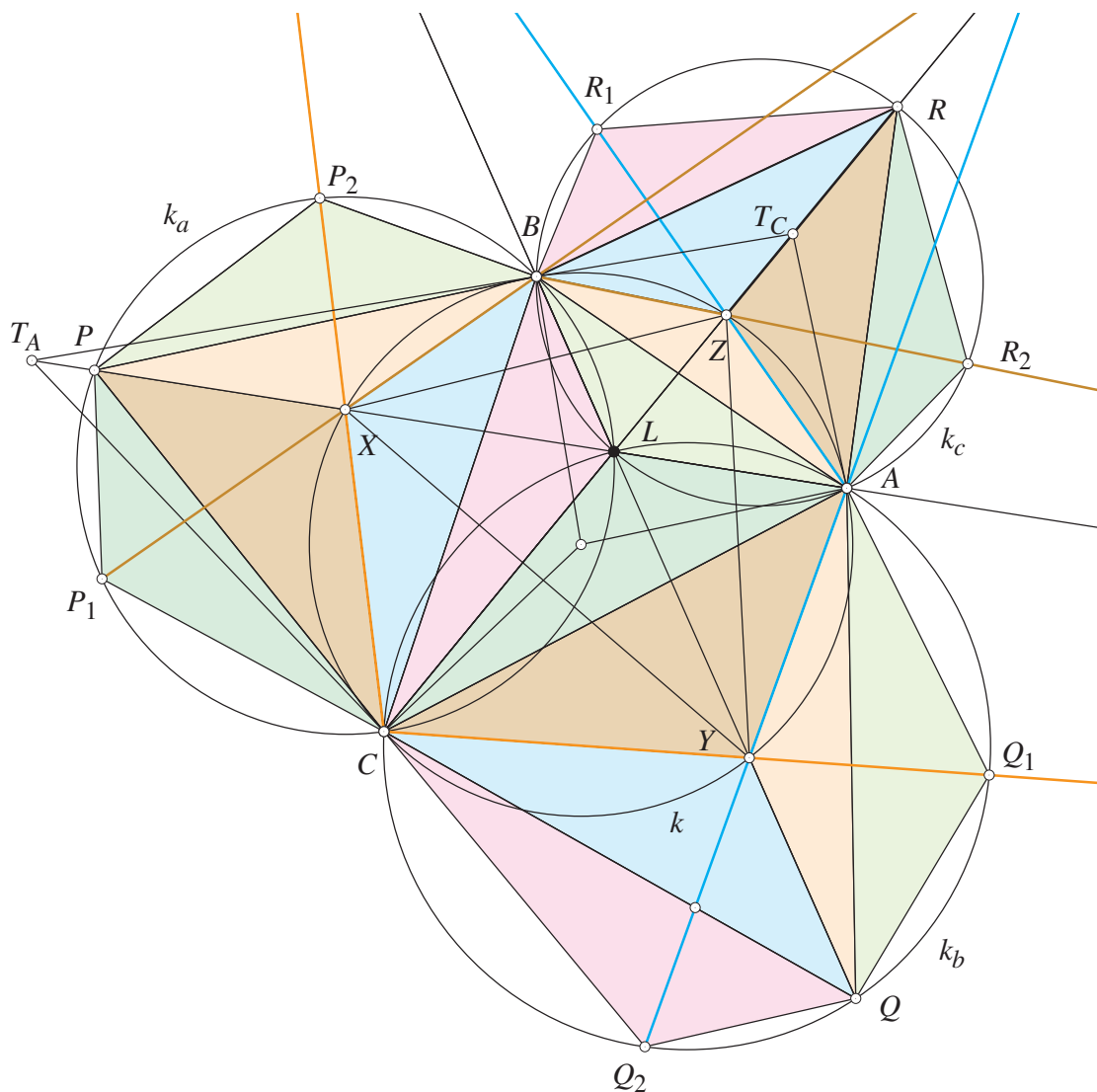


3 Ein interessantes Nebenergebnis

In der folgenden Abbildung sind nun neben den ähnlichen Dreiecken BXC und BZR mehr Details eingetragen. Zuerst geht es um den Nachweis, dass die beiden grünen Dreiecke ähnlich sind. Wir fällen von A aus die Lote AE resp. AF zu den Seitengeraden BZ resp. RZ . Dadurch werden automatisch die mit zwei Bögen markierten Winkel bei A und bei Z gleich. Dann konstruieren wir den Umkreis von ΔAEF , der auch durch Z geht, da das Viereck $AEFZ$ ein Sehnenviereck ist. Damit gilt:

5 Ein Muster mit vielen ähnlichen Dreiecken

Das Spiel mit ähnlichen Dreiecken und Drehstreckungen kann nun auf die Spitze getrieben werden. Was wir mit dem $\triangle BXC$ (blau) gemacht haben, kann man auch mit $\triangle CYA$ (braun) oder $\triangle AZB$ (orange) tun. So erhält man je zwei weitere ähnliche Dreiecke mit den entsprechenden Farben. Aber die drei Drehstreckungen mit den Zentren A , B oder C bewirken, dass auch die bisher nicht betrachteten, äusseren Dreiecke mit den Ecken P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 und R_2 — also die ganzen Sechsecke mit den Umkreisen k_a, k_b oder k_c — mitabgebildet werden und so automatisch ähnlich zu den inneren Teildreiecken von $\triangle ABC$ mit Ecke L sind. Mit jeder Drehstreckung und ihrer Inversen, werden diese sechs Punkte auf L abgebildet. Insgesamt treten zu den blauen, braunen und orangen Dreiecken ausserhalb k je zwei zugehörige Symmedianen in gleichen Farben auf. Das blaue, braune und orangen Dreieck innerhalb k haben schwarze Symmedianen.



Zum Abschluss sei noch darauf hingewiesen, dass sich je zwei verschiedenfarbige Symmedianen mit einer dazwischen liegenden schwarzen Symmedianen in je einem Punkt treffen. Diese drei Punkte liegen auf einer Geraden (ausserhalb der hier gezeigten Figur), der Pascalgeraden der sechs Punkte A, Z, B, X, C und Y von k . Die Pascalgerade ist gleichzeitig Polare bezüglich k zum Pol L .

Mathematikteamwettbewerb Náboj 2022

Nina Stumpf und Hana Rozhoňová, info-ch@naboj.org

Jahr 2021, Aufgabe 12: Sei n eine positive ganze Zahl. Nun betrachte alle aufsteigenden Folgen F_n , die mit 1 starten und den konstanten Abstand n zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern haben. Beispielsweise ist F_2 die Folge 1, 3, 5, ... Für wie viele n enthält die Folge F_n die Zahl 2021 als Folgenglied?

Das ist eine der 51 Aufgaben, welche die Teilnehmenden von Náboj 2021 bearbeiteten. Der internationale Wettbewerb dauert 120 Minuten, in denen Teams à fünf Gymnasiast*innen so viele Aufgaben wie möglich zu lösen versuchen. Am Ende erfahren sie neben ihrer nationalen Rankierung auch, wie sie im Vergleich zu den insgesamt über 1000 Teams aus anderen Ländern abgeschnitten haben.

Im Frühjahr 2019 fand Náboj erstmals auch in der Schweiz an der ETH Zürich statt. 2020 und 2021 folgten COVID-19-bedingt zwei Online-Wettbewerbe. Mit diesem Artikel möchten wir auf die kommende vierte Schweizer Ausgabe von Náboj aufmerksam machen, welche am 18. März 2022 stattfinden wird – wegen der nach wie vor unsicheren epidemiologischen Lage noch einmal online.

1 Ablauf des Wettbewerbs

Jedes Team startet mit sechs Aufgaben, für jede richtig gelöste gibt es eine neue. Das Ziel besteht darin, innert 120 Minuten möglichst viele Aufgaben zu lösen. Der Schwierigkeitsgrad steigert sich fortlaufend, je länger je mehr sind eigene Ideen und Kreativität gefordert, es geht um mehr als die Anwendung erlernter Methoden. Die Teams treten in zwei Kategorien an, Junioren und Senioren. Sämtliche Mitglieder*innen eines Juniorteams müssen noch mindestens 2 Jahre vor ihrer Matura stehen, bei den Senioren gibt es keine Altersbeschränkung. Die einfachsten zehn Aufgaben sind den Junioren vorbehalten, die restlichen Aufgaben sind für beide Kategorien identisch.

Bei der Onlineversion erhalten die Teams die Aufgaben über ein Webinterface, wo sie auch ihre Lösungen eingeben können. War eine Antwort korrekt, erhält das Team sofort Zugang zur nächsten Aufgabe. Daneben gibt es vor dem Wettbewerb eine kurze Einführung durch das Schweizer Organisationsteam, welches während des Wettbewerbs dann via Chat für Fragen zur Verfügung steht.

Datum	18. März 2022
Zeit	09:30 bis 12:15
Ort	online
Anmeldung	ab dem 14.02.2022 über math.naboj.org

Teilnahmeberechtigt sind sämtliche Schüler*innen Schweizer Gymnasien. Die Aufgaben werden jedoch ausschliesslich auf Deutsch zur Verfügung gestellt.

Wichtig Die Anmeldung erfolgt in Teams à bis zu fünf Personen desselben Gymnasiums, entweder durch die Lehrperson oder direkt durch ein Teammitglied. Sämtliche Informationen werden an die im Anmeldeformular angegebene Kontaktperson versandt.

2 Náboj international

Náboj wurde 1998 in der Slowakei gegründet. Seit da wuchs die Anzahl Austragungsorte beträchtlich: 2019, der letzten Ausgabe vor Ort, fand Náboj in 17 Städten in 10 Ländern Europas statt. Online wurde Náboj danach in 12 Ländern durchgeführt – mit dem Iran kam dabei auch das erste nicht-europäische Austragungsland dazu.

3 Organisation

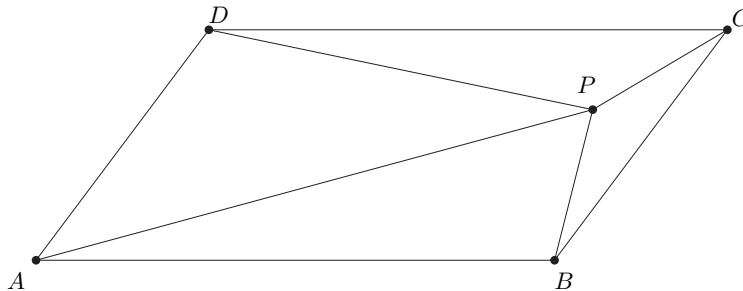
Náboj wird in der Schweiz von einem kleinen, jungen, internationalen Team in Freiwilligenarbeit organisiert. Um die Durchführung für die Zukunft zu sichern, sind wir auf der Suche nach Unterstützung, besonders nach Leuten mit guten Deutschkenntnissen und idealerweise einer Verbindung zur ETH in Zürich, wo der Wettbewerb einst hoffentlich wieder stattfinden kann. Bei Interesse freuen wir uns über eine E-Mail an info-ch@naboj.org.

4 Beispielaufgaben

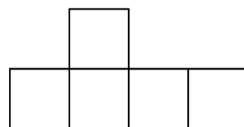
Im Folgenden einige weitere Aufgaben vom letztjährigen Wettbewerb.

Jahr 2021, Aufgabe 11: Von der Zahl 6437051928 sollen genau fünf Ziffern entfernt werden, so dass die sich ergebende fünfstellige Zahl die größtmögliche ist. Wie lautet die erhaltene Zahl?

Jahr 2021, Aufgabe 14: Im Parallelogramm $ABCD$ liegt ein Punkt P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks CDP drei Mal so gross ist wie der des Dreiecks BCP und ein Drittel so gross wie der des Dreiecks APD . Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABP , wenn das Dreieck CDP den Flächeninhalt 18 besitzt.



Jahr 2021, Aufgabe 31: Nadja und Selina spielen «Schiffe versenken». Neben anderen Schiffen hat jeder ein Kanonenschiff mit Hubschrauberlandeplatz in der folgenden Form:



Nadja hat ihr Kanonenschiff irgendwo im Spielfeld, das ein 12×12 -Gitter ist, versteckt. Weil sie dieses Spiel mit Bleistift auf einem Stück Papier spielen, kann die obige Figur rotiert und umgedreht werden. Wie oft muss Selina mindestens schießen, das heisst, ein Quadrat im Gitter auswählen, damit sie mit Sicherheit das Kanonenschiff von Nadja mindestens einmal getroffen hat?

Jahr 2021, Aufgabe 33: Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl, die nur mit den Ziffern 2 und 9 geschrieben werden kann, eine ungerade Anzahl von Ziffern hat und durch 11 teilbar ist?

Die Lösungen zu den Aufgaben sind verfügbar im Archiv auf der Webseite math.naboj.org.

5 Überzeugt?

Dann erzählen Sie Ihren Klassen von Náboj oder stellen Sie gleich selbst ein Team zusammen! Um den Anmeldestart nicht zu verpassen, gibt es auf der Webseite die Möglichkeit, einen Newsletter zu abonnieren.

Buchrezension

Hans Walser, hwalser@bluewin.ch

Schmitz, Michael (2021): **MATHE KANNSTE KNICKEN. Kreativer und aktivierender Mathematikunterricht mit Papierfalten.**

Seiten: 242. eISBN: 978-3-446-47153-5. Print ISBN: 978-3-446-46940-2.

© 2021 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG. Preis: 19,99€.

Das Buch verbindet die Faltgeometrie mit der klassischen Schulgeometrie. Den Fotos mit Faltmodellen werden konventionelle (etwas bezeichnungslastige) Strichzeichnungen gegenübergestellt. Dies illustriert einerseits die greifbare Eleganz der Faltmodelle, andererseits aber auch die Notwendigkeit, Geometrie begrifflich zu verstehen.

Geometrische Grundbegriffe (Geraden, rechte Winkel, Winkelunterteilungen, Symmetrie) und Beweise zu elementaren geometrischen Sätzen werden in die Faltgeometrie übertragen. Dabei wird klar zwischen exakten und näherungsweise Konstruktionen unterschieden.

Als Arbeitsmaterial werden neben dem klassischen quadratischen Origamipapier auch andere Formate verwendet wie etwa Papier im DIN-Format, kreisförmiges Papier oder Papierstreifen.



Der etwas reisserisch anmutende Titel erklärt sich dadurch, dass «Knicken» ein in der Falttechnik gängiges Verfahren bezeichnet, um eine gerade Faltlinie abzuknicken. Ein klassisches Beispiel dazu ist der Übergang vom Schwanenhals zum Kopf. Allerdings stehen im Buch weniger figürliche Darstellungen wie Tiere oder Blumen im Zentrum, sondern ein betont mathematisches Origami.

Geometriedidaktisch besonders wertvoll sind die vielen Beispiele zur Raumgeometrie. Im Unterschied zur ebenen Schulgeometrie leben diese Modelle nun wirklich im Raum: Würfel, Pyramiden, Tetraeder und Oktaeder, Polyederverschneidungen.

Das Buch enthält einen Link und einen Code für digitales Zusatzmaterial (Druckvorlagen für Schnittmuster, Videos für einige Faltobjekte, Ergänzende Literatur). Den Videos kann man recht gut folgen und parallel zum Abspielen des Videos fast ohne Anhalten sein eigenes Modell falten.

Im Idealfall regt das technisch gut gemachte Buch zu eigenen Faltideen an.

Das DMK-Lehrwerk «Analysis» erklärt!

Was bietet der Aufgabenband?



DMK (Hrsg.)
Baoswan Dzung Wong / Marco Schmid /
Regula Sourlier-Künzle / Hansjürg Stocker / Reto Weibel

Analysis – Aufgaben

Inklusive E-Book

1. Auflage 2022

ca. 288 Seiten, broschiert | 18,4 × 26,5 cm | Fr. 37.– | 978-3-280-04200-7

Nur E-Book

Fr. 33.30 | 978-3-280-09235-4

In dieser umfassenden Aufgabensammlung werden vielfältige Aufgaben zur Verfügung gestellt. Jedes Kapitel besteht aus Einstiegsaufgaben oder -fragen, zunehmend komplexeren Übungsaufgaben und Anwendungsaufgaben; den Abschluss bilden «Vermischte Aufgaben» und «Kontrollaufgaben». Dies ermöglicht es den Lehrpersonen, aus dem umfangreichen Material eine Auswahl zu treffen, welche zum entsprechenden Lehrplan und zum eigenen Unterricht passt. Der Aufgabenband enthält die Ergebnisse zu **sämtlichen** Aufgaben.

Was bietet der Band mit den ausführlichen Lösungen?



DMK (Hrsg.)
Baoswan Dzung Wong / Marco Schmid /
Regula Sourlier-Künzle / Hansjürg Stocker / Reto Weibel

Analysis – Ausführliche Lösungen

Inklusive E-Book

1. Auflage 2022

ca. 256 Seiten, broschiert | 18,4 × 26,5 cm | ca. Fr. 49.– | 978-3-280-04201-4

Nur E-Book

ca. Fr. 44.10 | 978-3-280-09236-1

Der Lösungsband beinhaltet nicht nur die Endresultate, sondern zeigt in nachvollziehbarer Weise die Lösungswege auf. Aufgrund ihrer Ausführlichkeit können die «Lösungen» nicht nur den Lehrpersonen, sondern auch den Lernenden ein praktisches Arbeitsinstrument sein.

«Analysis» ist als **Kombipaket** erhältlich

Fr. 73.– | 978-3-280-04221-2

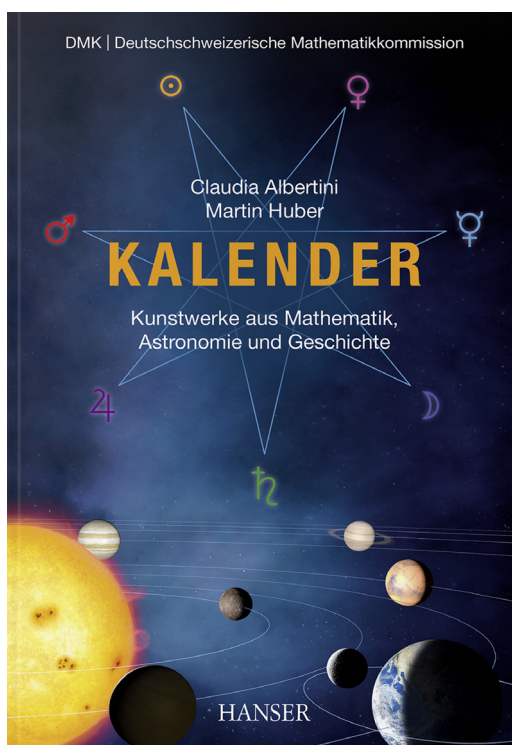


Bestellen Sie online über ofv.ch/lermedien

orell füssli
verlag

Buchrezension: Claudia Albertini, Martin Huber: „Kalender – Kunstwerke aus Mathematik, Astronomie und Geschichte“

Josef Züger, Bündner Kantonsschule, j.zueger@sunrise.ch



258 Seiten, Hanser Verlag, 2021, ISBN 978-3-446-46856-6, e-Book ISBN 978-3-446-46857-3.

In unserem täglichen Leben benutzen wir in aller Selbstverständlichkeit Kalender und nur wenige unter uns haben sich je die Frage gestellt, weshalb der bei uns gebräuchliche Gregorianische Kalender genau so aussieht, wie er das tut. Claudia Albertini und Martin Huber beantworten im 258-seitigen Buch, welches diesen Sommer nach siebenjähriger Forschungs- und Bearbeitungszeit publiziert wurde, diese und weitere Fragen zum Thema Kalender.

Das Buch ist in acht Kapitel gegliedert in welchen historisch fundiert und mit dem notwendigen astronomischen Hintergrund beleuchtet wird, mit welchen Methoden verschiedene Kulturen versucht haben, die nicht ganzzahligen Umlaufzeiten des Mondes um die Erde und der Erde um die Sonne in Wochen, Monate und Jahre zu unterteilen. Als Gliederung des Buches wurde die Abfolge der Wochentage gewählt. Beginnend mit dem Sonntag, welcher – nomen est omen – der Sonne gewidmet ist, werden die Wochentage als roter Faden durch das Buch besucht, bis der Kreis sich wieder beim Sonntag, diesmal als Dies Dominica, schliesst.

In sorgfältig erstellten, zahlreichen Grafiken werden zunächst Betrachtungen aus geozentrischer Sicht durchgeführt und hergeleitet, wie die massgebenden Punkte (Aufgang, Kulmination und Untergang) der Bahnen der Fixsterne und der Sonne berechnet werden. Im zweiten Kapitel (Montag) wird in der Betrachtungsweise auf das heliozentrische Weltbild gewechselt. Es folgen erste Betrachtungen zu Kalendern, welche auf den Mondphasen beruhen. Dem Leser wird klar, wieso der Ramadan des Islamischen (lunaren) Kalender in unserem Kalender und in den Jahreszeiten rückwärts läuft und wie man es im Babylonischen Kalender (lunisolarer Kalender) mit geschicktem Einführen von ganzen Schaltmonaten schaffte, die Länge des Jahres im Durchschnitt an die Umlaufzeit der Erde um die Sonne anzupassen. Nachdem das heliozentrische Weltbild mit den Keplerschen Gesetzen vertieft wurde, werden verschiedene Solarkalender beschrieben, insbesondere wird nun der Julianische Kalender analysiert. Schliesslich wird im Donnerstag das Bedürfnis nach einer Kalenderreform aufgezeigt und der Übergang zum Gregorianischen Kalender dargestellt. In weiteren Abschnitten werden diverse Kalendervarianten aufgegriffen. Besonders überrascht war ich zu lesen, dass es auch Versuche gab, Kalender so zu bilden, dass jeder Monat aus einer ganzen Anzahl Wochen bestand und somit jeder Monat und somit auch jedes Jahr mit dem gleichen Wochentag anfang. Schliesslich beschäftigt sich das letzte Kapitel mit dem Osterdatum. Wenigen ist bekannt, dass bei der Gregorianischen Kalenderreform nicht nur der Solarkalender, sondern auch der für das Osterdatum relevante Lunarkalender einer Reform unterzogen wurde, indem im Alexandrinische Osterzyklus innerhalb von 2500 Jahren 8 „Mondkorrekturen“ vorgenommen werden sollen. Die erste solche Korrektur fand 1800 statt, die nächste steht uns im Jahr 2100 bevor.

Das reich bebilderte Buch mit sorgfältig ausgestalteten Grafiken richtet sich neben allen interessierten Kreisen speziell an Lehrpersonen von Mittelschulen, Lehramtsstudierende, aber auch an Gymnasiastinnen und Gymnasiasten. Die verwendeten mathematischen Hilfsmittel, wie das Rechnen modulo n , die Verwendung und Bedeutung der Gauss-Klammern und die Kettenbrüche werden dem mathematisch nicht so versierten Leser in einem Zusatzkapitel nähergebracht.

Ich durfte das Buch anlässlich einer Projektwoche am Gymnasium der Bündner Kantonsschule in einer Klasse, welche in eineinhalb Jahren die Matura macht, einsetzen. Das Buch ist auf dieser Stufe sehr gut zum Selbststudium geeignet. Den Schülerinnen und Schülern ist es gelungen, eigene selbstständige Arbeiten zu Teilaspekten der Materie zu verfassen. Die jedem Kapitel angefügten Aufgaben, für welche die Lösungen zur Verfügung stehen, helfen das Verständnis zu fördern.

Ich wünsche mir, dass viele Maturandinnen und Maturanden die Gelegenheit erhalten, sich mit der Thematik auseinanderzusetzen und einen vertieften Einblick in die Gestalt unserer Kalender zu erhalten.

Frischer Wind für den Mathematikunterricht

Der zweite Band der Reihe Mathematik fürs Gymnasium bereitet klar strukturiert die Themen «Potenzen», «Logarithmen», «Ähnlichkeit» und «Trigonometrie» auf. Jedes Kapitel beginnt mit einführenden Aufgaben, welche die Schüler*innen auf das Kommende vorbereiten. Mit einem Lesetext können sie sich die Theorie selbstständig erarbeiten, so bleibt im Unterricht mehr Zeit zur Klärung offener Fragen. Durch spezifische Aufgaben vergegenwärtigen sich die Schüler*innen den Stoff selbst, wodurch Gelerntes effizient gefestigt wird.

Auch erhältlich als
eLehrmittel

Armin P. Barth

Mathematik fürs Gymnasium

Band 2

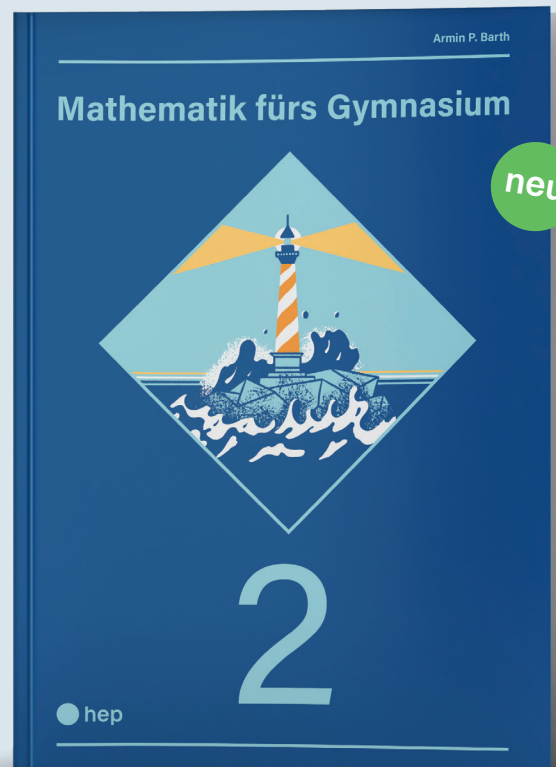
1. Auflage 2022 | ca. 400 Seiten | 19,5 × 27 cm | Broschur,
inkl. eLehrmittel | ISBN 978-3-0355-2028-6 | CHF 54.-

Erscheint im Mai 2022

Mathematik fürs Gymnasium

Band 1

ISBN 978-3-0355-1786-6 | CHF 54.-



The Shape of Space – Welche Form hat das Universum?

Dr. Meike Akveld, Co-Präsidentin goMATH-Komitee

Monika Krichel, Kommunikation, Departement Mathematik, ETH Zürich, communication@math.ethz.ch

Vom **14.–25. März 2022** organisiert das Departement Mathematik im Rahmen seines goMATH-Nachwuchsförderungsprogrammes die Ausstellung **The Shape of Space** in der Haupthalle der ETH Zürich. Begleitet wird die Ausstellung von einer Reihe von Veranstaltungen. Details und Programm siehe: <https://www.math.ethz.ch/gomath>

Lehrpersonen und ihre Klassen sind herzlich eingeladen die Ausstellung und die angebotenen Begleitanlässe zu besuchen und in die Welt der zwei- und dreidimensionalen Universen einzutauchen.

Ausstellungsinhalte: Flatlander-Universen, Spiele und Videoportraits

Das Universum der Flatlander – Mathematik-Wettbewerb

In der Ausstellung werden die Beiträge des **Flatlander-Wettbewerbs** gezeigt, die von Schulklassen im Winter 2021/22 angefertigt wurden. Im Rahmen des Wettbewerbs wurde den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe gestellt ein physisches Objekt zu designen, welches ein Universum für Flatlander darstellt. Weitere Informationen zum Wettbewerb siehe: <https://math.ethz.ch/gomath/gomath-2022/wettbewerb>.

Spiele des Mathematikers Jeffrey Weeks

Jeffrey Weeks ist ein amerikanischer Mathematiker und MacArthur-Stipendiat, der sich mit der spielerischen Vermittlung von Themen aus der Topologie und deren Anwendungen in der Kosmologie beschäftigt. In der Ausstellung können sich die Besucherinnen und Besucher mittels der von Weeks entwickelten **Torus Games** eine bildliche Vorstellung eines mehrfach zusammenhängenden Universums machen, das endlich aber ohne Rand ist. Zweimal täglich wird es zudem möglich sein, das ebenfalls von Weeks entwickelte **Curved-Space Billiard** mittels Virtual Reality Brille auszuprobieren.

Videoportraits

Im dritten Bereich der Ausstellung wird eine Sammlung von **Videoportraits** gezeigt, in denen Studierende über die Gründe ihrer Studienwahl erzählen, Berufsleute einen Einblick in ihren Berufsalltag geben und Forscherinnen über ihre Faszination für die Mathematik berichten.

Einladung zur Ausstellungseröffnung

Interessierte Lehrpersonen sind herzlich eingeladen am **Eröffnungsanlass vom 14. März 2022, 18.00 Uhr** teilzunehmen. Details zum Programm und zur Anmeldung werden auf der goMATH-Website publiziert.

Workshops: Graphen, Zahlen, Polygone & Jeffrey Weeks Special

Während der gesamten Dauer der Ausstellung werden deutsch- und englischsprachige Mathematik-Workshops für Schulklassen angeboten. In den einstündigen Veranstaltungen beschäftigen sich Schülerinnen und Schüler in kleinen Gruppen auf spielerische Art mit einer mathematischen Fragestellung. Die Workshops sind kostenlos und finden auf dem Campus ETH Zentrum statt. Eine Übersicht der Daten und Zeiten, sowie der Link zur Anmeldung sind auf der folgenden Webseite publiziert: <https://math.ethz.ch/gomath/gomath-2022/workshops>

Königsberger Brückenproblem

- Sieben Brücken verbinden die drei Stadtteile von Königsberg, die durch einen Fluss voneinander getrennt sind. Gibt es einen Weg bei dem jede Brücke genau einmal überquert wird um wieder beim Ausgangspunkt zu landen?
- Mittels Modellen wird dieses Problem aus der Graphentheorie in abstrakter Form durchgespielt und die Frage geklärt, unter welchen Bedingungen eine Lösung existiert.

Flächen von Polygonen vergleichen

- Wie kann man ohne Hilfsmittel Polygone nach der Grösse ihrer Fläche sortieren?
- Anhand von Holzpuzzles wird aufgezeigt, dass man jedes Polygon in Teile zerlegen kann, die sich zu Quadraten zusammensetzen lassen. Die so entstandenen Quadrate können verglichen und nach Grösse sortiert werden.

Modulare Arithmetik und Primzahlen

- Gibt es Zahlen mit bestimmten Eigenschaften? Und wie findet man diese?
- Mit Hilfe von Multiplikationstabellen und Hundertertafeln werden Muster und Strukturen gesucht und Zahlengruppen identifiziert, unter anderem die Primzahlen.

The Shape of Space – ENGLISCH

- Dieser englischsprachige Workshop wird von Jeffrey Weeks, unserem Ehrengast, durchgeführt und widmet sich dem Thema der Ausstellung.

Weitere Veranstaltungen

Der Besuch der Ausstellung und Workshops kann mit den folgenden Anlässen ergänzt werden:

- Demonstration des **Curved-Space Billiards**
- **Meet & Greet** mit ehemaligen Mathematikstudierenden, die heute im Berufsleben stehen

Die genauen Daten und Zeiten dieser Veranstaltungen werden auf der goMATH-Website bekannt gegeben oder den, für die Workshops oder den Wettbewerb angemeldeten, Klassen direkt via E-Mail kommuniziert.

Mathematik dynamisch erkunden mit GeoGebra

Die dynamische Mathematik-Software GeoGebra ist in der Schule weit verbreitet. Sie kann auf allen möglichen Plattformen und im Webbrowser eingesetzt werden. In diesem Kurs gibt es sowohl einen stoffdidaktischen Schwerpunkt (Einsatz dynamischer Arbeitsblätter bei Standardthemen des Unterrichts, dynamische Visualisierung, systematische Variation) als auch einen bedientechnischen Aspekt (einige grundlegende Konstruktionen mit GeoGebra selber erstellen) und einen methodisch-organisatorischen Aspekt (Unterrichtsszenarien mit iPads oder Laptops).

Beispiele **Geometrie**:

- Innenwinkelsumme
- Abbildungen, Symmetrie
- Besondere Punkte & Linien im Dreieck
- Thales
- Pythagoras
- Geometrisch Wurzelziehen

Beispiele **Funktionen**

- Quadratische Funktionen: Scheitelpunkt-Form, Nullstellen-Formel
- Modellierung mit quadratischen Funktionen
- Sinus: graphischer Zugang zur Sinuskurve
- sin, cos, tan am Einheitskreis
- Ausblick in die Analysis: Funktionenlupe

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent:	Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Donnerstag, den 31. März 2022, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr Ab 9:30 Begrüßungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.2
Kurskosten:	CHF 200 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 150 für VSMP-Mitglieder (www.vsmp.ch)
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2022a
Anmeldeschluss:	24. März 2022



3D Geometrie mit GeoGebra

Die dynamische Mathematik-Software GeoGebra ist in der Schule weit verbreitet. Sie kann auf allen möglichen Plattformen und im Webbrowser eingesetzt werden. In diesem Kurs geht es um den raumgeometrischen Einsatz. Raumgeometrie verkümmert oft zur Formelsammlung für Oberfläche und Volumen oder wird auf lineare vektorielle Geometrie beschränkt. Der tatsächliche oder virtuelle Umgang mit räumlichen Objekten kommt häufig zu kurz. Das Erzeugen von und Umgehen mit räumlichen Objekten wird heutzutage durch GeoGebra 3D mit seinen mächtigen Befehlen und dynamischen Visualisierungen erleichtert oder gar ermöglicht. Der Einsatz von vorbereiteten dynamischen Arbeitsblättern ist ein Schwerpunkt, aber auch das eigene Konstruieren wird ein Thema sein, ebenso der Einsatz von iPads.

Beispiele 3D Geometrie:

- Besonderheiten von 3D Konstruktionen gegenüber der 2D Geometrie
- Grafische Lösung von 3x3 Linearen Gleichungssystemen
- Platonische Körper, Archimedische Körper
- Rot-Cyan Ansicht
- Körper und Netze
- Schnitte durch den Würfel
- Dodekaeder-Stern
- Vom Balken zum Zaunpfahl
- Zwillingswürfel und Gestalt von Kristallen
- Kegel-Schnitte
- Ansichtssache: Projektionsarten
- Punkte und Vektoren in GeoGebra 3D
- Geraden und Ebenen in GeoGebra 3D
- 3D Druck von GeoGebra aus

Die GeoGebra-Beispiele werden allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung gestellt.

Referent:	Hans-Jürgen Elschenbroich (Medienberatung NRW i.R.)
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe I und II Mathematik
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Freitag, den 1. April 2022, 10:00 Uhr – 16:30 Uhr Ab 9:30 Begrüßungskaffee
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.2
Kurskosten:	CHF 200 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) CHF 150 für VSMP-Mitglieder (www.vsmf.ch)
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2022b
Anmeldeschluss:	24. März 2022



Congrès des professeurs de sciences (biologie - chimie - physique - géographie)

Gembloux 24 – 25 août 2021

Didier Roulet, CRP, rouletd@infomaniak.ch

Invités par nos collègues belges, nous sommes allés à deux à Gembloux (située à une cinquantaine de kilomètres au sud de Bruxelles, en direction de Namur) pour assister au congrès annuel des professeurs de sciences. Si le thermomètre a été quelque peu timide pour un mois d'août, l'accueil a été comme à l'accoutumée plus que cordial, chaque membre du comité d'organisation manifestant une grande bienveillance envers chacune et chacun. L'événement se déroulait sur le site Agro-bio-tech, haut-lieu de la recherche agronomique en Belgique et installé - en partie seulement, car de nombreux bâtiments récents ont été construits - dans un ancien couvent.



CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=396930>

L'abbaye de Gembloux abrite la Faculté de l'Agro-Bio
Tech de l'Université de Liège

La conférence inaugurale traitait de l'Antarctique et des conséquences du réchauffement climatique sur ce continent. Nous n'avons pas idée du gigantisme de ce continent ! Sa surface est en effet équivalente à 25 fois celle de la France métropolitaine, et durant l'hiver austral la banquise qui s'additionne à l'Antarctique constitue un « monde blanc » d'environ 60 fois la France !

Si la totalité de ses glaces venaient à fondre, le niveau des mers monterait de 62 mètres, alors que la fonte des glaces du seul Groenland entraînerait tout de même une montée du niveau des océans de 7 mètres.

Suite à cette conférence plénière, il était possible de participer tant à des ateliers qu'à des visites, ou à des conférences avec une audience plus restreinte. Une fois de plus, nous avons constaté que choisir c'est renoncer, mais c'était à regret car les titres des présentations étaient très tentants.

Ainsi avons-nous vu l'Ecotron, un ensemble de chambres entièrement closes contenant chacune environ 3 mètres cubes de terre et quelques mètres cubes d'air. Tous les échanges hydriques et gazeux de ces chambres avec l'extérieur sont entièrement contrôlés : température, luminosité (spectre, durée, intensité),

hygrométrie, teneur en CO₂, N₂, O₂, O₃, etc... On peut ainsi étudier (une expérience prend environ 10 mois) comment réagissent les plantes - céréales ou autres - aux changements climatiques.



Écotron : chambre close dans laquelle peuvent être contrôlés durant plusieurs mois la température, la luminosité (intensité, durée et spectre), l'hygrométrie et les teneurs en N₂, O₂, CO₂, N₂, O₃ etc ... afin d'étudier par exemple les effets du réchauffement climatique sur les végétaux.

Dans un atelier, nous avons suivi comment un professeur fait réaliser à ses élèves des montages électroniques basés sur des cartes Arduino. Ceux-ci, à la complexité progressive, permettent par exemple de suivre - grâce à l'enregistrement automatique - l'évolution de l'éclairage et de la température de l'eau d'une mare proche de leur école.

Enfin, un conférencier nous a montré comment, pour diminuer l'effroi de ses étudiants devant les équations modélisant la convection des magmas à l'intérieur des planètes, il avait conçu un modèle pour la cuisson des œufs (excellente analogie avec une planète : jaune → noyau, blanc → magma, coquille → croûte) et que même en simplifiant - linéarisant - à outrance ce modèle, il avait réussi à maîtriser parfaitement la transition œuf coque / œuf mollet grâce à la cuisson à basse température, dont il est désormais un adepte enthousiaste.

La Belgique ayant subi durant l'été dernier des inondations qui ont mis hors service certaines lignes de chemin de fer, dont celle entre Gembloux et Bruxelles, nous avons dû renoncer à participer aux ateliers de la dernière demi-journée, mais en étant-ravis de notre escapade.

La suite de Tribonacci

Christophe Bolle, Lycée Blaise-Cendrars (La Chaux-de-Fonds), christophe.bolle@rpn.ch

Il s'agit d'une traduction de l'article écrit par Hans Ulrich Keller (hukkeller@bluewin.ch), publié dans le numéro 145 (Janvier 2021) du bulletin de la SSPMP. Traduction effectuée avec l'aide de www.DeepL.com/Translator, version gratuite.

1 Définition

La suite de Tribonacci est familière à certains mathématiciens et commence par les nombres

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \dots$$

La définition par récurrence de la suite de Tribonacci est :

$$\begin{cases} T(0) = 0, & T(1) = 1, & T(2) = 1, \\ T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) \end{cases}$$

Comme pour la suite de Fibonacci, il est possible d'étendre cette suite à des valeurs négatives de n :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} n : & \dots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ T(n) : & \dots & -3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 13 & 24 & \dots \end{array}$$

On peut alors se demander s'il existe une définition explicite du n -ième terme de la suite de Tribonacci, c'est-à-dire une formule analogue à la formule de Binet $F(n) = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$ pour la suite de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

2 Formule de Binet

Pour établir une formule pour la suite de Tribonacci, il est utile d'examiner la manière dont on détermine la formule de Binet pour le n -ième nombre de la suite de Fibonacci. Rappelons la définition par récurrence de cette suite :

$$\begin{cases} F(0) = 0, & F(1) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

L'étape la plus importante est l'utilisation d'une fonction exponentielle : $F(n) = a^{n+2}$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$.

Puis, en divisant par a^n , on obtient l'équation $a^2 = a + 1$.

Cette équation caractéristique admet les deux solutions $a_0 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$, qui est égale au nombre d'or, et $a_1 = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,618$.

Ainsi, aussi bien la suite $(a_0^0, a_0^1, a_0^2, \dots)$ que la suite $(a_1^0, a_1^1, a_1^2, \dots)$ satisfont la relation de récurrence de la suite de Fibonacci. Et donc, toute combinaison linéaire telle que la suite

$$\left(\frac{a_0^0}{u} + \frac{a_0^1}{v}, \frac{a_0^1}{u} + \frac{a_0^2}{v}, \frac{a_0^2}{u} + \frac{a_0^3}{v}, \dots \right) \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^*$$

satisfait également la propriété que chaque terme de la suite est la somme de ses deux prédécesseurs.

La formule qui donne le terme général de la suite de Fibonacci doit donc être égale au terme $F(n) = \frac{a_0^n}{u} + \frac{a_1^n}{v}$. L'insertion des conditions initiales $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$ conduit immédiatement à $u = \sqrt{5}$ et $v = -\sqrt{5}$, et donc exactement à la formule de Binet déjà mentionnée ci-dessus :

$$F(n) = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{-\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Il convient de noter que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$ est égale au nombre d'or φ , et que les nombres de Fibonacci peuvent également être trouvés en utilisant la fonction génératrice suivante :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot x^n \quad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{\varphi} \right)$$

3 Extension à la suite de Tribonacci

Utilisons la même approche pour la suite de Tribonacci, et posons $T(n) = a^{n+3}$.

En utilisant la relation de récurrence pour $T(n)$, on obtient :

$$a^{n+3} = a^{n+2} + a^{n+1} + a^n \quad , \text{ ou après division par } a^n : \quad a^3 = a^2 + a + 1$$

Cette équation caractéristique est ici cubique et possède une seule solution réelle $a_0 \cong 1,8393$, également appelée constante de Tribonacci (et parfois nombre d'argent). Les deux autres solutions sont $a_1 \cong -0,4196 + 0,6063i$ et $a_2 \cong -0,4196 - 0,6063i$, qui sont des nombres complexes conjugués.

Ainsi, aussi bien la suite $(a_0^0, a_0^1, a_0^2, \dots)$ que les suites $(a_1^0, a_1^1, a_1^2, \dots)$ et $(a_2^0, a_2^1, a_2^2, \dots)$ satisfont la relation de récurrence des nombres de Tribonacci. Et donc, également toute combinaison linéaire telle que la suite

$$\left(\frac{a_0^0}{u} + \frac{a_0^1}{v} + \frac{a_0^2}{w}, \frac{a_1^0}{u} + \frac{a_1^1}{v} + \frac{a_1^2}{w}, \frac{a_2^0}{u} + \frac{a_2^1}{v} + \frac{a_2^2}{w}, \dots \right) \quad \text{avec } u, v, w \in \mathbb{C}^*$$

satisfait la propriété que chaque terme de la suite est la somme de ses trois prédécesseurs.

Par conséquent, on peut écrire le terme $T(n) = \frac{a_0^n}{u} + \frac{a_1^n}{v} + \frac{a_2^n}{w}$.

À partir des conditions initiales $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ et $T(2) = 1$, on obtient les constantes u , v et w :

$$u = -a_0^2 + 4a_0 - 1 \cong 2,9742$$

$$v = -a_1^2 + 4a_1 - 1 \cong -2,4871 - 2,9340i$$

$$w = -a_2^2 + 4a_2 - 1 \cong -2,4871 + 2,9340i$$

Et à partir de là, la formule exacte de Tribonacci :

$$T(n) = \frac{a_0^n}{-a_0^2 + 4a_0 - 1} + \frac{a_1^n}{-a_1^2 + 4a_1 - 1} + \frac{a_2^n}{-a_2^2 + 4a_2 - 1}$$

avec les trois solutions exactes ou approximatives de l'équation caractéristique $a^3 = a^2 + a + 1$:

$$a_0 = \frac{1}{3} \left(1 + (19 - 3\sqrt{33})^{1/3} + (19 + 3\sqrt{33})^{1/3} \right) \cong 1,8393$$

$$a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} (1 + i\sqrt{3}) (19 - 3\sqrt{33})^{1/3} - \frac{1}{6} (1 - i\sqrt{3}) (19 + 3\sqrt{33})^{1/3} \cong -0,4196 + 0,6063i$$

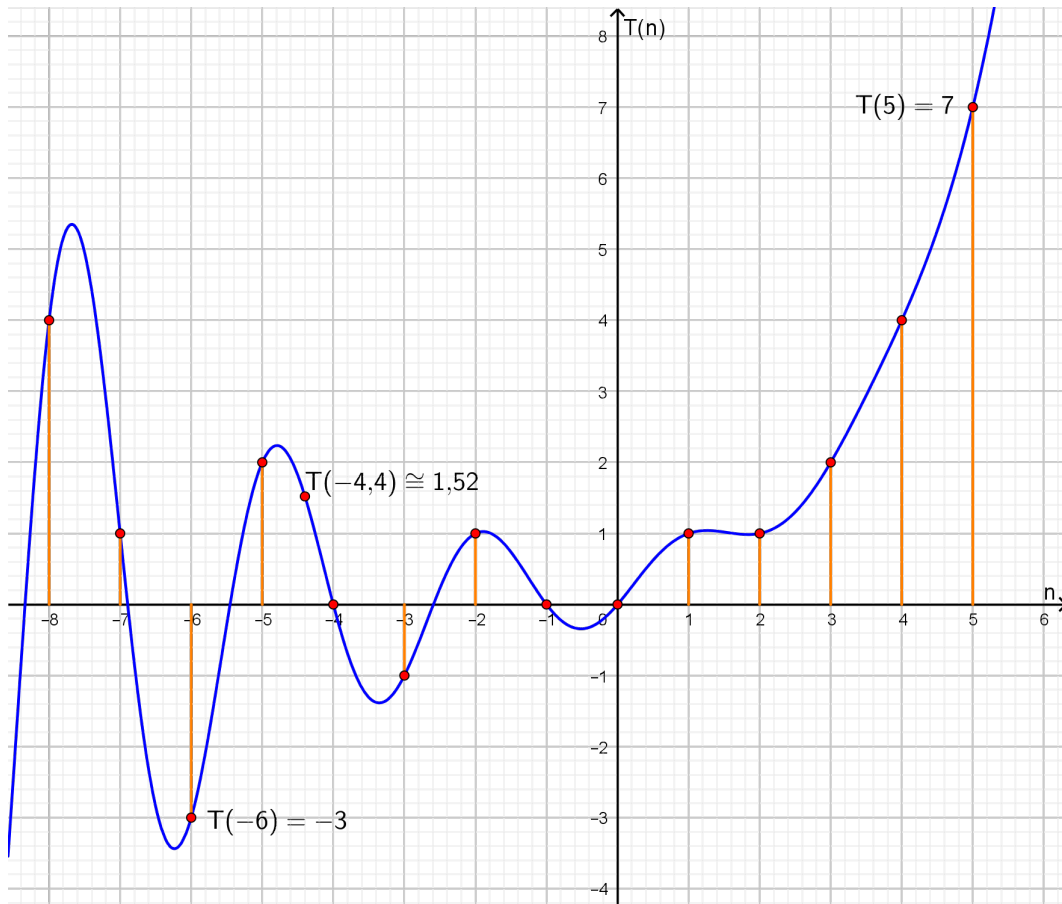
$$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} (1 - i\sqrt{3}) (19 - 3\sqrt{33})^{1/3} - \frac{1}{6} (1 + i\sqrt{3}) (19 + 3\sqrt{33})^{1/3} \cong -0,4196 - 0,6063i$$

Le premier terme de la formule de Tribonacci ci-dessus est réel pour tout $n \in \mathbb{R}$, car a_0 et u sont des réels positifs.

Le deuxième terme est égal au complexe conjugué du troisième terme pour tout $n \in \mathbb{R}$, car $a_2 = \bar{a}_1$ et $w = \bar{v}$.

Par conséquent, $T(n)$ est un nombre réel pour tout $n \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Voici ci-dessous le graphe de cette fonction $T(n)$, qui peut être utilisé pour vérifier approximativement que, par exemple, $T(-4,4) \cong 1,52$.



Comme pour les nombres de Fibonacci, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n+1)}{T(n)}$ est égale à la constante de Tribonacci $a_0 \cong 1,8393$.

En outre, les nombres de Tribonacci peuvent également être trouvés à l'aide d'une fonction génératrice :

$$\frac{x}{1 - x - x^2 - x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) \cdot x^n \quad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{a_0} \right)$$

Avec d'autres valeurs initiales, on obtient d'autres suites connexes $T'(n)$, qui satisfont également la relation de récurrence $T'(n) = T'(n-1) + T'(n-2) + T'(n-3)$. Les équations des fonctions associées pour $T'(n)$ changent bien sûr aussi au cours du processus, mais elles donnent toujours des valeurs réelles quel que soit l'exposant n .

4 La vie secrète des nombres de Fibonacci

Il est étonnant que la formule de Tribonacci pour $T(n)$ trouvée ci-dessus donne toujours une valeur réelle quel que soit n , car c'est tout à fait différent avec la formule de Binet : elle donne des valeurs non réelles pour $F(n)$ pour des valeurs réelles rationnelles de n !

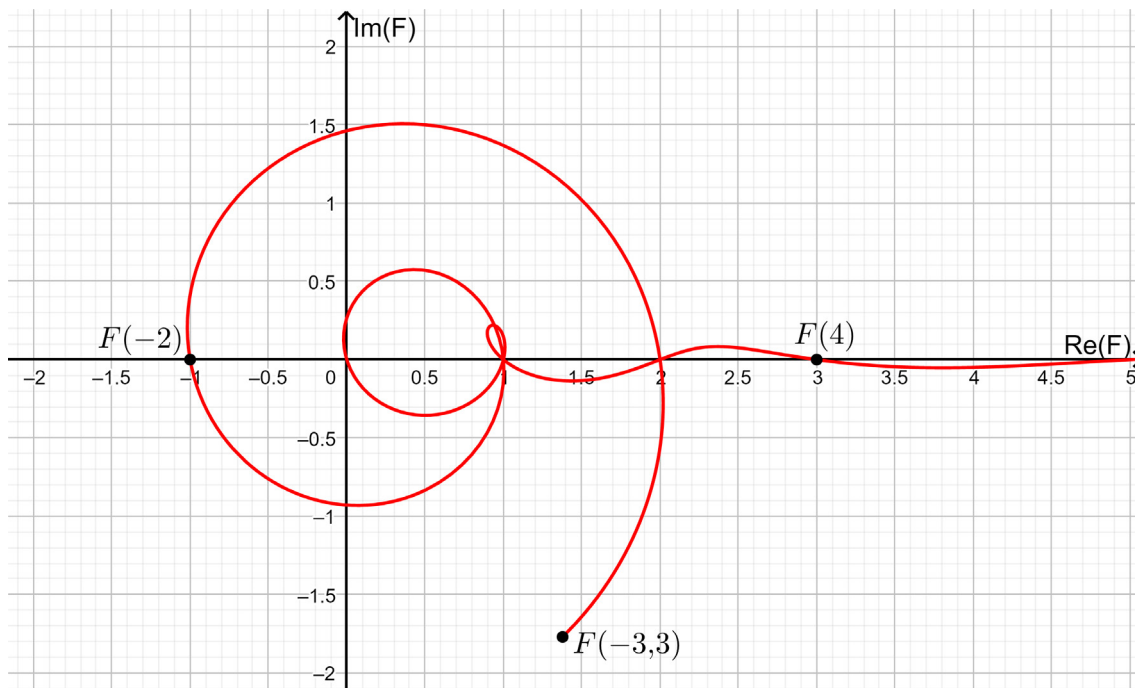
Ainsi, selon la formule de Binet, on a par exemple les «nombres rationnels de Fibonacci» $F(4,5) \cong 3,8991 - 0,0513i$, et $F(-3,3) \cong 1,3778 - 1,7706i$.

Dans la figure ci-dessous se trouve l'étonnant graphique de la relation $\{\Re(F(n)); \Im(F(n))\}$ pour $-3,3 \leq n \leq 5,1$.

Avec des valeurs croissantes de n supérieures à 2, cette courbe s'enroule de plus en plus autour de la partie positive de l'axe réel.

Avec des valeurs décroissantes de n inférieures à 0, elle s'enroule autour de l'origine avec un rayon toujours croissant (en une sorte de spirale).

Il ressort immédiatement du graphique que l'équation $F(n) = 1$ a exactement trois solutions, et que $F(n) = 2$ a exactement deux solutions différentes.



On peut observer que pour les suites de Lucas, comme par exemple $L(n) = F(n-1) + F(n+1)$, on obtient des représentations assez similaires.

5 La suite de Tétranacci

De la même manière que pour les nombres de Fibonacci $F(n)$ et de Tribonacci $T(n)$, on peut trouver une définition explicite pour le n -ième nombre de Tétranacci $Q(n)$ (Q comme dans Quattro). La définition récursive de la suite associée est :

$$\begin{cases} Q(0) = 0, & Q(1) = 1, & Q(2) = 1, & Q(3) = 2, \\ Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) + Q(n-3) + Q(n-4) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales données ci-dessus, on obtient le tableau de valeurs suivant, qui a déjà été

étendu à n négatif :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 n : & \dots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 Q(n) : & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 15 & 29 & 56 & \dots
 \end{array}$$

De l'approche $Q(n) = a^{n+4}$ découle ici, par analogie avec la procédure pour la suite de Tribonacci, le terme $Q(n) = u_0 \cdot a_0^n + u_1 \cdot a_1^n + u_2 \cdot a_2^n + u_3 \cdot a_3^n$ pour la formule de Tétronacci, où a_0, a_1, a_2, a_3 sont les quatre solutions de l'équation caractéristique $a^4 = a^3 + a^2 + a + 1$. Cette équation peut être résolue avec précision, mais ses solutions sont toutes des « monstres » avec plusieurs racines ! Ici, à titre d'illustration, la constante de Tétronacci (selon l'article Wikipedia sur la généralisation des nombre de Fibonacci) :

$$a_0 = \left(p_1 + \frac{1}{4} \right) + \sqrt{\left(p_1 + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{2\lambda_1}{p_1} \left(p_1 + \frac{1}{4} \right) + \frac{7}{24p_1} + \frac{1}{6}}$$

$$\text{où } p_1 = \sqrt{\lambda_1 + \frac{11}{48}}, \text{ et } \lambda_1 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{1689} - 65} - \sqrt[3]{3\sqrt{1689} + 65}}{12\sqrt[3]{2}}$$

Par souci de simplicité, il est donc logique ici de continuer à calculer avec des valeurs approximatives. Les quatre constantes u_0, u_1, u_2, u_3 résultent à nouveau des conditions initiales données ci-dessus. Il en résulte la définition explicite (approximative) suivante du n -ième nombre de Tétronacci $Q(n)$:

$$\begin{aligned}
 Q(n) \cong & 0,2938 \cdot 1,9276^n - 0,1929 \cdot (-0,7748)^n \\
 & - (0,0505 - 0,1697i) \cdot (-0,0764 - 0,8147i)^n \\
 & - (0,0505 + 0,1697i) \cdot (-0,0764 + 0,8147i)^n
 \end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, le quotient $\frac{Q(n+1)}{Q(n)}$ permet de retrouver la constante de Tétronacci :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n+1)}{Q(n)} = a_0 \cong 1,9276$$

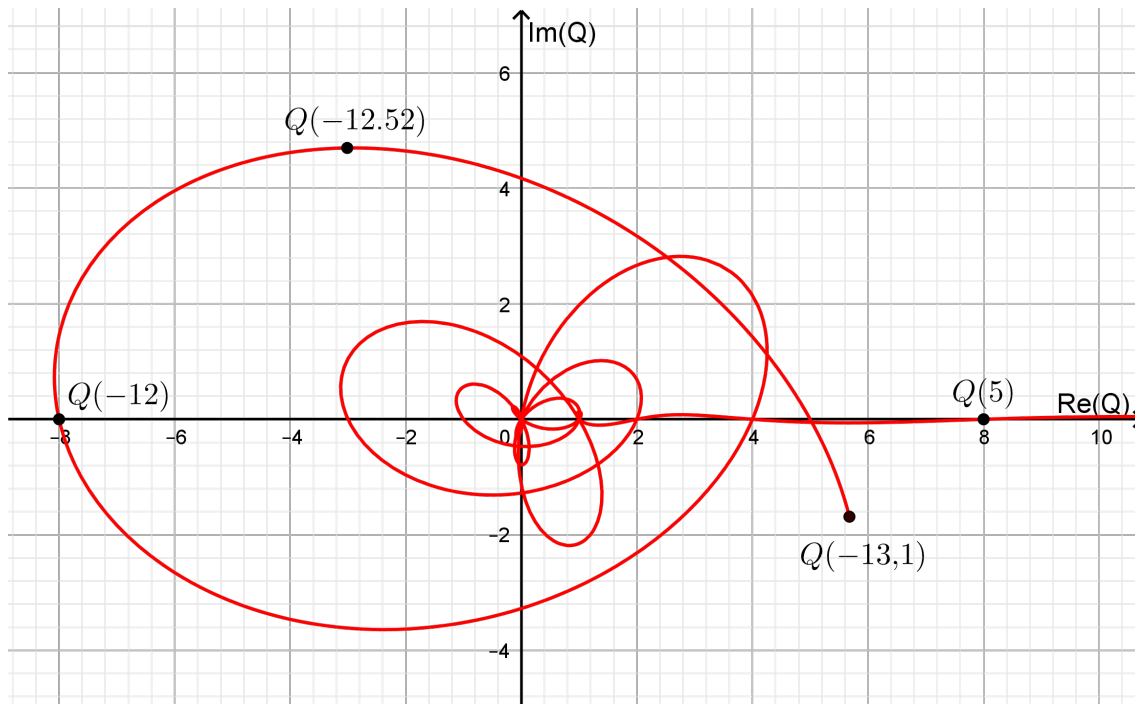
Les nombres de Tétronacci $Q(n)$ peuvent également être trouvés à l'aide d'une fonction génératrice :

$$\frac{x}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n) \cdot x^n \quad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{a_0} \cong \frac{1}{1,9276} \right)$$

Pour les valeurs réelles rationnelles de n , les nombres de Tétronacci $Q(n)$, comme les nombres de Fibonacci, prennent des valeurs non réelles, contrairement aux valeurs correspondantes des nombres de Tribonacci. Dans le graphique ci-dessous, qui est assez intéressant, on indique la relation

$$\{ \Re(Q(n)); \Im(Q(n)) \} \quad \text{pour } -13,1 \leq n \leq 5,5.$$

Par exemple, $Q(-13,1) \cong 5,6781 - 1,6863i$, $Q(-12,52) \cong -3,0246 + 4,6970i$, $Q(-12) = -8$, et $Q(5) = 8$.



6 Conclusion

Cette méthode peut également être utilisée pour trouver des définitions explicites pour des suites qui utilisent plus de quatre prédécesseurs dans leur définition récursive du n -ième terme. Pour une suite de Pentanacci, c'est-à-dire pour une suite dans laquelle chaque terme est la somme des cinq termes précédents, il faudrait tout d'abord résoudre l'équation caractéristique $a^5 = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$. C'est une équation de degré 5 redoutable qui, selon Galois, ne peut pas être résolue par radicaux ! Mais les différentes solutions de cette équation, ou même d'équations plus compliquées, peuvent en principe toutes être trouvées numériquement avec une précision arbitraire. Ainsi, la voie est libre pour trouver des définitions explicites pour de telles suites, ou même pour des suites plus exotiques.

P.S.

Toutes les suites mentionnées ci-dessus, ainsi que la suite de Pentanacci

$$\{\dots, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, 1793, 3525, 6930, \dots\},$$

peuvent être trouvées dans l'**oeis** (= On-line Encyclopedia of Integer Sequences), www.oeis.org :

Fibonacci : A000045, Tribonacci : A000073, Tétronacci : A000078 et Pentanacci : A001591.

Géométries d'hier et d'aujourd'hui : inégalités isopérimétriques et géométrie projective

Colloque annuel de la CRM organisé à Champéry du 14 au 17 septembre 2021

La CRM a organisé un cours pour les enseignants du secondaire II qui a réuni 6 conférenciers et 48 participants à l'Hôtel Suisse à Champéry. Ce cours était initialement prévu en 2020 mais, en raison de la pandémie, il a été reporté en 2021. Les participants ont pu découvrir la nouvelle salle de conférence de l'hôtel. Elle permet d'accueillir l'ensemble des participants dans un cadre agréable avec vue sur le massif des Dents du Midi. Elle est équipée de moyens techniques modernes, tels qu'un écran interactif et un beamer avec liaison sans fil. Ceux-ci ont demandé une certaine dose d'adaptation de la part des conférenciers. Les remarques reçues des participants sur ces moyens permettront de mener une réflexion sur le plan technique pour une utilisation future de la salle.

Le cycle de 10 conférences a débuté par l'introduction de la notion d'inégalité isopérimétrique par Peter Buser. Après avoir posé le problème en dimension deux, qui consiste à déterminer parmi tous les domaines de \mathbb{R}^2 de périmètre L donné celui qui a une aire A maximale, il nous a présenté des résultats sur les triangles, les quadrilatères et les n -gones. Finalement, il a démontré que $L^2 - 4\pi A \geq 0$ et que le cercle est la seule courbe pour laquelle l'égalité est vérifiée.

Alain Valette a développé, dans la première partie de son exposé, le problème de la complexité des algorithmes (P versus NP). Il a poursuivi en décrivant un problème d'isopérimétrie dans les graphes, qui consiste à comparer le nombre d'arêtes liées à une coupure du graphe au nombre de sommets dans les deux parties du graphe constituant cette coupure (problème « sparsest cut »).

Félix Schlenk a proposé deux conférences sur le calcul des variations au travers d'exemples « simples ». Il a exposé des résultats en lien avec les géodésiques dans le plan hyperbolique, avec la brachistochrone ou avec le problème qui consiste à déterminer la surface de révolution d'aire minimale entre deux cercles parallèles.

Klaus Volkert et Jean-Daniel Voelke nous ont conjointement permis de parcourir quelques étapes de l'histoire de la géométrie projective. Après quelques mots sur la naissance de la perspective, ils nous ont fait découvrir le développement de la géométrie projective synthétique en France, de Desargues à Poncelet, puis les problèmes de dualité en géométrie projective ainsi que de l'inversion par rapport à un cercle.

Bruno Colbois a terminé la semaine en questionnant la stabilité de l'inégalité isopérimétrique : est-ce qu'une courbe de longueur L déterminant une aire proche de $L^2/(4\pi)$ est presque un cercle ? Dans un deuxième exposé, il nous a présenté quelques éléments sur les multi-bulles. Pour ce faire, il a quelque peu repris la démarche de Peter Buser en proposant des résultats sur les doubles-bulles triangulaires et quadrilatères.

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés satisfaits du niveau scientifique des conférenciers, de l'organisation générale du cours et de l'accueil reçu à l'hôtel.

Damien Dobler
Membre de la CRM

Quelques résultats historiques sur le produit vectoriel

Christian Aebi, Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

Le but de cette note est d'exposer quelques propriétés et applications du produit vectoriel qui jalonnent l'histoire de la géométrie vectorielle, et qui permettent d'établir un résultat clé de Jacobi.

Si historiquement on associe généralement l'apparition du produit vectoriel avec celle de la naissance des quaternions, et donc à W. R. Hamilton (1843), il est à noter que ses premiers "balbutiements algébriques" figurent déjà chez J. L. Lagrange, plus d'un demi-siècle avant. En particulier, ce dernier relie dans une formule la norme, le produit vectoriel et le produit scalaire entre eux.

L'identité de Lagrange (1773)[1]. Si \vec{a} et \vec{b} sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , $\vec{a} \times \vec{b}$ leur produit vectoriel, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ leur produit scalaire et $|\dots|$ la norme, alors

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Démonstration. Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \end{aligned}$$

□

En fait, cette identité est une sorte de généralisation de celle de Diophante (dénommée parfois aussi de Brahmagupta-Fibonacci)

$$(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2,$$

qui est à mettre en relation avec les nombres complexes : *le produit des carrés des modules égale le module du produit au carré,*

$$|a_1 + ia_2|^2 \cdot |b_1 + ib_2|^2 = |(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)|^2.$$

L'identité de Lagrange permet de démontrer un joli résultat relativement peu connu dû à Bretschneider.

La formule de Bretschneider (1842)[2]. Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe d'aire K dont les côtés consécutifs mesurent a, b, c, d et les diagonales p, q , alors

$$16K^2 = 4p^2q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2.$$

Démonstration. Posons $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ et $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ et notons que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

L'observation de la figure ci-dessous permet de déduire que $2K$ n'est autre que $|\vec{p} \times \vec{q}|$. D'où

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4|\vec{p} \times \vec{q}|^2 = 4p^2q^2 - 4\left((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})\right)^2 = 4p^2q^2 - 4\left(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} + \vec{c})\right)^2 \\ &= 4p^2q^2 - 4\left(\vec{a} \cdot (-\vec{a} - \vec{d}) + b^2 + \vec{b} \cdot \vec{c}\right)^2 = 4p^2q^2 - 4(-a^2 + b^2 - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c})^2 \end{aligned}$$

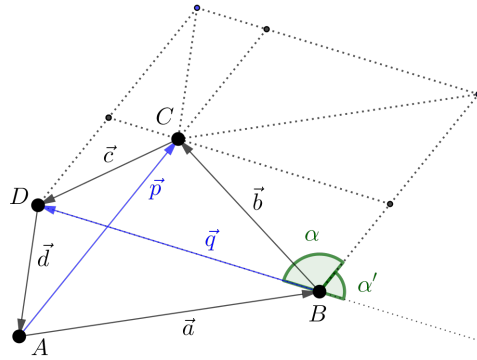


Figure 1 – Illustration de la formule de Bretschneider

Pour conclure, il suffit d’observer que

$$2(\vec{a} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{d}) - (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) - a^2 - d^2 + b^2 + c^2 = b^2 - a^2 - d^2 + c^2.$$

□

Remarque. Si on suppose en plus que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle alors en appliquant le théorème de Ptolémée, $pq = ac + bd$, on obtient la formule de Brahmagupta :

$$16K^2 = (a - b + c + d)(a + b + c - d)(-a + b + c + d)(a + b - c + d).$$

En effet, en substituant pq par $ac + bd$ on a

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4(ac + bd)^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2 \\ &= (2ac + 2bd - b^2 + a^2 - d^2 + c^2)(2ac + 2bd + b^2 - a^2 + d^2 - c^2) \\ &= ((a + c)^2 - (b - d)^2)((b + d)^2 - (a - c)^2) \\ &= (a - b + c + d)(a + b + c - d)(-a + b + c + d)(a + b - c + d). \end{aligned}$$

Une autre relation, attribuée aussi à Lagrange, relie un produit vectoriel de trois vecteurs à une différence de deux vecteurs pondérée par des produits scalaires.

Lemme. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

Démonstration. Par un calcul direct, on obtient :

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - a_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - a_2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - a_3(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \end{pmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}. \end{aligned}$$

□

Comme corollaire, déduisons le résultat clé dû à C. G. J. Jacobi qui aujourd’hui encore s’illustre de plusieurs manières comme montré à la fin de l’article.

Identité de Jacobi (circa 1840). $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$.

Démonstration. Appliquons trois fois le lemme précédent

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$$

□

Applications surprenantes et modernes de l'identité de Jacobi

Le résultat qui suit n'a pas été repéré dans la littérature classique.

Identité de Jacobi généralisée. Si a, b, c, d sont quatre vecteurs quelconques de \mathbb{R}^3 alors

$$\vec{a} \times ((\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})) - \vec{b} \times ((\vec{c} - \vec{d}) \times (\vec{a} - \vec{d})) + \vec{c} \times ((\vec{d} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})) - \vec{d} \times ((\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b})) = \vec{0} \quad (1)$$

Démonstration. En effet, en développant le produit de chaque terme, ligne par ligne on a

$$\begin{aligned} & \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{d}) - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{d}) \\ & - \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \times (\vec{d} \times \vec{a}) \\ & + \vec{c} \times (\vec{d} \times \vec{b}) - \vec{c} \times (\vec{d} \times \vec{a}) - \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \\ & - \vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{d} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \end{aligned}$$

qui s'annule en appliquant l'identité de Jacobi sur les termes de même couleur. \square

Comme conséquence, déduisons un autre résultat plus moderne [3]. Soit i, j, k la base naturelle de \mathbb{R}^3 d'origine O , $ABCD$ un quadrilatère appartenant au plan $O_{i,j}$, dont les vecteurs positions sont notés $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Posons Δ_X , l'aire du triangle opposé au sommet X . Par exemple, $\Delta_A = \text{aire}(BCD)$, comme illustré ci-dessous.

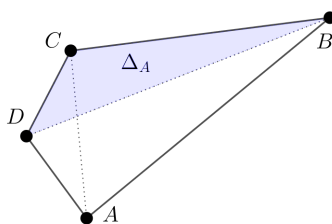


Figure 2 – Le quadrilatère $ABCD$ et l'illustration de Δ_A .

Corollaire. Sous les hypothèses ci-dessus on a

$$\Delta_A \vec{a} - \Delta_B \vec{b} + \Delta_C \vec{c} - \Delta_D \vec{d} = \vec{0}. \quad (2)$$

Démonstration. L'interprétation géométrique du produit vectoriel permet de voir que pour chaque terme respectif des sommes (1) et (2) on a par exemple,

$$\vec{a} \times ((\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{d} - \vec{c})) = R(H(\Delta_A \vec{a})),$$

où H est une homothétie de rapport 2 et R est une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan $O_{i,j}$, les deux transformations étant centrées en O . \square

Références

- [1] J. L. Lagrange, *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, 1773 ; Oeuvres de Lagrange, vol. 3, pp. 661-692, Gauthier-Villars, Paris, 1867.
- [2] <https://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html>
- [3] C. Aebi et G. Cairns, A vector identity for quadrilaterals, to appear in *College Math. J.*, preprint available at <https://arxiv.org/abs/2106.11860>.

PROMYS Europe

A partnership of PROMYS, Wadham College and the Mathematical Institute at the University of Oxford, and the Clay Mathematics Institute

10 July – 20 August 2022 at Wadham College, Oxford

www.promys-europe.org



**Six weeks of challenging and stimulating mathematical exploration,
for mathematically ambitious school students aged 16+
from across Europe**

“The best things about participating in PROMYS Europe were the people I met, the interesting problems I solved, and the amazing lectures!”... “I personally think that it has changed my way of thinking...to proactively asking questions and thinking deeply about those questions”... “it gave a real insight into the work of “real” mathematicians and gave me further ideas about how I want my career to look”

– Students, PROMYS Europe 2021

“The programme offers pre-university students from across Europe an extraordinary opportunity to engage with deep mathematical ideas” – CMI

Selection is needs-blind and based on merit alone. Partial or full financial aid is available for those who need it.

The programme is dedicated to the principle that no one should be unable to attend for financial reasons.



Impressum

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälinstrasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger praesident@dmk.vsmf.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@edu.ge.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambéry

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 149 31.03.2022 (Ende Mai)
Nr. 150 31.07.2022 (Ende September)
Nr. 151 30.11.2022 (Ende Januar)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica