

$$7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1 \iff 3^2 + 4^2 = 5^2$$



Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Beinahe-Pythagoras (Artikel auf Seite 46 in dieser Ausgabe)

In dieser Ausgabe — Dans ce numéro

VSMP – SSPMP – SSIMF	3
Breve nota – Brève note – Kurze Notiz	3
Anne Jacob Label MINT/MINT Label	4
Commission Romande de Physique	6
Cédric Willmin Détection de météores et d'aéronefs	6
Tim Flückiger Conception et réalisation d'un cube de LED programmable par microcontrôleur	13
Commission Romande de Mathématique	20
Alexandre Junod Coordonnées barycentriques et hyperbole de Kiepert	20
Société Mathématique Suisse Annonce du Prix „Matura Awards 2020“	25
Didier Müller Les métaheuristiques en cryptanalyse	26
Deutschschweizerische Physikkommission	32
Elena Makarova Einblicke in das Projekt „Naturwissenschaft ist (auch) Frauensache!“	32
Lara Gafner Experimentieren an der EPFL	34
Martin Lieberherr Sicherheitsparabel – Computational Physics Lab	36

Deutschschweizerische Mathematikkommission	40
Rainer Hauser Die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras	40
Peter Gallin Ein schweres Integral	45
Beat Jaggi Beinahe-Pythagoras = Pell	46
<i>Kolloquium</i> über Mathematik, Informatik und Unterricht	53
Josef Züger Ausbreitung von Epidemien nach dem SIR-Modell	54
Schweizerische Mathematische Gesellschaft Ausschreibung der Matura Awards 2020	57
<i>Kurs</i> : 31. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	58
Lara Gafner Medaillen vorerst nur aus der Ferne	60

Breva nota

Quando ci sono giunti gli articoli che compongono questo *Bulletin* le scuole non erano ancora state chiuse. Avete ora tra le mani (ben lavate!) la nuova edizione del *Bulletin* e le scuole sono ancora chiuse. Solo un articolo, «Ausbreitung von Epidemien» di Josef Züger (Bündner Kantonsschule), tratta in modo concreto un tema che incide in maniera del tutto insolita sulla nostra quotidianità.

Auspichiamo che nel prossimo *Bulletin* si possano pubblicare altri articoli legati alla pandemia del coronavirus, ma anche articoli sull'insegnamento a distanza, in tutti gli aspetti che ora ci occupano e preoccupano.

La SSIMF intensificherà i suoi sforzi di digitalizzazione, segnatamente nell'ambito dei corsi di formazione continua, e li adatterà alle esigenze attuali. Anche per quest'aspetto contiamo sui vostri preziosi contributi.

Brève note

Quand nous avons reçu les articles composant ce présent bulletin, les écoles n'étaient pas encore fermées. Au moment où vous prenez ce bulletin dans les mains (lavées!), les écoles sont toujours fermées. Un seul article, « Ausbreitung von Epidemien » de Josef Züger (Bündner Kantonsschule), traite d'une manière concrète d'un sujet qui affecte de façon inhabituelle notre quotidien.

Il serait souhaitable que dans le prochain bulletin, nous puissions publier d'autres articles en relation avec la pandémie du coronavirus, mais aussi des articles relatant les différents aspects de l'enseignement à distance en général.

La SSPMP pourra ainsi, par l'intermédiaire des cours de formation continue, répondre de manière plus adéquate aux besoins de ses membres. Nous comptons pour cela sur vos inestimables contributions.

Kurze Notiz

Als uns die Mehrheit der Bulletin-Beiträge und fachlichen Artikel erreichte, waren die Schulen noch nicht geschlossen. Hingegen sind die Schulen noch immer geschlossen, wenn Sie dieses Bulletin in die (hoffentlich gewaschenen!) Hände nehmen. Einzig der Artikel «Ausbreitung von Epidemien» von Josef Züger (Bündner Kantonsschule) befasst sich mit einer konkreten Fragestellung im Zusammenhang mit der momentanen und für uns alle so ungewohnten Alltagssituation.

Es kann gut sein, dass in den nächsten Bulletins weitere Artikel mit Bezug zur Corona-Pandemie publiziert werden, vor allem auch solche, die Aspekte des derzeitigen Fern-Unterrichts in seiner ganzen Breite thematisieren.

Auch wir vom VSMP werden unsere «digitalen» Bemühungen speziell im Bereich Weiterbildung intensivieren und den jeweiligen aktuellen Bedürfnissen anpassen. Dabei zählen wir gerne auch auf Ihre geschätzte Mitarbeit!

Arno Gropengiesser, Patrick Turtschy, Hansjürg Stocker, Samuel Byland



scnat.ch/labelMINT

Bando di concorso per il 2° Label MINT

Scuole medie superiori attive nei settori MINT

Anne Jacob, Accademie svizzera di scienze naturali SCNAT
anne.jacob@scnat.ch

Nel 2019, l'Accademia svizzera di scienze naturali (SCNAT) ha assegnato per la prima volta il riconoscimento «Scuola media superiore attiva nei settori MINT» a diciotto scuole medie superiori particolarmente impegnate nei settori MINT (matematica, informatica, scienze naturali e tecniche). In questo modo, la SCNAT intende incoraggiare le scuole medie superiori ad implementare la cultura MINT nei rispettivi istituti. In questo contesto, non si tratta unicamente di incoraggiare le strutture che si specializzano in queste formazioni, bensì anche di far sì che tutte le scuole medie superiori promuovano la cultura MINT, comprese quelle ad orientamento umanistico.

Gli istituti scolastici con label MINT fanno parte della nuova rete di scuole MINT Svizzera. L'obiettivo di questa rete è quello di favorire le collaborazioni tra le scuole dei diversi cantoni e delle varie regioni linguistiche che hanno ottenuto il marchio, come pure di costruire una piattaforma per lo scambio di buone pratiche accessibile a tutte le scuole presenti in Svizzera.

La SCNAT indice il concorso per il secondo Label MINT: tutte le scuole medie superiori e le altre scuole di grado secondario II presenti in Svizzera e nel Liechtenstein, sono pertanto invitate a depositare i loro dossier. Le scuole che soddisfano i criteri richiesti riceveranno un Label, della validità di 5 anni, che assicura loro una grande visibilità a livello promozionale e consente di approfittare della rete di scuole MINT. Le domande devono essere presentate tramite l'apposito modulo ufficiale entro il **30 settembre 2020**.

Per maggiori informazioni: scnat.ch/labelMINT

Mise au concours du 2^e Label MINT

Gymnases actifs dans les domaines MINT

Anne Jacob, Académie suisse des sciences naturelles SCNAT
anne.jacob@scnat.ch

En 2019, l'Académie suisse des sciences naturelles (SCNAT) a honoré pour la première fois dix-huit gymnases particulièrement engagés dans les domaines MINT (Mathématiques, Informatique, sciences Naturelles et Techniques) par l'attribution d'une distinction dénommée « Gymnase actif dans les domaines MINT ». La SCNAT souhaite ainsi encourager les gymnases à implémenter la culture MINT dans leur institution. De fait, il ne s'agit pas uniquement d'encourager les établissements qui se spécialisent dans ces formations, mais de pousser tous les gymnases à favoriser la culture MINT, y compris ceux ayant un profil en sciences humaines.

Les écoles labellisées font partie d'un nouveau réseau d'écoles MINT Suisse dont le but est de favoriser les collaborations entre les écoles de différents cantons et régions linguistiques et de construire une plate-forme d'échange de bonnes pratiques à disposition de toutes les écoles en Suisse.

La SCNAT met au concours un deuxième Label MINT: Les gymnases et autres écoles du secondaire II suisses et du Liechtenstein sont ainsi invités à déposer un dossier. Les écoles répondant aux critères obtiendront un Label pour 5 ans. Les demandes doivent être faites au moyen du formulaire officiel d'ici au **30 septembre 2020**.

Plus d'information ici : scnat.ch/labelMINT

Ausschreibung der 2. Runde für das MINT-Label

Aktive Gymnasien im MINT-Bereich

Anne Jacob, Akademie der Naturwissenschaften Schweiz SCNAT
anne.jacob@scnat.ch

2019 wurden zum ersten Mal 18 Schweizer Gymnasien, die in den Bereichen Wissenschaft und Technik besonders aktiv sind, mit dem MINT-Label (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) der Akademie der Naturwissenschaften Schweiz SCNAT ausgezeichnet. Damit will die SCNAT die Gymnasien dazu ermuntern, die MINT-Kultur an ihrer Schule weiter zu entwickeln. Dabei stehen nicht nur die Schulen im Fokus, die sich auf die MINT-Bildung spezialisiert haben. Vielmehr sollen alle Gymnasien bei der Förderung der MINT-Kultur unterstützt werden, auch die Gymnasien, die im geisteswissenschaftlichen Bereich aktiv sind.

Die ausgezeichneten Schulen sind Teil eines neuen MINT-Schulnetzwerkes. Dieses Netzwerk soll dazu dienen, die Zusammenarbeit zwischen den MINT-Schulen der verschiedenen Kantone und Sprachregionen zu fördern und eine Plattform für den regen Austausch von Erfahrungen («Best Practices») zu entwickeln, die allen Schulen der Schweiz zur Verfügung steht.

Die SCNAT schreibt eine zweite Runde für das MINT-Label aus: Die Gymnasien in der Schweiz und in Liechtenstein sind eingeladen, ein Bewerbungsdossier einzureichen. Den Schulen, welche die Kriterien erfüllen, wird das Label für eine Dauer von fünf Jahren verliehen und sie dürfen damit werben. Die Anträge sind auf dem offiziellen Formular bis am **30. September 2020** einzureichen.

Weitere Informationen sind hier zu finden: scnat.ch/labelMINT

Détection de météores et d'aéronefs

Cédric Willmin, Gymnase français de Bienne, cedric@willemin.li

12 avril 2020

1 Introduction

Le radar militaire français GRAVES (Grand Réseau Adapté à la VEille Spatiale) émet des ondes électromagnétiques en permanence sur la fréquence de 143.05MHz. Les antennes émettrices du réseau GRAVES sont situées entre Dijon et Vesoul, dans le département français de Haute-Saône (cf. Figure 1). Les ondes générées par le radar sont réfléchies par tout objet électriquement conducteur, comme par exemple des satellites ou des avions. Le signal réémis par l'objet est réceptionné par un réseau composé d'une centaine d'antennes, situé sur le plateau d'Albion.



FIGURE 1 – Emetteurs du radar GRAVES, situé entre Dijon et Vesoul. Fréquence d'émission à 143.05MHz.

La détection de météores et d'aéronefs est réalisée selon le même principe. L'antenne émettrice est celle du radar GRAVES et la réception est effectuée au moyen d'une antenne Ground-Plan $3/4 - \lambda$ (cf. Figure 2), placée sur la toiture de la halle de gymnastique du Gymnase de la rue des Alpes à Bienne. Un tel système est communément qualifié de radar bistatique, car l'émetteur T_x est significativement éloigné géographiquement du récepteur R_x (cf. Figure 3).



FIGURE 2 – Système de réception placé sur le toit de la Halle de gymnastique du Gymnase des Alpes à Bienne. Un préamplificateur est placé directement sur le mât de l'antenne pour gagner en qualité de signal.

Si l'objet est en mouvement, l'onde réfléchiée verra sa fréquence augmenter ou diminuer en fonction de sa vitesse radiale par rapport au radar, mais aussi par rapport au mouvement de l'observateur. Ce phénomène de décalage de fréquence Δf est connu sous la dénomination d'effet Doppler-Fizeau.

$$\Delta f = f_{RX} - f_{TX} \quad (1)$$

où f_{TX} est la fréquence émise par le radar et f_{RX} la fréquence captée par l'antenne.

Les objets qui réfléchissent l'onde se déplacent à une vitesse relativement élevée dans le cas d'un météore et bien plus faible s'il s'agit d'avions. En ayant connaissance de la trajectoire du météore, il est possible dès lors de localiser son éventuel point d'impact sur notre planète.

$$\Delta f = \frac{2f_{TX} \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{c} \cdot \cos \delta \cdot \|\vec{v}\| \quad (2)$$

La constante c correspond à la vitesse de la lumière, soit environ $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. L'angle bistatique β n'est pas connu mais peut être estimé; sa valeur étant relativement faible lorsque le signal provient d'un météore ou d'un satellite et est plus élevé pour un avion.

Malheureusement, la vitesse \vec{v} et la position de l'objet ne peuvent pas être définies avec une seule station de réception, car l'angle δ (cf. Figure 3) est inconnu. Mais il est néanmoins possible de définir la projection de la vitesse sur l'angle bistatique \vec{w} .

$$\|\vec{w}\| = \cos \delta \cdot \|\vec{v}\| \quad (3)$$

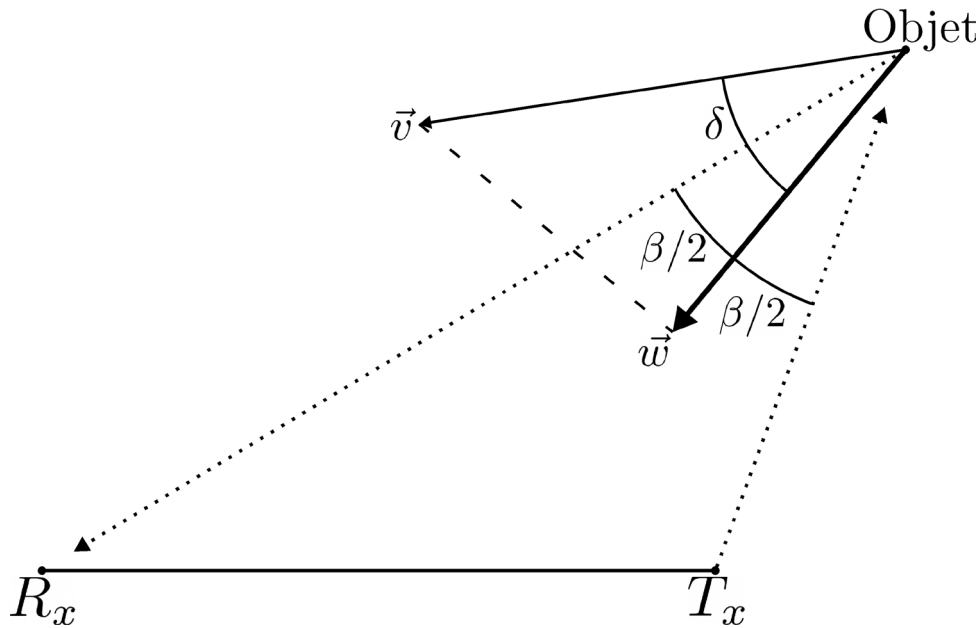


FIGURE 3 – Représentation géométrique du radar bistatique. L'émetteur est éloigné du récepteur. L'angle β correspond à l'angle bistatique.

Dans les années 1940, une expérience similaire avait déjà été réalisée. Par contre, la technologie de l'époque ne permettait pas d'atteindre les résultats actuels. Le but d'alors était d'écouter l'écho des météores sous forme sonore. Les fichiers audio étaient enregistrés sur des bandes magnétiques, technologie totalement obsolète de nos jours.

2 Acquisition des données

Un météoroïde (terme désignant un météore lorsqu'il est encore dans l'espace) pénètre dans la mésosphère, couche de l'atmosphère située à une centaine de kilomètres d'altitude, à une vitesse hypersonique. L'onde incidente est réfléchie par la traînée d'ionisation formée par le météore lors de sa chute dans l'atmosphère (cf. Figure 4). L'onde émise par le radar est également réfléchie par des satellites, avions et autres objets conducteurs.

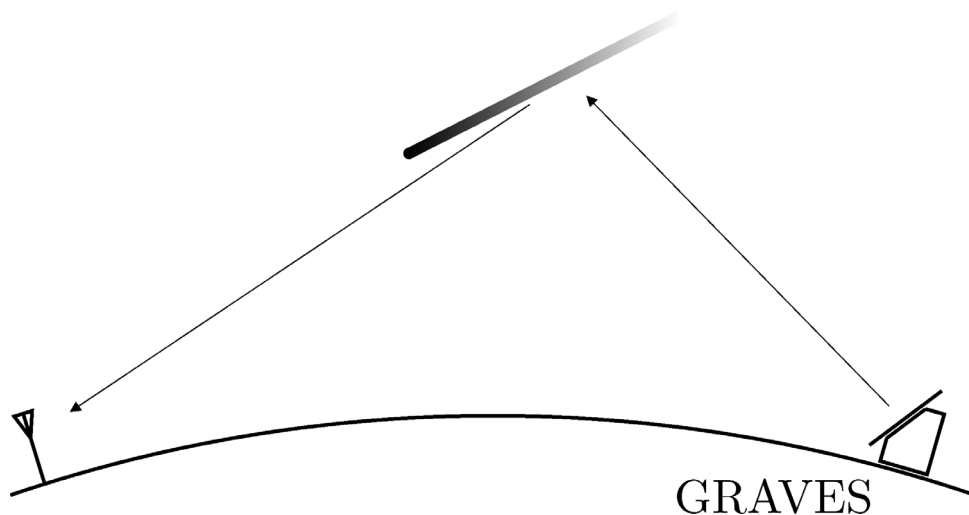


FIGURE 4 – L'onde n'est pas réfléchie par le météore lui-même, mais par sa traînée.

L'onde réfléchie est captée par le système de réception via l'antenne Ground-Plan $3/4 - \lambda$. Un préamplificateur et un filtre passe-bande ont été insérés pour offrir plus de sensibilité et de sélectivité (cf. Figure 5). Le signal est

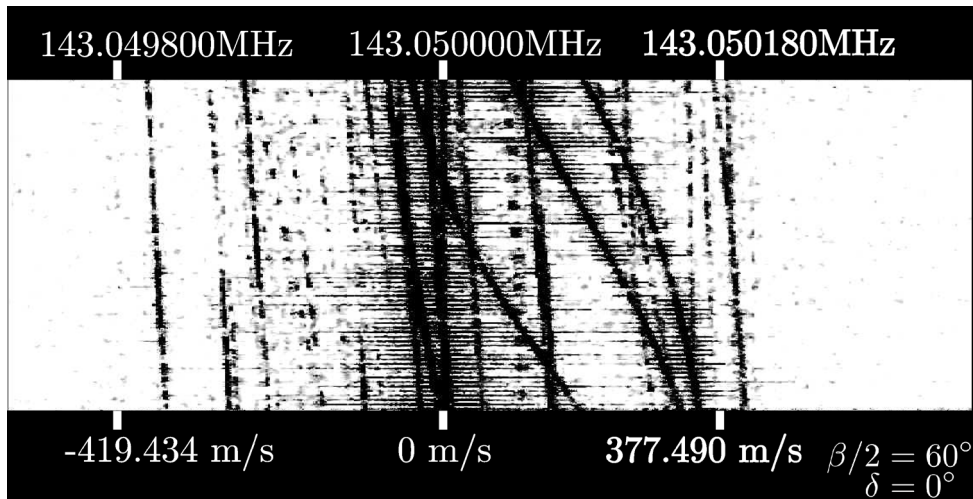


FIGURE 7 – Signature des avions, leurs décalages en fréquence est relativement faible.

Météores : Beaucoup de météores pénètrent dans l'atmosphère et une grande partie d'entre eux se consomment intégralement quasiment instantanément. Contrairement aux aéronefs, le météore présente de très fortes variations Doppler sur une très brève durée.

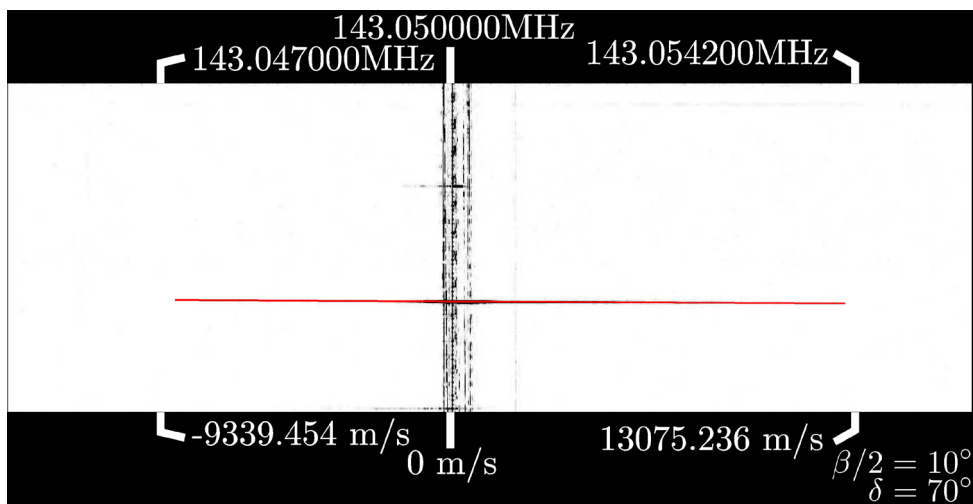


FIGURE 8 – Signature d'un météore, le décalage Doppler est bien plus important que pour celui d'un avion.

Pluies d'étoiles filantes : Il est intéressant de compter le nombre de météores détectés lors d'une période durant laquelle une pluie d'étoiles filantes est attendue, comme par exemple lors des Perséides ou lors des Aquarides (cf. Figure 9). Le nombre de détection de météores s'élève à plusieurs dizaines par heures en période de « pluies d'étoiles filantes », contre de l'ordre d'une dizaine par heure en période normale.

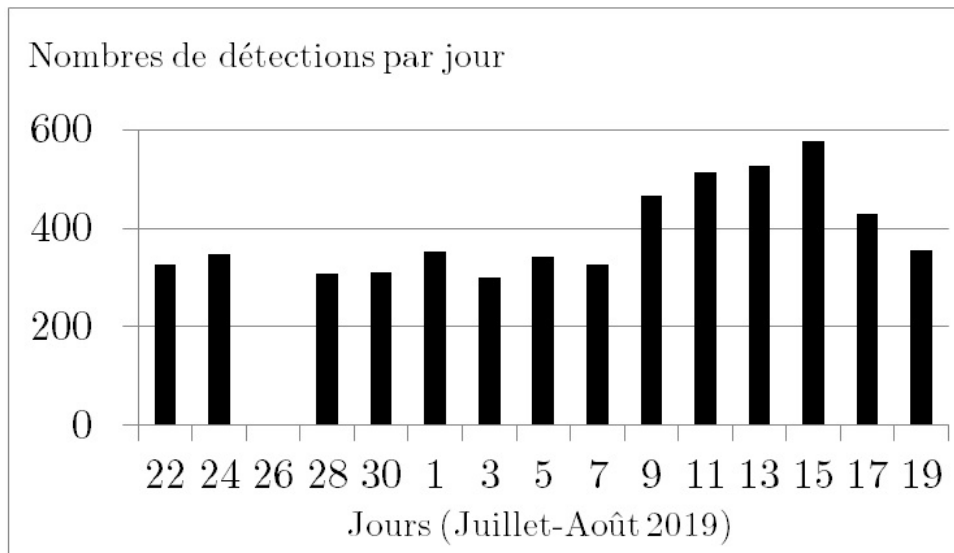
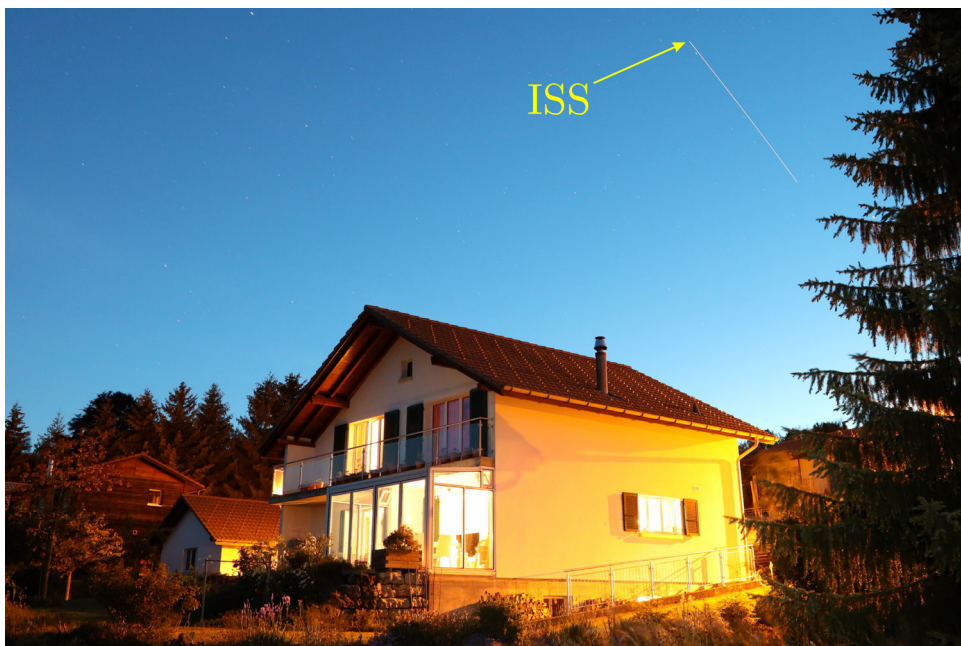


FIGURE 9 – Nombre de météores détectés journallement durant les Perséides avec cette instrumentation. Le nombre de météores augmente lors du pic d'activité (11-15 août) à environ 30 détections par heure.

Satellites : La position et l'instant de passage de certains satellites comme par exemple l'ISS (Station Spatiale Internationale) sont des données accessibles au public. Il est possible d'affirmer avec certitude qu'il s'agit de satellites, car leur vitesse est par exemple d'environ 24'000 km/h, est plus élevée que des avions, mais bien plus faible que celle des météores.



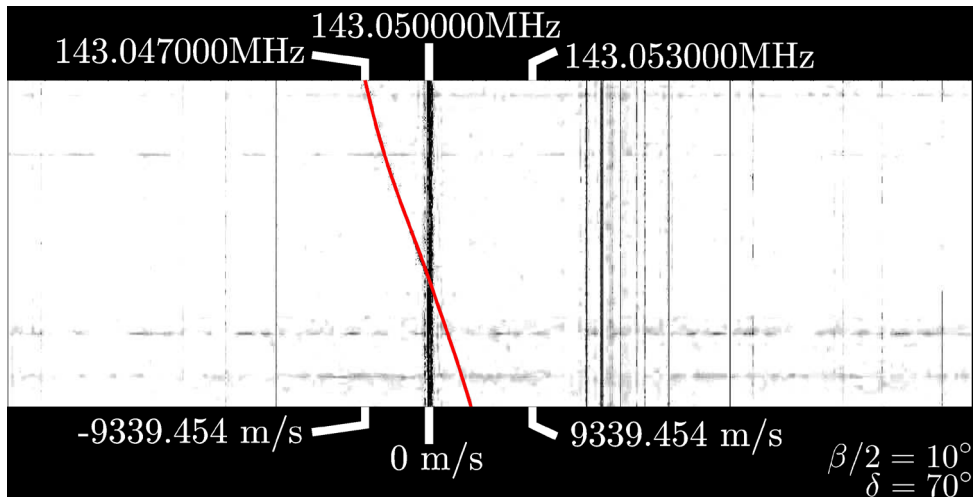


FIGURE 10 – Deux illustrations de l’ISS enregistrées simultanément : optiquement (photographie) et par détection radar bistatique.

4 Conclusions

Le système de détection basé sur le modèle du radar bistatique est opérationnel par tous les temps, de jour comme de nuit. La plausibilité des résultats a été vérifiée de différentes façons, comme la détection du passage de la Station Spatiale Internationale (ISS) ou les pluies d’étoiles filantes des Perséides.

L’installation de ce système relativement simple ne nécessite aucune, licence de radioamateur, ni d’autorisation particulière.

Pour approfondir les résultats, il serait possible d’opérer par triangulation sur plusieurs sites, permettant ainsi de quantifier raisonnablement la vitesse des objets détectés. Avis aux amateurs !

5 Remerciements

- Club de radioamateurs HB9XC section Pierre-Pertuis (USKA)
- Gymnase français de Bienne, Monsieur Philippe Drompt

6 Littérature

- <https://f6crp.pagesperso-orange.fr/ba/graves.htm>
- <http://www.astrosurf.com/luxorion/meteores-anomalies.htm>
- Olivier Pilloud (HB9CEM), 2018 - Le Radioamateur, Editions TECHNIP, ISBN 978-2-7108-1184-8
- https://www.willemin.li/cedric/utiles/Detection_meteores_aeronefs_191022.pdf

7 Coordonnées

Cédric Willemin
Chemin des Alouettes 6
CH-2515 Prêles

cedric@willemin.li
<https://www.willemin.li/cedric/>

Conception et réalisation d'un cube de LED programmable par microcontrôleur

Lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel

Tim Flückiger

timflueckiger@outlook.com

1. INTRODUCTION

Le sujet de cet article est un projet qui a été mené lors de mon travail de maturité pour le Lycée Denis-de-Rougemont à Neuchâtel. Derrière le nom de ce projet, peut-être difficilement représentatif au premier abord, se cache un travail en électronique au résultat visuel.

L'électronique est un domaine de la physique à la fois vaste et passionnant. Toutefois, il n'est véritablement que peu connu par la plupart d'entre nous et effraie même parfois, puisque certaines de ses notions peuvent paraître abstraites, difficilement représentables, ou encore dangereuses. C'est de ce constat qu'est né l'idée de ce travail : donner un aspect visuel et plus perceptible à l'électronique. Pour cela, aucun composant ne s'y prête mieux que la diode électroluminescente, que nous connaissons tous sous l'acronyme de « LED ». Ainsi, mon projet s'est précisé : concevoir et fabriquer un cube de 216 LED (6x6x6) pouvant jouer des animations lumineuses, le tout programmé par un microcontrôleur. Je souhaitais accomplir personnellement l'entièreté de celui-ci : la conception et la soudure du cube, les calculs et schémas, le choix des composants, la réalisation du PCB, ainsi que la programmation du microcontrôleur.

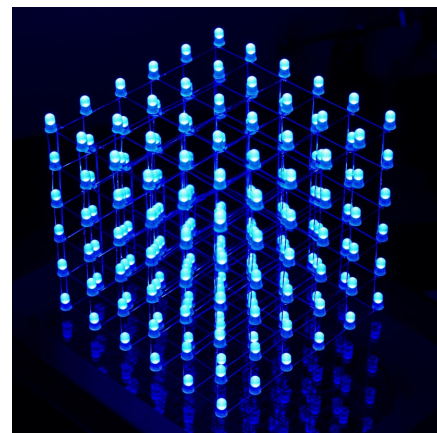


Figure 1: cube de LED allumé.

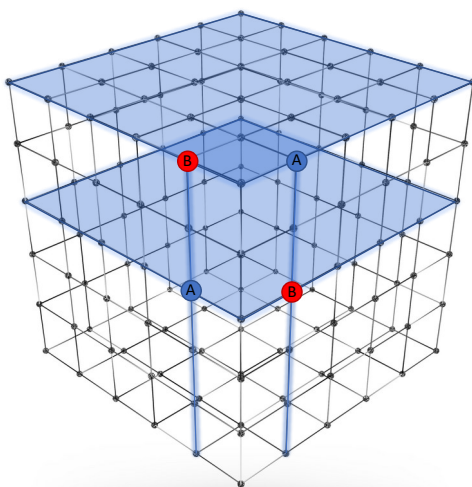


Figure 2: Modèle 3D du cube. L'allumage des deux LED A engendre l'allumage indésirable des deux LED B.

Le premier problème auquel j'ai fait face est la divergence entre le nombre de sorties d'un microcontrôleur standard (aux alentours de 20 sorties digitales) et celui qu'il en faut pour contrôler l'allumage de 216 LED. Pour pallier ce problème, j'ai construit le cube de façon à ce que toutes les LED d'un même étage aient leurs anodes en commun, et que toutes les LED d'une même colonne aient leurs cathodes en commun. En combinant l'état logique des étages et des colonnes, nous pouvons allumer chaque LED indépendamment. Une seconde difficulté intervient : l'allumage indésirable de certaines LED (illustré sur la figure ci-contre). La persistance rétinienne permet fort heureusement de la contourner.

2. PERSISTANCE RÉTINIENNE

La persistance rétinienne est un phénomène optique qui permet à l'œil de garder en mémoire une image pendant un court instant. Elle crée notamment l'illusion de mouvement lorsqu'on regarde une succession d'images à un rythme élevé. Le temps pendant lequel l'œil se souvient d'une image est, chez l'humain, d'environ 50 millisecondes. Calculons la fréquence : $f = 1/T$. T est la période, c'est-à-dire l'intervalle de temps pour qu'un phénomène périodique se répète, ici deux images successives. $T = 50 \text{ ms} = 0.05 \text{ s} \rightarrow f = 1/0.05 = 20 \text{ Hz}$. C'est la fréquence de « rafraichissement » de l'œil humain.

Le problème d'allumage des LED est résolu en les allumant par alternance. Il en découle le premier principe de fonctionnement du cube : un seul étage sera allumé à la fois. Le cube possédant six étages, chaque LED se voit allumée qu'une fois sur six. Le rapport cyclique (ratio entre la durée à l'état haut et une période) vaut $1/6 = 16.6\%$. L'intensité lumineuse de la LED, étant définie par l'intensité moyenne du courant (DC) qui la traverse, est six fois plus faible que lorsqu'elle est allumée à plein temps. C'est pourquoi, je me suis tourné vers des LED particulièrement lumineuses. Le choix s'est fait pour des LED de 500 mcd (*millicandela*), pour un courant de 20 mA et ayant une tension de seuil (V_f) de 3,3V. Finalement, nous avons 42 (36 colonnes et 6 étages) courants à gérer.

3. ARDUINO

Arduino est une marque commerciale produisant des cartes électroniques programmables en « licence libre » embarquant des microcontrôleurs. Elle a notamment été fondée dans le but de rendre la programmation de microcontrôleur plus accessible. Par ailleurs, elle encourage les acheteurs à comprendre leurs produits, à les modifier, voir à les améliorer. Le langage de programmation des cartes Arduino est basé sur le C++. Parmi les nombreuses cartes proposées, je me suis tourné vers un Arduino Micro, qui est la plus compacte d'entre elles. De plus, son format de fabrication lui permet d'être soudée sur un circuit électronique.

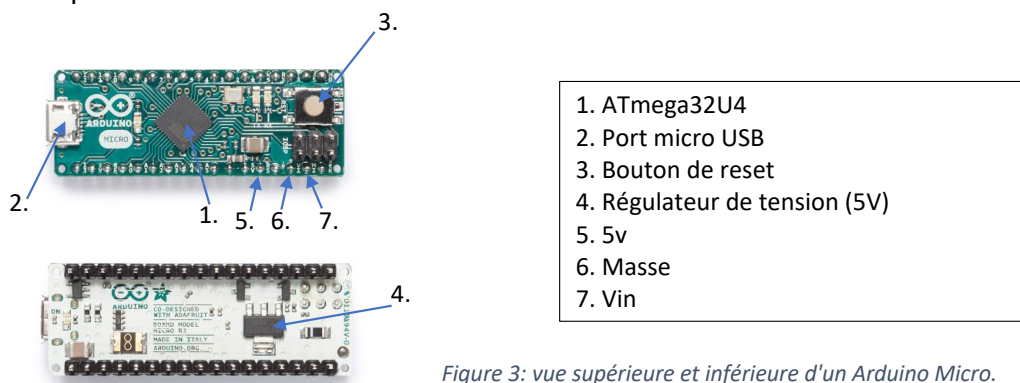


Figure 3: vue supérieure et inférieure d'un Arduino Micro.

Cette carte possède un port micro USB, employé pour le transfert des programmes de l'interface de programmation vers le microcontrôleur, la communication série avec un ordinateur, et l'alimentation par USB. L'Arduino Micro fonctionne en 5V et possède un régulateur de tension qui accepte des tensions d'entrées allant de 7V à 12V.

4. GESTION DES ÉTAGES

L'intensité du courant total par étage est 0.72 A (36 x 0.020 A). Des composants de puissance sont nécessaires afin de commuter ces « forts » courants. Le transistor est un composant électronique actif à trois électrodes, de la famille des semi-conducteurs. Son rôle est de contrôler un courant ou une tension sur l'électrode de sortie par une électrode d'entrée. Les transistors peuvent être utilisés en commutation, ou en amplification. Nous allons les utiliser en commutation en tant qu'interrupteur commandable. Les deux types de transistor les plus utilisés sont les transistors à effet de champ (MOSFET) et les transistors bipolaires. Pour ce projet, ce sont ces derniers qui ont été choisis.

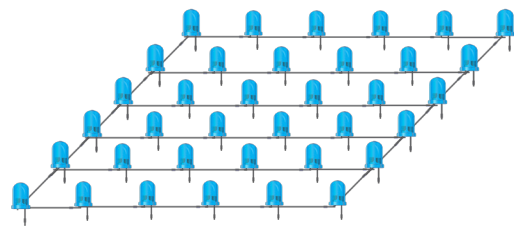


Figure 4: représentation d'un étage à anode commune.

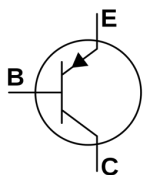


Figure 5: symbole du transistor bipolaire PNP.

Le transistor bipolaire possède trois broches (Figure 5) : la base (B), le collecteur (C), et l'émetteur (E). La base est la broche de commande, qui contrôle le passage du courant entre le collecteur et l'émetteur. Les transistors bipolaires utilisés sont de technologie PNP (l'autre type existant est le transistor NPN). Deux régimes de fonctionnement sont attribués au transistor bipolaire. On emploie le régime de saturation si l'on souhaite que le transistor ne puisse prendre que deux états : bloqué ou passant. Lorsque le transistor est dans un état intermédiaire, le régime est linéaire. Le courant de sortie (noté I_C) est proportionnel (en théorie en tous-cas) au courant circulant dans la base (noté I_B) du transistor : $I_C = \beta \cdot I_B$, où β est le facteur d'amplification (appelé aussi « gain » et parfois noté H_{FE}).

Les transistors utilisés pour commuter les courants traversant les étages sont employés en régime de saturation. L'émetteur est relié à la borne positive de l'alimentation. Le collecteur est relié à l'anode commune d'un des six étages. La base du transistor est contrôlée par un second transistor NPN, dont la base est reliée à un pin du microcontrôleur. Le schéma ci-contre représente la gestion d'un étage. En utilisant les lois de bases de l'électricité, nous pouvons calculer les valeurs des résistances R1 et R2. Celles-ci dépendent directement des transistors utilisés (gain et tension base-émetteur).

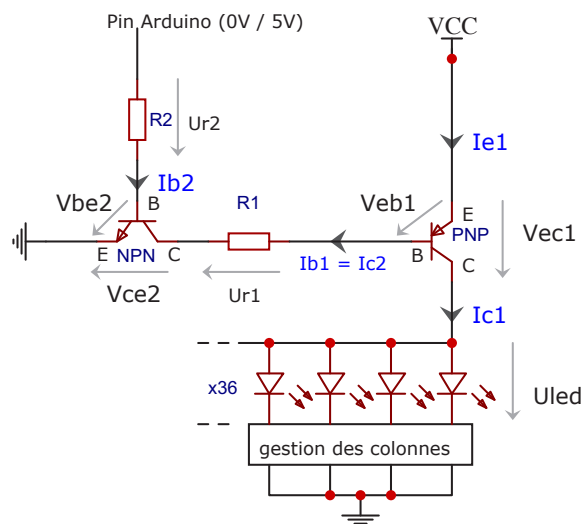


Figure 6: schéma du circuit gérant le courant d'un étage du cube. Toutes les grandeurs représentées sur le schéma se référant au transistor PNP portent l'indice 1, et celles se référant au NPN l'indice 2.

5. GESTION DES COLONNES

La gestion des courants traversant les différentes colonnes du cube est opérée par une série de circuits intégrés qui lui sont dédiés : des registres à décalages. Ils permettent la multiplication du nombre de sorties du microcontrôleur. Ce dernier ne disposant que d'une vingtaine de sorties digitales, il ne peut pas contrôler directement les 36 courants circulants dans les colonnes du cube.

Les registres à décalages sont formés de bascules reliées les unes aux autres et commandées par un signal d'horloge commun. Lors d'une période d'horloge, le circuit lit l'état logique présent en entrée et le décale à une sortie, qui elle-même décale son état à la sortie suivante, et ainsi de suite. Nous pouvons alors contrôler l'état de chacune des sorties en les décalant un par un, à chaque signal d'horloge. Le plus gros avantage de ces circuits est la possibilité de les mettre en chaîne afin de contrôler un grand nombre de sorties, en utilisant seulement trois sorties digitales d'un microcontrôleur.

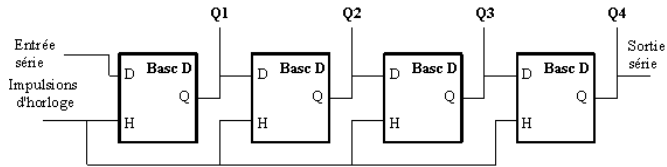


Figure 7: schéma interne d'un registre à décalage.

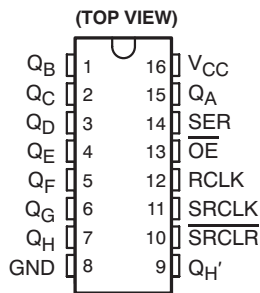


Figure 8: représentation d'un registre à décalage.

QA à QH sont les huit sorties digitales qui possèdent des mémoires internes, leur permettant de conserver leurs états logiques. Les trois pins nécessaires à l'utilisation d'un registre sont : SER, SRCLK, RCLK. Le pin SER (*Serial*) est l'entrée série du registre, c'est par celui-ci que le circuit reçoit les données provenant du microcontrôleur. Le pin SRCLK (*Shift Register Clock*) est l'entrée d'horloge du registre à décalage. Le pin RCLK (*Register Clock*) est l'entrée d'horloge du registre mémoire. Celui-ci permet la duplication des informations contenues dans le registre à décalages sur les huit sorties.

Lorsque le pin SRCLK passe de l'état bas à l'état haut (le terme exact est « contrôle par front montant d'horloge »), l'état du pin SER est transmis au premier emplacement du registre à décalage, et chaque état du registre est décalé. C'est seulement lorsque RCLK est mis à l'état haut, que les états contenus dans le registre sont transmis aux huit sorties. QH' permet la mise en cascade de plusieurs registres. Lorsque le dernier bit du registre est décalé, il est transmis sur ce pin, qui est relié à l'entrée série du registre suivant.

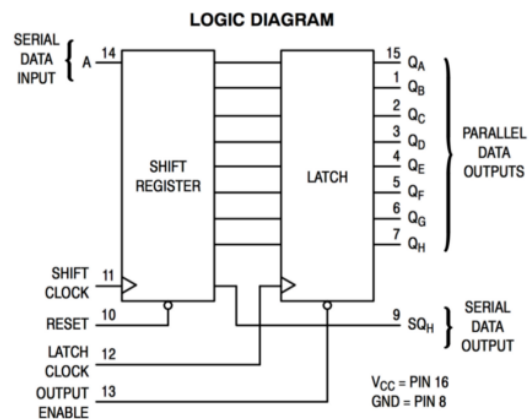


Figure 9: diagramme logique de fonctionnement du registre à décalage 74HC595. « LATCH CLOCK » correspond au pin RCLK.

Parmi les milliers de référence existantes, le circuit intégré choisi est le TLC5916. Ce circuit comprend un registre à décalage de type « SINK » et fournit du courant constant sur ses sorties, qui est défini par une seule résistance externe. SDI est l'entrée série, CLK est l'horloge du registre à décalage, LE : l'horloge du registre mémoire, SDO : la sortie série (afin de cascader des circuits), le pin R-EXT est relié à la masse via une résistance, qui définit le courant constant des huit sorties, et VDD l'alimentation du circuit.

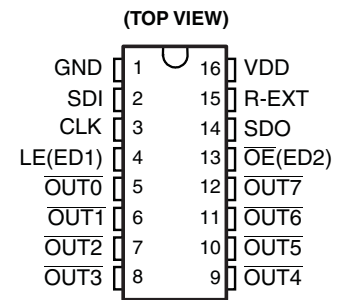


Figure 10: représentation du TLC5916IN en boîtier DIP-16.

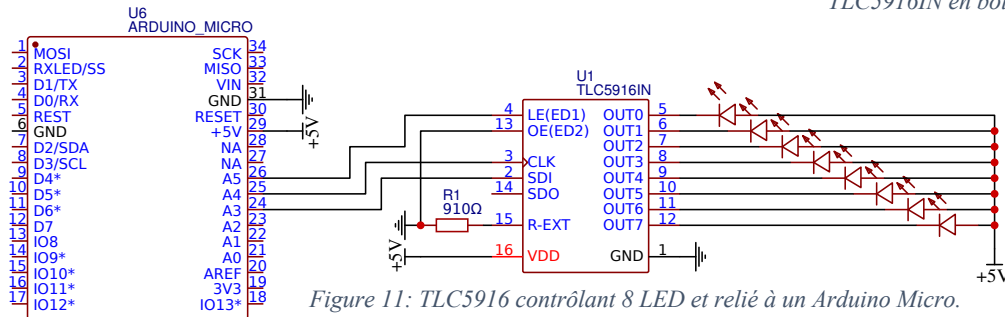


Figure 11: TLC5916 contrôlant 8 LED et relié à un Arduino Micro.

Chaque circuit intégré possède huit sorties digitales. Puisqu'on a besoin d'en contrôler 36, il faut cinq TLC5915IN. Ceux-ci seront mis en chaîne. Le pin SDO du premier sera relié au pin SDI du deuxième, et ainsi de suite. Les pins CLK, et LE (les deux horloges) sont communs à tous les circuits. L'ensemble du circuit est alimenté en courant continu 7,5V.

La construction du cube en lui-même constitue une importante partie pratique. Celle-ci débute par la mise en place d'un gabarit de soudure en bois qui maintiendra le cube. Il est fabriqué à partir d'une planche de bois auquel 36 trous sont percés, dont le diamètre concorde avec celui des LED. Il faut souder les six étages de 36 LED séparément. Puis, il faut assembler les étages en les soudant les uns sur les autres. Cette dernière étape s'est révélée être longue et fastidieuse. Le circuit électronique est un PCB artisanal permettant un encombrement réduit.

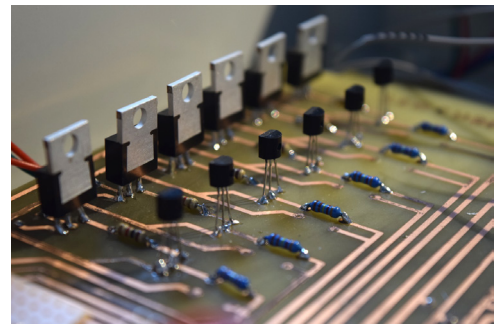


Figure 12: PCB (circuit imprimé) réalisé artisanalement.

6. PROGRAMMATION DU MICROCONTRÔLEUR

Les six étages et les circuits intégrés sont commandés par des sorties digitales de l'Arduino Micro. Ci-dessous un code qui allume une LED aléatoirement à intervalle régulier est commenté. Il faut tout d'abord déclarer et initialiser les variables. *dataPin* est le numéro du pin de donnée, *latchPin* celui du registre mémoire, et *clockPin* celui du signal d'horloge. Les variables stockant les numéros correspondants aux étages sont : *lvl1*, *lvl2*, ... *lvl5*.

```
#define nombreDeRegistres 5 // définition du nombre de registres
#define nombreDePins nombreDeRegistres * 8-4 // nombre total de pins des registres
boolean valeur[nombreDePins]; // tableau de booleans, de taille égale au nombre de pins.
```

```

void setup(){                                     // fonction setup qui ne s'effectue qu'une seule fois au démarrage
  pinMode(dataPin, OUTPUT);
  pinMode(clockPin, OUTPUT);
  pinMode(latchPin, OUTPUT);
  pinMode(lvl0,OUTPUT);
  ...
  pinMode(lvl5,OUTPUT);
  effaceRegistres();                               // réinitialisation des valeurs
  envoie();                                       // envoi des données
}

void loop(){                                     // fonction loop qui s'effectue en boucle à « l'infini »
  lvIOFF();                                       // extinction de tous les étages
  digitalWrite(random(7,13),1);                 // allumage aléatoire d'un étage
  effaceRegistres();                             // extinction de toutes les colonnes
  setVal(random(35),1);                          // une valeur du tableau "valeur" est mise à 1
  envoie();                                       // envoi des données
  delay(200);                                    // délai de 200 millisecondes
}

void envoie(){                                   // envoi des valeurs contenues dans le tableau "valeur" aux registres
  digitalWrite(latchPin, LOW);                  // tant que latchPin est à 0, les modifications ne seront
                                                // pas affectées aux sorties des registres (*)
  for(int i = nombreDePins - 1; i >= 0; i--){ // boucle pour l'envoi d'une valeur à chaque pin des registres
    digitalWrite(clockPin, LOW);               // clockPin doit être à 0 pour permettre plus tard le front montant (**)
    digitalWrite(dataPin, valeur[i]);         // envoie la valeur sur le pin de donnée
    digitalWrite(clockPin, HIGH);             // décalage d'un pin (**)
  }
  digitalWrite(latchPin, HIGH);                // applique aux sorties toutes les valeurs (front montant) (*)
}

void setVal(int i, int valeurPin){               // enregistre une valeur dans le tableau "valeur"
  valeur[i] = valeurPin;
}

void effaceRegistres(){                         // réinitialisation des valeurs
  for(int i = nombreDePins - 1; i >= 0; i--){ // chaque valeur du tableur est mise à zéro
    valeur[i] = 0;
  }
}

void lvIOFF(){                                  // éteint tous les étages
  digitalWrite(lvl0,0);
  ...
  digitalWrite(lvl5,0);
}

```

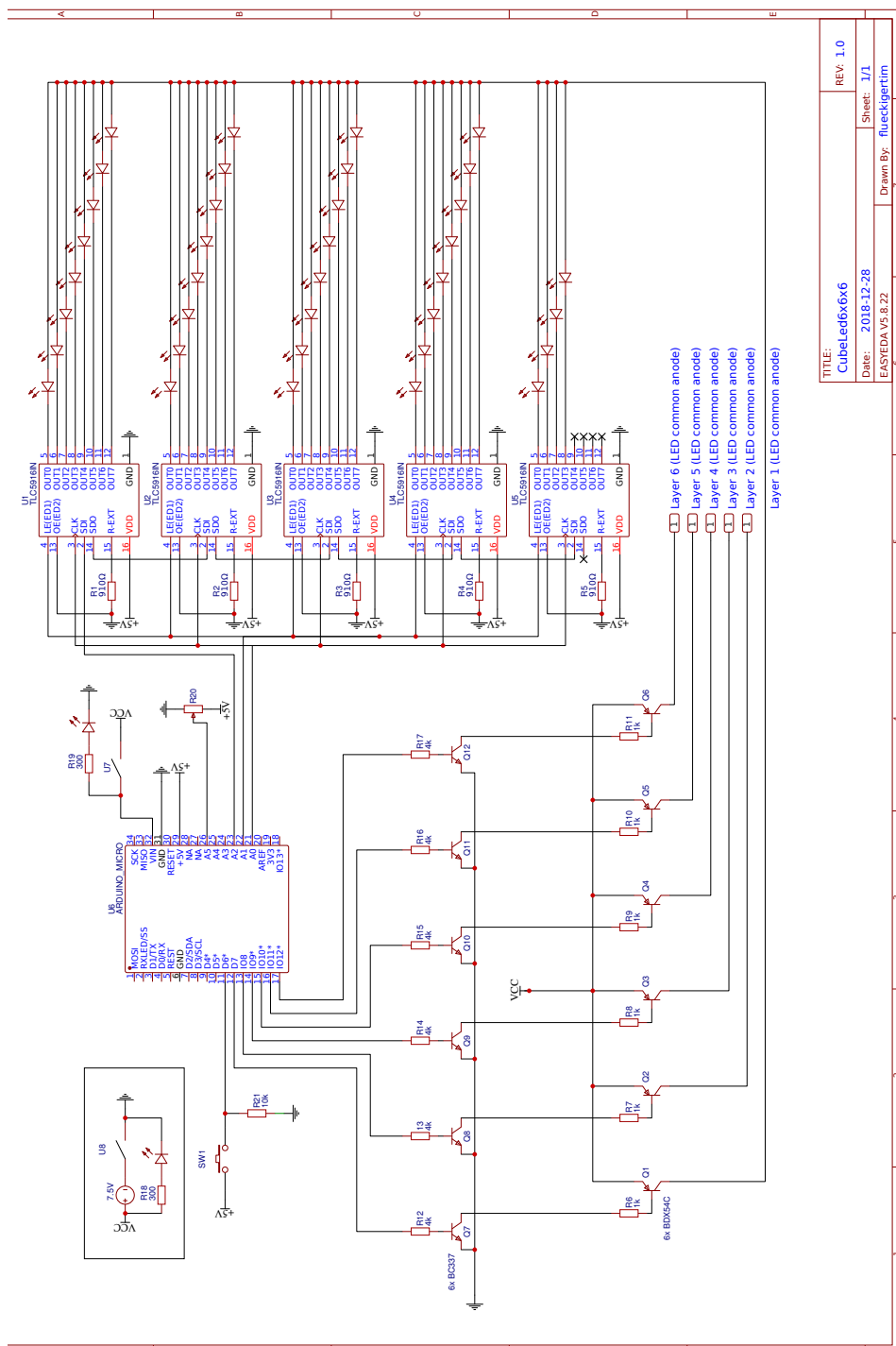
définition du mode d'utilisation des pins de l'Arduino → sorties digitales

Allumage d'une colonne

7. CONCLUSION

Quelques autres animations plus complexes (vague sinusoïdale, ...) ont été programmées, mais les possibilités restent infinies. La portée de ce projet a été bien plus importante que ce que j'imaginai. Ayant au départ que très peu de notions d'électronique, il a été difficile de m'y retrouver parmi les milliers de références existantes pour un composant donné, notamment les transistors et les registres à décalages. C'est pourquoi, dans un premier temps, un important travail de recherche et d'auto-apprentissage des bases de l'électronique a été nécessaire. Finalement, ce travail a été très enrichissant et plus que bénéfique, tout particulièrement pour la suite de mes études, ayant commencé un Bachelor en microtechnique à l'EPFL.

8. ANNEXE



Coordonnées barycentriques et hyperbole de Kiepert

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Un triangle fournit de nombreux “points remarquables” (Clark Kimberling en a répertorié plus de 30'000 dans une liste). Beaucoup d'entre eux sont obtenus par des intersections de droites (centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit,...) qui peuvent découler de polygones auxiliaires construits sur les côtés du triangle (points de Napoléon, Fermat, Vecten,...). Nous avons présenté certains de ces derniers points dans le bulletin n°139 (“Géométrie et nombres complexes”) et cet article est né afin de généraliser la construction faite sur les côtés d'un triangle. Ceci nous mène à l'hyperbole de Kiepert et nous l'aborderons avec la notion de coordonnées barycentriques.

1 Coordonnées barycentriques

Dans le plan euclidien, on considère un triangle ABC et un point quelconque P .

- 1) Il existe alors de manière unique des nombres x, y et z dont la somme vaut 1 et tels que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$. Ce sont les *coordonnées barycentriques* de P et on note $P[x; y; z]$.
- 2) La droite passant par $P_1[x_1; y_1; z_1]$ et $P_2[x_2; y_2; z_2]$ est constituée des points $P[x; y; z]$ tels que $\det(\overrightarrow{OP}_1; \overrightarrow{OP}_2; \overrightarrow{OP}) = 0$, les trois vecteurs étant exprimés avec leurs composantes barycentriques.

Preuve. Exprimant le vecteur \overrightarrow{AP} dans la base $\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle$, on peut trouver deux nombres uniques y et z tels que $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. On démontre alors la première affirmation en utilisant la relation de Chasles. Pour la deuxième affirmation, on peut simplifier le déterminant en ajoutant les deux dernières lignes à la première puis en soustrayant la première colonne aux deux autres :

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y - y_1 \\ z_2 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix}$$

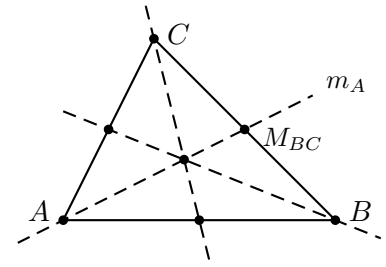
Comme y et z sont les composantes du vecteur \overrightarrow{AP} dans la base $\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle$, on obtient simplement $d = \det(\overrightarrow{AP}_2 - \overrightarrow{AP}_1; \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}_1) = \det(\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{P_1P})$. Dire que ce déterminant est nul revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P}$ sont proportionnels et donc que P est aligné avec P_1 et P_2 . \square

Nous considérons un triangle ABC et adoptons les notations usuelles pour la longueur des côtés (a, b et c) et la mesure des angles (α, β et γ). Nous notons $P[x; y; z]$ même lorsque la somme $x + y + z$ (supposée non nulle) ne vaut pas 1, en convenant que les coordonnées barycentriques de P doivent alors être normalisées (cela n'a aucune incidence sur l'équation barycentrique d'une droite donnée par deux points). Par exemple, si on multiplie chaque composante d'un point $P[a \cdot (\dots); b \cdot (\dots); c \cdot (\dots)]$ par $\frac{\sin \alpha}{a}$ ($= \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$), on peut également écrire $P[\sin(\alpha) \cdot (\dots); \sin(\beta) \cdot (\dots); \sin(\gamma) \cdot (\dots)]$.

Dans les raisonnements qui suivent, on peut établir les équations barycentriques des droites en développant un déterminant ou se contenter de vérifier que les droites indiquées passent bien par les points donnés par leurs coordonnées barycentriques.

2 Médiannes et centre de gravité

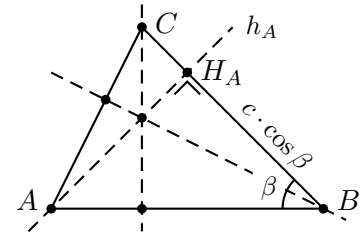
On a $A[1; 0; 0]$ et le milieu du côté BC est $M_{BC}[0; 1; 1]$. La droite m_A passant par A et M_{BC} a ainsi l'équation barycentrique $y = z$. Par permutation circulaire, on trouve les équations des autres médianes : $z = x$ pour m_B et $x = y$ pour m_C . Les trois médianes se coupent lorsque $x = y = z$, donc au point $G[1; 1; 1]$.



3 Hauteurs et orthocentre

Le pied de la hauteur issue du sommet A est le point H_A défini par la relation vectorielle

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH_A} &= \overrightarrow{OB} + \frac{c \cos \beta}{a} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{c \cos \beta}{a} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \left(1 - \frac{c \cos \beta}{a}\right) \overrightarrow{OB} + \left(\frac{c \cos \beta}{a}\right) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

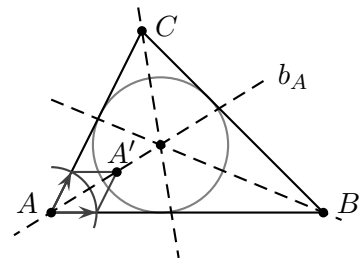


et comme $a - c \cos \beta = b \cos \gamma$, on a $H_A \left[0; \frac{b \cos \gamma}{a}; \frac{c \cos \beta}{a}\right]$ ou $H_A [0; b \cos \gamma; c \cos \beta]$.

La droite h_A passant par $A[1; 0; 0]$ et $H_A [0; b \cos \gamma; c \cos \beta]$ admet l'équation $b \cos(\gamma)z = c \cos(\beta)y$. Par permutation circulaire, on trouve les équations $c \cos(\alpha)x = a \cos(\gamma)z$ pour h_B et $a \cos(\beta)y = b \cos(\alpha)x$ pour h_C . Ces trois hauteurs se coupent en $H[a \cos(\beta) \cos(\gamma); b \cos(\alpha) \cos(\gamma); c \cos(\alpha) \cos(\beta)]$.

4 Bissectrices et centre du cercle inscrit

La bissectrice intérieure b_A au sommet $A[1; 0; 0]$ passe également par le point A' défini par la relation $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{c} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \overrightarrow{AC}$, donc $A' \left[1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}; \frac{1}{c}; \frac{1}{b}\right]$. Son équation barycentrique est $\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$ et par permutation circulaire, on trouve les équations $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ pour b_B et $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ pour b_C . Ces trois bissectrices se coupent en $I[a; b; c]$.



5 Médiatrices et centre du cercle circonscrit

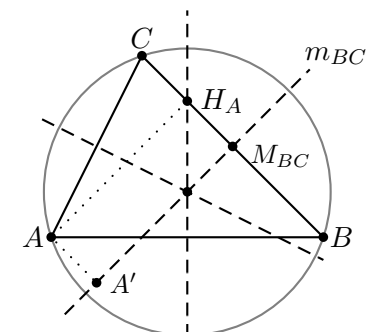
La médiatrice m_{BC} du segment BC passe par $M_{BC}[0; 1; 1]$ et le point A' défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM_{BC}} + \overrightarrow{H_A A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ b \cos \gamma \\ c \cos \beta \end{bmatrix},$$

donc $A' \left[1; \frac{1}{2} - \frac{b \cos \gamma}{a}; \frac{1}{2} - \frac{c \cos \beta}{a}\right]$.

On trouve alors pour m_{BC} l'équation barycentrique $a(y - z) = x(c \cos \beta - b \cos \gamma)$, donc

$$\begin{aligned} a \cos \alpha (y - z) &= x(c \cos \alpha \cos \beta - b \cos \alpha \cos \gamma) \\ &= x((b - a \cos \gamma) \cos \beta - (c - a \cos \beta) \cos \gamma) \\ &= x(b \cos \beta - c \cos \gamma) \end{aligned}$$



et la médiatrice m_{BC} contient $\Omega[a \cos(\alpha); b \cos(\beta); c \cos(\gamma)]$. Ce point se trouve également sur les deux autres médiatrices dont les équations sont obtenues par permutation circulaire. Remarquons que l'on peut aussi écrire $\Omega[\sin(\alpha) \cos(\alpha); \sin(\beta) \cos(\beta); \sin(\gamma) \cos(\gamma)]$ ou $\Omega[\sin(2\alpha); \sin(2\beta); \sin(2\gamma)]$.

6 Conjugué isogonal

Etant donné un triangle ABC et un point P , on peut construire le symétrique de la droite AP par rapport à la bissectrice intérieure du triangle issue du sommet A . On note s_{AP} la droite obtenue et on construit de manière analogue les droites s_{BP} et s_{CP} . Si P ne se trouve pas sur le cercle circonscrit du triangle ABC , alors ces trois droites se coupent en un point \bar{P} appelé *conjugué isogonal* de P .

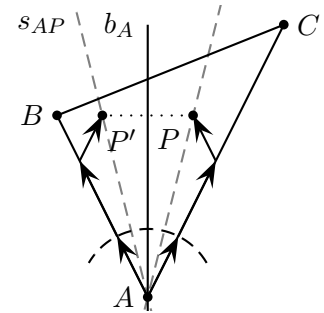
Preuve. Considérons $P[x_0; y_0; z_0]$ avec $x_0 + y_0 + z_0 = s$. On a alors

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y_0}{s} \overrightarrow{AB} + \frac{z_0}{s} \overrightarrow{AC} = \frac{c \cdot y_0}{s} \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{b \cdot z_0}{s} \frac{\overrightarrow{AC}}{b}$$

et le point P' symétrique de P par rapport à la bissectrice b_A vérifie

$$\overrightarrow{AP'} = \frac{b \cdot z_0}{s} \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{c \cdot y_0}{s} \frac{\overrightarrow{AC}}{b} = \frac{b \cdot z_0}{c \cdot s} \overrightarrow{AB} + \frac{c \cdot y_0}{b \cdot s} \overrightarrow{AC},$$

donc $P'[\dots; \frac{bz_0}{cs}; \frac{cy_0}{bs}]$ ou $P'[\dots; b^2z_0; c^2y_0]$. La droite s_{AP} passant par $A[1; 0; 0]$ et P' admet l'équation barycentrique $b^2z_0z = c^2y_0y$. Par permutation circulaire, on trouve les équations $c^2x_0x = a^2z_0z$ et $a^2y_0y = b^2y_0y$ pour s_{BP} et s_{CP} . Ces trois droites se coupent en $\bar{P}[a^2y_0z_0; b^2x_0z_0; c^2x_0y_0]$. Un problème survient lorsque la somme des composantes barycentriques de \bar{P} est nulle, c'est-à-dire lorsque le point P se trouve sur le cercle circonscrit (dont l'équation barycentrique est admise). \square

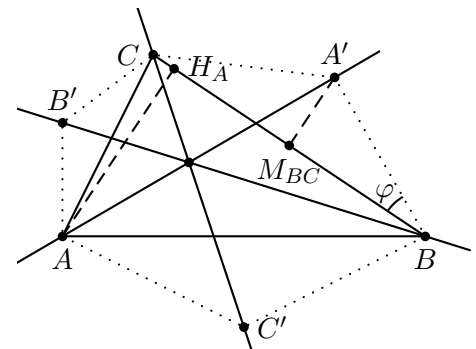


Exemples

- Le conjugué isogonal du centre de gravité $G[1; 1; 1]$ est $\bar{G}[a^2; b^2; c^2]$, appelé *point de Lemoine*. C'est l'intersection des "symédiannes", droites symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures. On peut aussi écrire $\bar{G}[a \sin(\alpha); b \sin(\beta); c \sin(\gamma)]$ ou $\bar{G}[(\sin \alpha)^2; (\sin \beta)^2; (\sin \gamma)^2]$.
- Le centre du cercle inscrit est son propre conjugué isogonal.
- L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont conjugués isogonaux réciproques.
- La conjugaison isogonale est une involution : $\bar{\bar{P}} = P$ si P n'est ni sur le cercle circonscrit ni aligné avec deux sommets du triangle.

7 Hyperbole de Kiepert

On construit trois triangles isocèles externes (ou internes) semblables sur les côtés d'un triangle ABC et on note A' (resp. B' et C') le nouveau sommet du triangle isocèle de base BC (resp. CA et AB). Nous allons montrer que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes.



Preuve. On pose $\lambda = \tan(\varphi)$ et on considère le point M_{BC} , milieu du côté BC , ainsi que le point H_A , pied de la hauteur issue du sommet A . Les vecteurs $\overrightarrow{M_{BC}A'}$ et $\overrightarrow{AH_A}$ sont colinéaires, de normes

respectives $\frac{\lambda a}{2}$ et $b \sin(\gamma)$. On en déduit que

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM_{BC}} + \frac{\lambda a}{2b \sin \gamma} \overrightarrow{AH_A} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{\lambda a}{2b \sin \gamma} (\overrightarrow{OH_A} - \overrightarrow{OA}),$$

donc en passant aux composantes :

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda a}{2b \sin \gamma} \left(\frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ b \cos \gamma \\ c \cos \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2b \sin \gamma} \begin{bmatrix} -\lambda a \\ b(\sin \gamma + \lambda \cos \gamma) \\ b \sin \gamma + \lambda c \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Comme $b \sin \gamma = c \sin \beta$ selon le théorème du sinus, on trouve finalement $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2b \sin \gamma} \begin{bmatrix} -\lambda a \\ b m_\lambda(\gamma) \\ c m_\lambda(\beta) \end{bmatrix}$

avec la notation $m_\lambda(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$. La droite AA' admet alors l'équation barycentrique $c m_\lambda(\beta)y = b m_\lambda(\gamma)z$. Par permutation circulaire, on obtient l'équation $a m_\lambda(\gamma)z = c m_\lambda(\alpha)y$ pour la droite (BB') et $b m_\lambda(\alpha)x = a m_\lambda(\beta)z$ pour la droite (CC') . On vérifie facilement que ces trois droites se coupent en $P_\lambda[a m_\lambda(\beta) m_\lambda(\gamma); b m_\lambda(\alpha) m_\lambda(\gamma); c m_\lambda(\alpha) m_\lambda(\beta)]$. \square

Remarques

- Si le triangle ABC est équilatéral, tous les points P_λ coïncident avec le centre de gravité.
- Si le triangle est isocèle non équilatéral, les points P_λ constituent l'axe de symétrie du triangle privé de son orthocentre.
- Si le triangle est scalène, l'ensemble des points P_λ contient les sommets A , B et C (considérer $\varphi \in \{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$), le centre de gravité G ($\varphi = 0^\circ$), les points de Vecten ($\varphi = \pm 45^\circ$) et de Fermat ($\varphi = \pm 60^\circ$). L'orthocentre est obtenu comme cas limite lorsque $\lambda \rightarrow \pm\infty$.
- Le conjugué isogonal de P_λ est $Q_\lambda[a m_\lambda(\alpha); b m_\lambda(\beta); c m_\lambda(\gamma)]$, il est aligné avec le point de Lemoine $L[a \sin \alpha; b \sin \beta; c \sin \gamma]$ et le centre du cercle circonscrit $\Omega[a \cos \alpha; b \cos \beta; c \cos \gamma]$ (ces points sont différents si le triangle n'est pas équilatéral). La droite $(L\Omega)$, appelée *axe de Brocard*, a l'équation $bc \sin(\beta - \gamma)x + ca \sin(\gamma - \alpha)y + ab \sin(\alpha - \beta)z = 0$. Comme $Q_\lambda[a^2 yz; b^2 xz; c^2 xy]$ la vérifie, $P_\lambda[x; y; z]$ vérifie $a \sin(\beta - \gamma)yz + b \sin(\gamma - \alpha)zx + c \sin(\alpha - \beta)xy = 0$. Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère (si le triangle n'est pas isocèle) découverte par Ludwig Kiepert en 1869.

Exemple

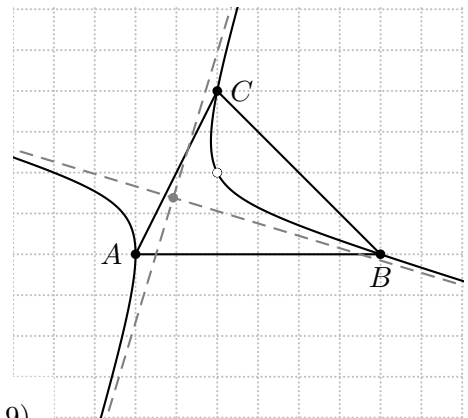
Dans l'illustration ci-contre, on a les sommets $A(0;0)$, $B(6;0)$ et $C(2;4)$. On peut calculer la longueur des côtés ($a = 4\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{5}$ et $c = 6$), ainsi que le sinus et le cosinus de chaque angle. Pour résumer, on trouve

$$m_\lambda(\alpha) = \frac{2 + \lambda}{\sqrt{5}}, \quad m_\lambda(\beta) = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{2}}, \quad m_\lambda(\gamma) = \frac{3 + \lambda}{\sqrt{10}}.$$

On peut ensuite établir

$$a m_\lambda(\beta) m_\lambda(\gamma) + b m_\lambda(\alpha) m_\lambda(\gamma) + c m_\lambda(\alpha) m_\lambda(\beta) = \frac{4(3\lambda^2 + 11\lambda + 9)}{\sqrt{10}}$$

et les équations paramétriques de l'hyperbole de Kiepert : $x = \frac{6(2 + \lambda)^2}{3\lambda^2 + 11\lambda + 9}$, $y = \frac{6(2 + \lambda)(1 + \lambda)}{3\lambda^2 + 11\lambda + 9}$.



En considérant la limite lorsque $\lambda \rightarrow \pm\infty$, on trouve l'orthocentre $H(2;2)$. Les asymptotes ont des équations cartésiennes $y = mx + h$ avec $m = \lim(y(\lambda)/x(\lambda))$ et $h = \lim(y(\lambda) - mx(\lambda))$, les limites étant prises lorsque λ tend vers une solution de l'équation $3\lambda^2 + 11\lambda + 9 = 0$. On trouve $y = \frac{3+\sqrt{13}}{2}x - \frac{6\sqrt{13}}{13}$ et $y = \frac{3-\sqrt{13}}{2}x + \frac{6\sqrt{13}}{13}$. Ces asymptotes se coupent au point $S(\frac{12}{13}; \frac{18}{13})$.

En translatant le point $(x(\lambda); y(\lambda))$ selon le vecteur \overrightarrow{SO} et en le faisant tourner autour de l'origine selon l'angle $\varphi = -\arctan(\frac{3-\sqrt{13}}{2})$, on obtient un point $(\tilde{x}(\lambda); \tilde{y}(\lambda))$ tel que $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \frac{36}{13\sqrt{13}}$. Ceci montre que les points $(\tilde{x}(\lambda); \tilde{y}(\lambda))$, et donc $(x(\lambda); y(\lambda))$, se trouvent bien sur une hyperbole équilatère.

Mathematica

Les calculs étant assez fastidieux, on peut traiter tout autre exemple avec le code Mathematica suivant.

Sommets A , B et C du triangle

```
{sA, sB, sC} = {{0, 0}, {2, 4}, {6, 0}};
```

Longueurs des côtés du triangle ABC

```
{a, b, c} = Simplify[Map[Norm, {sB - sC, sC - sA, sA - sB}]]
```

Sinus et cosinus de chaque angle x , synthétisés par $mx = \sin(x) + t \cos(x)$

```
cosa = (b^2 + c^2 - a^2) / (2 * b * c);
cosb = (c^2 + a^2 - b^2) / (2 * c * a);
cosc = (a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b);
{sina, sinb, sinc} = Sqrt[1 - {cosa, cosb, cosc}^2];
{ma, mb, mc} = Simplify[{sina, sinb, sinc} + t {cosa, cosb, cosc}]
```

Equation et dessin de l'hyperbole

```
somme = Simplify[a * mb * mc + b * ma * mc + c * ma * mb];
{x[t_], y[t_]} = Simplify[(a*mb*mc*sA + b*ma*mc*sB + c*ma*mb*sC) / somme]
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -10, 10}, PlotRange -> {-5, 5}]
```

Asymptotes (d'équations cartésiennes $y = m_1x + h_1$ et $y = m_2x + h_2$)

```
{t1, t2} = Simplify[Flatten[t /. Solve[somme == 0, t]]];
{m1, m2} = Limit[y[t]/x[t], {t -> t1, t -> t2}];
h1 = Limit[y[t] - m1 * x[t], t -> t1];
h2 = Limit[y[t] - m2 * x[t], t -> t2];
FullSimplify[{m1 * x + h1, m2 * x + h2}]
```

Centre de symétrie $(x_s; y_s)$

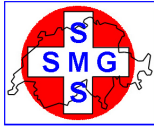
```
{xs, ys} = Simplify[{h2 - h1, m1 * h2 - m2 * h1} / (m1 - m2)]
```

Hyperbole rectifiée (recentrée et tournée pour ramener la deuxième asymptote sur l'axe Ox)

```
angle = -ArcTan[m2];
xn[t_] = Simplify[Cos[angle] (x[t] - xs) - Sin[angle] (y[t] - ys)]
yn[t_] = Simplify[Sin[angle] (x[t] - xs) + Cos[angle] (y[t] - ys)]
```

Preuve que la courbe (rectifiée) est bien sur une hyperbole (si le résultat est une constante)

```
FullSimplify[xn[t] * yn[t]]
```



Schweizerische Mathematische Gesellschaft Société Mathématique Suisse

Annonce du Prix “Matura Awards 2020” de la Société mathématique Suisse

Tous les deux ans depuis 2010, la Société mathématique suisse (SMS) attribue un ou plusieurs prix à des collégiens/gymnasiens/lycéens qui ont réalisé un travail de maturité exceptionnel ou un projet dans le cadre du concours «La science appelle les jeunes».

La SMS invite les jeunes intéressés à soumettre leur candidature pour les Matura Awards 2020. Les travaux qui ont été complétés dans la dernière ou l'année scolaire actuelle et qui sont basés en mathématiques ou interdisciplinaires avec une proportion substantielle de mathématiques sont autorisés.

La cérémonie de remise des prix aura lieu le 9 septembre 2020 à la Neue Kantonsschule à Aarau lors de la 31ème Journée suisse des mathématiques et de l'enseignement (“31. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht”).

Les élèves qui veulent postuler envoient leur travail sous forme de fichier PDF (ou en deux exemplaires imprimés) avec leur adresse et un court CV jusqu'au 30 juin 2020 à

Alain Valette
alain.valette@unine.ch
Institut de Mathématiques - Unimail
Université de Neuchâtel
11 Rue Emile Argand
2000 Neuchâtel

Le jury est composé par le conseil d'administration de SMS et se compose de membres de l'université. Il est présidé par le vice-président de SMS.

Les enseignants de mathématiques du secondaire sont priés de transmettre cette information aux candidats.

Neuchâtel, le 2 janvier 2020

Alain Valette
Vice-président de la SMS

Les métaheuristiques en cryptanalyse

Didier Müller, Lycée cantonal de Porrentruy, didier.muller@divlyc.ch

Une méthode développée depuis une dizaine d’années pour décrypter des textes chiffrés consiste à rechercher la clef de déchiffrement en utilisant ce qu’on appelle des *métaheuristiques* ([1], [4], [6]). Ce sont des méthodes d’optimisation qui sont utilisées quand on ne connaît pas de méthodes plus efficaces. Parmi les plus connues, citons le *hill climbing*, le *recuit simulé*, et la *recherche avec tabous*.

Décryptement d'une substitution monoalphabétique

Une *substitution monoalphabétique* est une méthode de chiffrement qui consiste simplement à remplacer une lettre par une autre.

La *clef* sera une suite de 26 lettres différentes, qui représentera la *table de déchiffrement*. Une clef pourrait être **QWERTZUIOPASDFGHJKLXCVBNM** correspondant à cette table de déchiffrement :

Chiffré	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Clair	q	w	e	r	t	z	u	i	o	p	a	s	d	f	g	h	j	k	l	y	x	c	v	b	n	m

Il faut maintenant définir un *score* qui nous donnera une estimation de la qualité du décryptement. Autrement dit, est-ce que le texte déchiffré est du français ? La tâche est facile pour un humain, mais plus subtile pour un ordinateur ! Plusieurs possibilités s’offrent à nous. Toutes sont basées sur les caractéristiques statistiques de la langue : fréquences des lettres, des bigrammes, des trigrammes, des tétragrammes, etc.

La méthode qui fonctionne le mieux, selon les spécialistes, est basée sur les tétragrammes (suites de quatre lettres, aussi appelées *quadrigrammes*). Une description complète et très pédagogique est donnée dans [3]. On y trouve notamment le fichier des apparitions des tétragrammes en français et dans d’autres langues européennes.

J’ai établi mes propres statistiques sur un corpus de plus de 10 millions de lettres : 26 textes variés écrits entre 1831 et 2017 (détails dans [5]). La liste triée, contenant 68’183 tétragrammes différents, commence ainsi :

	MENT	30207	
	ELLE	28622	
	QUEL	23983	
	EMEN	22824	
tétragrammes	TION	20768	nombres d’apparitions
	DANS	20276	
	IENT	19220	
	ESDE	18171	
	DELA	17248	
	OMME	16947	

Il faudra d’abord modifier ce dictionnaire en remplaçant le nombre d’apparitions en fréquences. Cela se fait très simplement en divisant chaque nombre par le nombre total d’apparitions de tétragrammes.

Ce nouveau dictionnaire permet d’évaluer le score d’un texte en faisant le produit des fréquences de ses

tétragrammes. Si un tétragramme n'est pas dans le dictionnaire, on lui donne la fréquence 10^{-10} (cette valeur semble donner de meilleurs résultats que 10^{-100} proposée dans [3]).

Mais il y a un souci informatique dû à la précision des ordinateurs : quand un nombre est vraiment très proche de 0, l'ordinateur mettra effectivement la valeur 0. Comme toutes les fréquences seront comprises entre 0 et 1, le produit donnera presque toujours 0 si le texte est long. Pour pallier ce problème, on va remplacer notre produit par la somme des logarithmes des fréquences des tétragrammes, et comme les logarithmes sont négatifs, on prendra comme score l'opposé de cette somme :

$$\text{score} = - \sum_{i=0}^{n-4} \log(\text{fréquence}(c_i c_{i+1} c_{i+2} c_{i+3}))$$

Cette idée de somme de logarithmes a été proposée par **Abraham Sinkov** en 1966 déjà (voir [2, pp. 76-77]).

Pour des textes de même longueur, du fait du changement de signe, c'est celui qui aura le plus petit score qui devrait être « le plus » français. Vérifions :

$$\text{score}(\text{"KFQTDTEGRNWKNIQ"}) = 94.79783559030287$$

$$\text{score}(\text{"CESTDUFRCBNCBIS"}) = 77.57382632660952$$

$$\text{score}(\text{"CESTDURFANCAIS"}) = 50.39139100671383$$

$$\text{score}(\text{"CESTDUFANCAIS"}) = 45.97301718417951$$

Algorithme de décryptement

L'idée générale pour trouver la clef de déchiffrement est la suivante :

1. partir d'une clef aléatoire ;
2. utiliser la clef pour déchiffrer le cryptogramme ;
3. calculer le score du texte obtenu ;
4. si ce score est meilleur que le score précédent, prendre cette nouvelle clef comme clef courante, sinon garder la clef précédente ;
5. modifier légèrement la clef courante (voir ci-dessous) ;
6. retourner en 2 tant qu'on n'a pas trouvé la bonne clef.

Il peut arriver, et c'est même assez fréquent, que l'algorithme « se coince » : impossible de trouver une meilleure clef, alors que pourtant la vraie clef n'a pas encore été découverte. Dans ce cas, il faut parfois accepter de prendre une clef moins bonne en terme de score, afin de repartir de plus belle.

Prenons une image. Vous voulez monter au sommet de l'Everest. Vous commencez votre ascension au Népal. Arrivé au sommet d'une montagne, vous constatez qu'il y en a d'autres plus élevées autour de vous ! Vous serez donc obligé de redescendre avant d'escalader une autre montagne, en espérant que ce soit bien l'Everest...

Modifications de la clef

Il faut maintenant définir comment modifier une clef pour en obtenir une nouvelle (point 5 de l'algorithme). Nous allons utiliser deux méthodes.

La première consistera à **échanger deux lettres** au hasard :

$$\underline{Q}\underline{W}\underline{E}\underline{R}\underline{T}\underline{Z}\underline{U}\underline{I}\underline{O}\underline{P}\underline{A}\underline{S}\underline{D}\underline{F}\underline{G}\underline{H}\underline{J}\underline{K}\underline{L}\underline{X}\underline{C}\underline{V}\underline{B}\underline{N}\underline{M} \rightarrow \underline{Q}\underline{G}\underline{E}\underline{R}\underline{T}\underline{Z}\underline{U}\underline{I}\underline{O}\underline{P}\underline{A}\underline{S}\underline{D}\underline{F}\underline{W}\underline{H}\underline{J}\underline{K}\underline{L}\underline{X}\underline{C}\underline{V}\underline{B}\underline{N}\underline{M}.$$

La seconde sera de **déplacer une lettre** dans la clef :

$$\underline{Q}\underline{W}\underline{E}\underline{R}\underline{T}\underline{Z}\underline{U}\underline{I}\underline{O}\underline{P}\underline{A}\underline{S}\underline{D}\underline{F}\underline{G}\underline{H}\underline{J}\underline{K}\underline{L}\underline{X}\underline{C}\underline{V}\underline{B}\underline{N}\underline{M} \rightarrow \underline{Q}\underline{E}\underline{R}\underline{T}\underline{Z}\underline{U}\underline{I}\underline{O}\underline{W}\underline{P}\underline{A}\underline{S}\underline{D}\underline{F}\underline{G}\underline{H}\underline{J}\underline{K}\underline{L}\underline{X}\underline{C}\underline{V}\underline{B}\underline{N}\underline{M}.$$

Une clef C_2 obtenue à partir de C_1 par une de ces deux modifications sera appelée *voisine* de C_1 .

Recuit simulé

Essayons un algorithme de *recuit simulé*. On progresse vers la solution en passant d'une clef à l'une de ses voisines, cette dernière étant tirée au sort. De deux choses l'une : soit la nouvelle clef est meilleure, et on la garde comme clef courante, soit elle est moins bonne, et on ne la gardera qu'avec une certaine probabilité qui diminuera avec le temps. Ceci dans le but d'éviter de se coincer dans un minimum local.

1. Choisir une « température » de départ T .
2. Générer une clef aléatoire. Appelons-la C_1 .
3. Parmi toutes les clefs voisines de C_1 , en prendre une au hasard et la nommer C_2 .
4. Calculer $\Delta = \text{score}(C_2) - \text{score}(C_1)$
5. Si $\Delta \leq 0$, $C_1 \leftarrow C_2$; le cas échéant, mettre à jour le meilleur score et la meilleure clef. Aller à 8.
6. Générer un nombre réel aléatoire r dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
7. Si $r < \exp(-\Delta/T)$, $C_1 \leftarrow C_2$.
8. Diminuer T toutes les n itérations.
9. Retourner à 3, tant qu'on n'a pas décidé de s'arrêter.

Le terme *température* du point 1 fait référence au procédé sidérurgique du recuit (d'où le nom de la méthode) : on chauffe fortement un métal, puis on fait descendre la température par paliers.

Dans le recuit simulé, la décroissance de la température est un paramètre important avec lequel il faut jouer. Si la température décroît rapidement, on arrivera vite à un bon résultat, mais on risque de se coincer plus souvent dans un minimum local. En effet, quand T diminue, $\exp(-\Delta/T)$ diminue aussi, et on retiendra moins volontiers une plus mauvaise clef. On fait généralement décroître la température par paliers : on laisse la température stable un certain nombre d'itérations (encore un paramètre délicat à régler), puis on multiplie T par un coefficient $0 < c < 1$ (dernier paramètre à choisir). Remarquons encore que plus Δ est grand, plus la probabilité d'acceptation d'une mauvaise clef est faible.

Recherche avec tabous

Un autre moyen de sortir des minima locaux est d'utiliser une *liste de tabous* : on garde en mémoire les dernières clefs générées, afin de ne pas les réutiliser, ce qui provoquerait des allers-retours incessants sans progresser vers la clef cherchée. Si la liste est suffisamment longue, cela évite les blocages. La longueur de la liste des tabous est d'ailleurs le seul paramètre avec lequel on peut jouer.

1. Générer une clef aléatoire.
2. Parmi toutes les clefs voisines, prendre celle qui donne le meilleur score et qui n'est pas dans la liste des tabous.
3. Si la liste des tabous est pleine, retirer de cette file la clef la plus ancienne.
4. Mettre la nouvelle clef en queue de la liste des tabous.
5. Retourner à 2, tant qu'on n'a pas décidé de s'arrêter.

Il est à noter qu'avec cet algorithme, le hasard n'intervient qu'au tout début, quand on choisit une clef aléatoire. De plus, la solution ne va pas forcément s'améliorer à chaque itération, mais, à la longue, on se rapprochera d'un score minimum.

Quelques essais

Pour tester ces deux métaheuristiques, six textes chiffrés ont été utilisés :

- un extrait du texte sur Leonhard Euler tiré de Wikipédia (681 lettres) ;

- le poème « L'albatros » de Baudelaire (565 lettres) ;
- le début de « 1984 », nouvelle traduction française, éditions de la rue Dorion (4331 lettres) ;
- un extrait de « La disparition » de Georges Perec (834 lettres). Il n'y a pas de E dans ce texte ;
- le début de « Salammbô » de Gustave Flaubert (255 lettres). Ce sera le texte le plus difficile à décrypter, car il est court et contient des noms propres comme *Mégara*, *Carthage* et *Hamilcar* ;
- la fable « Le cheval et l'âne » de Jean de la Fontaine (496 lettres).

Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus. La clef correspond à la deuxième ligne de la table de déchiffrement présentée au début de cet article. Les erreurs sont soulignées. On donne aussi le score du texte original et les scores des textes déchiffrés.

	Meilleure clef trouvée avec le recuit Mêmes paramètres que dans [3, In [28]] 8000 itérations par palier Coefficient de refroidissement $c = 0.8$	Avec la recherche avec tabous 100 itérations, longueur de la liste des tabous « infinie »
Euler score du clair = 2733.1865257467216	PBEVDHKMNQTA <u>Z</u> WG <u>J</u> CSFIYLORUX score = 2729.173193215509 1.5 minute La bonne clef était : PBEVDH?MNQTA??GZCSFIYLORUX ? = J, K ou W	PBEVDHKMNQTA <u>Z</u> WG <u>J</u> CSFIYLORUX score = 2729.173193215509 0.7 minute J, K et W n'apparaissent pas dans le texte clair
L'albatros score du clair = 2271.81202702689	GSAWOBEDYHKMNPRTVJQXUZCFIL score = 2271.81202702689 1.3 minute La bonne clef était : GSA?OBEDYH?MNPRTV?QXUZCFIL ? = J, K ou W	GSAWOBEDYHKMNPRTV <u>Z</u> QXU <u>J</u> CFIL score = 2270.1056606881075 0.7 minute J, K et W n'apparaissent pas dans le texte clair
1984 score du clair = 17219.781643225346	UBODGMZFCHJEAILNS <u>K</u> PQ <u>W</u> YRTVX score = 17217.90039927846 11.2 minutes La bonne clef était : UBODGMZFCHJEAILNSWPQKYRTVX	UBODGMZFCHJEAILNS <u>K</u> PQ <u>W</u> YRTVX score = 17217.90039927846 5.2 minutes
La disparition score du clair = 3644.1768594249875	QBMSCDFUHHJOLYKWN <u>E</u> I <u>Z</u> PRTVX <u>G</u> score = 3625.6575229438167 2 minutes La bonne clef était : QBMSCDFUHHJOLY??NGI?PRTVXZ ? = E, K ou W	QBMSCDFUHGOLYK <u>J</u> NEIWPRTVXZ score = 3619.837063624107 0.9 minute E, K et W n'apparaissent pas dans le texte clair
Salammbô score du clair = 1012.8072340784356	MZBEQSAHKNPURTVXWYGJDOCFIL score = 1012.8072340784356 0.6 minute La bonne clef était : M?BEQSAH?NPURTVX?YGJDOCFIL ? = K, W ou Z	MWBEQSAHKNPURTVXZYGJDOCFIL score = 1012.8072340784356 0.25 minute K, W et Z n'apparaissent pas dans le clair
Le cheval et l'âne score du clair = 1991.3634939904973	RBIFEJMLPSVAZXCGYNQUTOWKDH score = 1991.3634939904973 1.15 minute La bonne clef était : RBIFEJMLPSVA?XCG?NQUTO??DH ? = K, W, Y ou Z	RBIFEJMLPSVAKXCGZYNQUTOYWDH score = 1991.3634939904973 0.5 minute K, W, Y et Z n'apparaissent pas dans le clair

Dans ce tableau figurent les résultats du premier essai. Vu qu'il y a une part de hasard, d'autres tentatives

donneront des résultats légèrement différents, parfois meilleurs, parfois moins bons. Il est à noter que, même avec des clefs légèrement inexactes, le décryptement partiel est suffisamment bon pour comprendre le texte clair.

Il s'avère que la recherche avec tabous trouve souvent sa meilleure clef bien avant le nombre maximum d'itérations (une vingtaine d'itérations suffisent en général). Clairement, cette métaheuristique est la plus rapide des deux.

Nous voyons quelque chose de surprenant : parfois, le score du texte décrypté est plus petit (et donc meilleur) que le texte original ! Et pourtant le texte décrypté comporte des erreurs... Cela nous indique que notre score est une bonne mesure, puisque les résultats sont tout à fait acceptables, mais pas parfaite. Elle pourrait probablement être améliorée pour éviter ce souci.

Est-ce que l'usage de polygrammes plus longs (5, 6 caractères ou plus) donnerait de meilleurs résultats ? **Jean-Louis Morel**, l'auteur de [3], a essayé d'utiliser des hexagrammes. Il a obtenu de meilleurs résultats pour les cryptogrammes courts, mais pas toujours. Et pour les cryptogrammes longs, on ne gagne rien. Le problème est que le corpus doit être gigantesque ; en effet, en analysant notre corpus de 10 millions de lettres, on n'a rencontré que 0,3 % de tous les hexagrammes théoriquement possibles !

Pour confirmer ces résultats, tous les tests ont été refaits avec les dictionnaires de tétragrammes de Jean-Louis Morel [3]. Il n'y a pas de différences notables.

Conclusion

Ces métaheuristiques sont clairement très performantes pour décrypter des substitutions monoalphabétiques. On peut aussi imaginer des variantes. Dans sa thèse [1, pp. 40-41], **George Lasry** propose une méthode qui est un peu un mixte entre le recuit simulé standard et la recherche avec tabous : il explore en effet tout le voisinage de la clef (comme la recherche avec tabous), mais utilise la technique du recuit pour sortir d'un minimum local.

Qu'en est-il des autres types de chiffrement classiques ? Toujours dans [1], George Lasry a testé ses métaheuristiques pour décrypter des transpositions rectangulaires, le chiffre allemand ADFGVX, la machine M-209 et Chaocipher. Cette méthodologie est applicable à tous ces systèmes et donne d'excellents résultats. D'autres l'ont utilisée pour décrypter des chiffres de Playfair. Nul doute que cette approche de la cryptanalyse a un bel avenir devant elle.

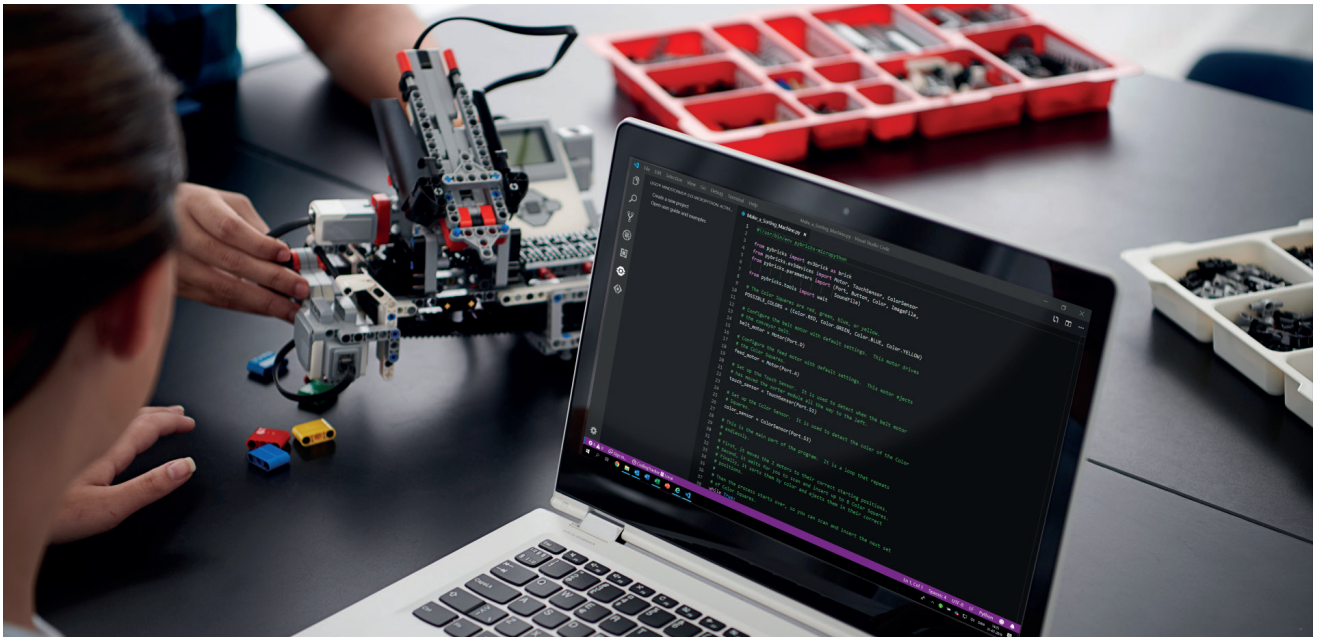
Références

- [1] Lasry George, **A Methodology for the Cryptanalysis of Classical Ciphers with Search Metaheuristics**, Kassel University Press, 2018. Livre aussi disponible au format PDF : <http://www.uni-kassel.de/upress/online/OpenAccess/978-3-7376-0458-1.OpenAccess.pdf>
- [2] Sinkov Abraham, **Elementary Cryptanalysis : A mathematical approach**, Mathematical Association of America, 1966. Livre aussi disponible au format PDF : <http://index-of.es/Varios-2/Elementary%20Cryptanalysis%20A%20Mathemathical%20Approach.pdf>
- [3] Morel Jean-Louis (alias Rossignol), **Décrypter une substitution monoalphabétique**, 2015, http://bribes.org/crypto/substitution_mono.html
- [4] Schmech Klaus, **Breaking Historical Ciphers with Modern Algorithms** - Klaus Schmech at 44CON 2017, <https://www.youtube.com/watch?v=r16zWEzfCTQ>
- [5] Müller Didier, **Analyse des fréquences en français**, janvier 2020, <http://www.nymphomath.ch/crypto/stat/francais.html>
- [6] Chopard Bastien, Tomassini Marco, **Métaheuristiques**, Presses universitaires de Perpignan, 2017

DIE NEUEN LEGO EDUCATION-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/lego-education/

EV3 mit Python kompatibel



Kombinieren Sie LEGO® MINDSTORMS® Education EV3 mit der Programmiersprache Python, um den Robotik- oder MINT-Unterricht noch abwechslungsreicher und zukunftsorientierter zu gestalten. Mit EV3 MicroPython können Schülerinnen und Schüler der weiterführenden Schulen das Programmieren mit Python erlernen und diese Kenntnisse später direkt für ihre

berufliche Karriere nutzen. Um den Einstieg in MicroPython zu erleichtern, hat LEGO Education eine umfassende Dokumentation und Beispielprogramme erstellt.

Installation und EV3 MicroPython-Dokumentation unter: www.educatec.ch/python-ev3

EV3 Classroom App

Die App zum Programmieren der LEGO MINDSTORMS Education EV3 Roboter und die EV3 Lab Software wurde seit neuestem durch eine neue App ersetzt:

LEGO® MINDSTORMS® Education EV3 Classroom

Bei EV3 Classroom kommt eine Programmiersprache basierend auf Scratch zum Einsatz und lässt sich super im MINT-Unterricht einsetzen. Die EV3 Classroom App ist kompatibel mit MacOS und auf Englisch. Weitere Betriebssysteme, Sprachen und Features werden im Juni veröffentlicht.

Kostenlos installieren unter:

www.legoeducation.com/downloads



Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter www.educatec.ch
Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an contact@educatec.ch



EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch



Einblicke in das Projekt «Naturwissenschaft ist (auch) Frauensache!»

Prof. Dr. Elena Makarova, Institut für Bildungswissenschaften, Universität Basel,
elena.makarova@unibas.ch

Hintergrund zum Projekt

Junge Frauen entscheiden sich viel seltener als junge Männer für Studienrichtungen und Berufe im MINT-Bereich. In diesem Zusammenhang wird gefordert, dass der Unterricht in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern für Schülerinnen interessanter gestaltet werden sollte, „indem Geschlechterstereotypen aus den Lehrbüchern entfernt, weibliche Rollenmodelle gefördert und Lehrmittel eingesetzt werden, die Mädchen ansprechen“ (OECD, 2013, S. 80). Geschlechterstereotype hindern Mädchen daran, ihre Fähigkeiten in Mathematik und Naturwissenschaften adäquat einzuschätzen, womit ihnen nicht nur ein wesentlicher Themenbereich in der Bildung vorenthalten bleibt, sondern auch der Zugang zu prestigereichen Berufen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften erschwert wird. Daher stellt der Abbau von Geschlechterstereotypen und diskriminierenden Darstellungen von weiblichen und männlichen Personen in Schulbüchern eine Aufgabe von hoher Dringlichkeit dar. Vor dem Hintergrund der Geschlechtersegregation im MINT-Bereich fokussierte das Projekt «*Naturwissenschaft ist (auch) Frauensache!*» die Geschlechtergerechtigkeit von Lehrmitteln in naturwissenschaftlichen Fächern auf der Sekundarstufe II. Das Projekt wurde durch das Eidgenössische Büro für die Gleichstellung von Frau und Mann (EBG) mit Finanzhilfen nach dem Gleichstellungsgesetz unterstützt. Es hatte zum Ziel, geschlechterstereotype und diskriminierende Darstellungen von weiblichen und männlichen Personen in Lehrmitteln aufzuheben.

Gendergerechtigkeit in Lehrmitteln

Analyse und Überarbeitung des Lehrmittels *Physik für Mittelschulen*

Im Projekt wurde der Kriterienkatalog GESBI (Gender Equality School Book Index) entwickelt, in dem formale, inhaltliche sowie methodisch-didaktische Kriterien eines geschlechtergerechten Lehrmittels für den naturwissenschaftlichen Unterricht berücksichtigt wurden (Makarova & Wenger, 2019a):



- Fachinhalte zeigen Frauen und Männer, Mädchen und Knaben in zeitgemässen, vielfältigen Rollen;
- Fachinhalte orientieren sich an den sozialisationsbezogenen Vorerfahrungen und Interessen beider/aller Geschlechter;
- In Sprache, Texten und Bildern werden die Geschlechter gleichwertig angesprochen.

Diese Kriterien waren massgebend für die qualitative Inhaltsanalyse des Lehrmittels *Physik für Mittelschulen* (in der 2. Auflage von 2014). Die Ergebnisse dieser Inhaltsanalyse (Wenger, Lindner & Makarova, 2019a) flossen in die Überarbeitung des Lehrmittels ein, das in der revidierten und erweiterten Auflage erschienen ist: Kammer, Hans & Mgeladze, Irma (2019). *Physik für Mittelschulen* (3., überarbeitete und erweiterte Auflage). Bern: hep verlag.

Handreichung und Checkliste für Lehrpersonen



Die Überarbeitung des Lehrmittels wird in der *Handreichung für Lehrpersonen* präsentiert (Makarova & Wenger, 2019a). Die Handreichung stellt die Relevanz der drei GESBI-Kriterien (genderechte Sprache, gendersensible Vorbilder und vielfältige Kontexte) anhand von Ergebnissen der empirischen Forschung dar und beschreibt die Umsetzung dieser Kriterien bei der Überarbeitung des Lehrmittels *Physik für Mittelschulen*. Im Weiteren beinhaltet die Handreichung eine *GESBI-Checkliste* (Makarova & Wenger, 2019b), die Lehrpersonen zur Überprüfung der Gendergerechtigkeit in eigenen Unterrichtsmaterialien (Lehrmittel, Skripts, Arbeitsblätter o. ä.) dienen kann.

Die Handreichung und die Checkliste können auf der Projekthomepage abgerufen werden: www.elenamakarova.ch/projects/science-is-also-a-woman-s-thing/

Begleitende Interviewstudie

Die Überarbeitung des Lehrmittels *Physik für Mittelschulen* wurde mit einer qualitativen Interviewstudie begleitet. Die Interviewstudie analysierte die Wahrnehmung und Interpretation der Gendergerechtigkeit in Physiklehrmitteln auf der Sekundarstufe II aus Sicht der Lehrpersonen und der Schülerinnen- und Schülerperspektive. Die Ergebnisse der Studie geben u. a. Einblicke, inwiefern sich das Vorhandensein bzw. die Abwesenheit von gendersensiblen Vorbildern auf die fachbezogene Motivation und das Interesse der Schülerinnen und Schüler, aber auch auf ihre Identifikation mit dem Fachbereich, auswirken (Wenger, Lindner & Makarova, 2019b).

Literatur

- Kammer, H. & Mgeladze, I. (2019). *Physik für Mittelschulen* (3., überarbeitete und erweiterte Auflage). Bern: hep verlag.
- Makarova, E. & Wenger, N. (2019b). *GESBI-Checkliste zur Überprüfung der Gendergerechtigkeit in naturwissenschaftlichen Lehrmitteln der Sekundarstufe II*. Basel: Universität Basel, Institut für Bildungswissenschaften.
- Makarova, E. & Wenger, N. (2019a). *Gendergerechtigkeit in Lehrmitteln für naturwissenschaftlichen Unterricht: Handreichung für Lehrpersonen*. Basel: Universität Basel, Institut für Bildungswissenschaften.
- OECD (2013). *Gleichstellung der Geschlechter: Zeit zu handeln*. Paris: OECD Publishing.
- Wenger, N., Lindner, J. & Makarova, E. (2019b). *Geschlechtergerechtigkeit von Lehrmitteln auf der Sekundarstufe II. Forschungsbericht: Dokumentation und erste Ergebnisse der Interviewstudie*. Basel: Universität Basel, Institut für Bildungswissenschaften.
- Wenger, N., Lindner, J. & Makarova, E. (2019a). *Geschlechtergerechtigkeit von Lehrmitteln auf der Sekundarstufe II. Forschungsbericht: Ergebnisse der Analyse des Lehrmittels Physik für Mittelschulen*. Basel: Universität Basel, Institut für Bildungswissenschaften.

Experimentieren an der EPFL

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Vom 14.- 16. Februar trafen sich 28 physikbegeisterte Jugendliche aus der ganzen Schweiz in Lausanne. Ihre Mission: Die gemeinsame Vorbereitung auf das Finale der Physik-Olympiade. Ein Wochenende lang wurde an der EPFL gewogen, gemessen und gerechnet. Was haben die jungen Physikerinnen und Physiker dabei gelernt? Und was motiviert sie überhaupt, ihre Freizeit mit Physik zu verbringen? Wir haben das Training besucht und uns mit den Teilnehmenden über diese Fragen unterhalten.

Qualitativ hochstehende Vorbereitung

Alexandra Smirnova und Edouard Sommer sitzen vor einer schrägen Aluminiumplatte. "3...2...1...los!": Ein dritter Teilnehmer lässt einen Magneten fallen, der an der Platte entlang gleitet. Alexandra nimmt die Zeit: neun Sekunden. Edward notiert sie in einer Tabelle. Die Messung muss zehnmal wiederholt und gemittelt werden. Hier geht es um den Magnetismus und die Leitfähigkeit von Metallen. Dies mag für den Durchschnittsmenschen noch relativ zugänglich erscheinen. Aber wir hören auch exotischere Ausdrücke wie "potenzielle Energie" oder "Formkoeffizient". Davon versteht man schon nicht mehr so viel. Aber die jungen Leute bewältigen diese Konzepte mit Leichtigkeit. Um ihre Aufgabe zu lösen, müssen sie nur noch herausfinden, wie sie die Elemente kombinieren können.

Es ist Samstag der 15. Februar an der EPFL in Lausanne. Hier bereitet man sich auf das Finale der Physik-Olympiade vor. Das Vorbereitungs-Wochenende wird in Zusammenarbeit mit der Sektion Physik und dem Dienst für Bildungsförderung der EPFL organisiert. Etwa zwanzig junge Menschen nutzten die Gelegenheit. Darunter: Finalistinnen und Finalisten der Physik-Olympiade, die sich unter 800 Teilnehmenden in der ersten Runde und dann unter etwa hundert in der zweiten Runde qualifiziert haben. Auch andere junge Menschen sind anwesend. Sie haben es zwar nicht in die Finalrunde geschafft, möchten aber trotzdem mehr lernen. In einem Arbeitsraum versammelt, arbeiten sie in kleinen Gruppen. Sie widmen sich ungefähr zehn Experimenten aus früheren Olympiaden-Prüfungen.

Waage, Thermometer und Chronometer

An einem anderen Tisch stehen Nathan Perruchoud, Loïc Nicollerat und Alban Trincherini vor einem mit heissem Wasser gefüllten Plastikglas. Ein Stück Sagex bedeckt den Behälter. Es wird von einem Thermometer durchbohrt, mit dem sich berechnen lässt, wie lange es dauert, bis das Wasser abkühlt. Loïc zeichnet ein Diagramm auf ein Millimeterpapier. «Wir notieren alle gemessenen Werte. Das dauert ein wenig. Aber man muss es sorgfältig machen, um eine genaue Dokumentation zu erhalten.» In der Zwischenzeit haben Edouard und seine Kameradinnen die Aluminiumplatte hinter sich gelassen: Sie haben die Tische und Übungen gewechselt. Haben sie die vorherige Problemstellung gelöst? Sie mussten den Einfluss der Reibung und des Magnetismus auf die Verlangsamung des Magneten definieren. «Wir haben verstanden, wie wir dies berechnen können. Aber wir sind nicht bis zur eigentlichen Berechnung gegangen. Um ein bisschen zu variieren, ziehen wir es vor, andere Übungen zu machen», erklärt Alexandra pragmatisch. Vor ihnen liegt nun ein weisser Papierkegel und ein kleines mysteriöses Gerät, das sich als technischer Massstab entpuppt. Sie füllen den Kegel mit verschiedenen Kunststoffteilen und wiegen ihn.

Weiter hinten hantiert eine andere Gruppe mit seltsamen Utensilien: ein rundes Gerät, das vibriert und den darin enthaltenen Glaszylinder schüttelt, in dem winzige Kugeln hüpfen. Mehrfarbige Kabel verbinden es mit einem Messgerät. Auffallend ist das Lachen und die entspannte Stimmung im Raum trotz der konzentrierten Atmosphäre. Und die Zusammenarbeit ist fließend: Jeder entwickelt abwechselnd seine Hypothese, bis nach und nach und kollektiv Lösungen erarbeitet werden.

Der Wissensdurst an erster Stelle

«Es ist nicht so sehr der Wettbewerb, der motiviert», sagt der 18-jährige Nathan. «Hier gehen wir weiter als in der Schule, wir entdecken mehr Dinge. Es ist, als hätte man Extra-Unterricht», berichtet er. Er absolviert im Moment sein letztes Jahr im Collège de Chippis (VS), anschliessend will er an der EPFL Physik studieren. Der gleichaltrige Edouard stammt aus Uvrier bei Sion. Auch für ihn ist der Erwerb von Wissen die Hauptquelle der Zufriedenheit. «Und manches, was hier vorkommt, wird mir auch bei meiner Maturarbeit helfen: Es gibt hier Aspekte, die ich wiederverwenden kann.» Der gebürtige Australier kann sich noch nicht entscheiden, ob er an der EPFL oder an einer australischen Universität studieren möchte. Auch beim Fachgebiet ist er noch unschlüssig: Elektrizität, Elektronik, Elektrotechnik oder Kernphysik. Alexandra, fast 18 Jahre alt, kommt aus Genf. Die Position in der Rangliste mag zufriedenstellend sein, aber sie ist nicht das Interessanteste, sagt sie. «Es geht ums Lernen! Es motiviert. Und man lernt neue Leute kennen, die sich ebenfalls für die Physik begeistern.» Sie kann sich gut vorstellen Astrophysik, theoretische Physik oder Teilchenphysik zu studieren. «Ich will in die Forschung! »

Ein breites Lächeln, erstaunliche Fähigkeiten, Konzentration und Nachahmungsgeist: Das bekommt man zu sehen, wenn man mit diesen Jugendlichen spricht. Dies dürfte andere junge Physik-Fans, die noch an ihrer Teilnahme zweifeln, ermutigen. «Es wäre cool, wenn es mehr Mädchen gäbe», sagt Alexandra, die einzige weibliche Teilnehmerin an der diesjährigen Veranstaltung.



Images: Thanh Phong Lê

Ab Sommer 2020 können Sie sich und Ihre Klasse für den Wettbewerb anmelden. Mehr dazu finden Sie in Kürze auf physics.olympiad.ch.

Sicherheitsparabel – Computational Physics Lab

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

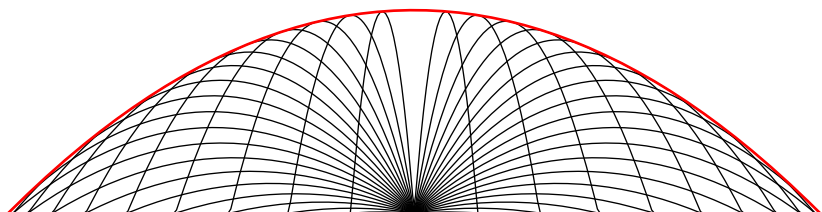
Im letzten Semester probierte ich mit meinen Schülerinnen und Schülern des Schwerpunktfachs Physik etwas Neues aus: ein “computational physics lab”. Zuerst lernten wir mit Hilfe von Templates, die ich aus den Internet zusammensuchte, etwas Python und wendeten diese Programmiersprache gemeinsam auf physikalische Probleme an. Beispielsweise berechneten wir den äusseren Lagrangeunkt L_2 im System Erde-Sonne. Die Bestimmungsgleichung ist einfach aufzustellen – eine Anwendung von $F = ma$ – aber nicht geschlossen zu lösen. Die Bestimmungsgleichung wurde in die Form $f(x) = 0$ gebracht. Dann musste die Klasse eine Vorlage so umschreiben, dass die Funktion $f(x)$ im erwarteten Bereich der Nullstelle grafisch dargestellt wird. So wurde die Nullstelle etwas eingegrenzt. Anschliessend bestimmten sie die Nullstelle genauer mit einem Intervallhalbierungsverfahren aus dem SciPy-Modul. Die Schülerinnen und Schüler brachten ihren eigenen Laptop mit, auf dem sie vorgängig das Anaconda-Paket installierten. In diesem Paket sind alle wesentliche Komponenten enthalten. Die Rückmeldungen der Klasse waren soweit gut: Die meisten wussten bereits, dass Python in ihrem Wunsch-Studium eingesetzt wird und waren entsprechend motiviert.

Damit die Leistung bewertet werden konnte, erhielten alle zwanzig Schülerinnen und Schüler in der zweiten Semesterhälfte ein eigenes Projekt, das sie selbständig bearbeiten mussten. Ich wollte verhindern, dass sich jemand ums Programmieren drücken kann. Im Folgenden ist ein Beispiel dargestellt. Ich habe es nicht verwendet, weil dieser Text von meinen Schülerinnen und Schülern online gefunden werden kann.

Eine Kanone schießt wild um sich. Wo muss man sich hinstellen, damit man gar nicht oder mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit getroffen wird?

Eine analoge Aufgabe ist 1641 vom italienischen Physiker Evangelista Torricelli, einem Schüler von Galilei, gelöst worden. Zeichnet man eine Schar von Wurfparabeln gleicher Abschuss-Schnelligkeit v zu verschiedenen Elevationswinkeln α , so deckt diese Schar nicht die ganze xy -Ebene ab. Torricelli hat als Erster eine Einhüllende (Envelope) berechnet, die “parabola di sicurezza”. Die Rechnung ist heute Standard und soll hier nicht wiederholt werden. Bleibt man ausserhalb dieser “Sicherheitsparabel”, siehe Abbildung 1, so kann man nicht getroffen werden. Aber was ist, wenn man in Reichweite der Geschosse bleiben muss? Stellt man sich besser in die Nähe der Kanone oder möglichst weit weg?

Abbildung 1: Wurfparabelschar mit Einhüllender (parabola di sicurezza)



2 Theorie

Die Gleichungen des schiefen Wurfs sind jeder Lehrkraft wohlbekannt:

$$y = x \cdot \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{Wurfparabel} \quad (1)$$

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2} \quad \text{Einhüllende (Sicherheitsparabel)} \quad (2)$$

$$r = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad \text{Wurfweite} \quad (3)$$

Wir nehmen an, dass die Elevationswinkel α auf $[0, \pi/2[$ gleichverteilt seien.

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \quad (4)$$

wobei N die normierte Anzahl Schüsse ist. Wir brauchen die Verteilung nur vom Winkel α auf diewurfweite r umzurechnen. Im Infinitesimal kalkül muss dazu lediglich "der Bruch erweitert werden".

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{dN}{dr} \frac{dr}{d\alpha} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \quad (5)$$

$$\frac{dN}{dr} = \frac{2}{\pi} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{rg}{v^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{dN}{dr} = \frac{g}{\pi v^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (gr/v^2)^2}} \quad (7)$$

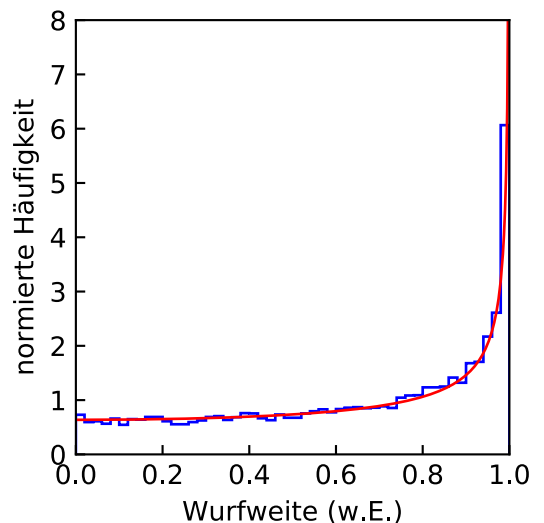
Bei solchen Rechnungen schauen mich die Schülerinnen und Schüler jeweils ziemlich schräg an. Können wir sicher sein, dass sie stimmt? Wird der Elevationswinkel α von 0 auf $\pi/2$ erhöht, so wächst die Schussweite zuerst von 0 auf ein Maximum und vermindert sich anschliessend wieder auf 0. Das Intervall $[0, \pi/2[$ wird also zweimal auf das Intervall $[0, r_{\max}]$ abgebildet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte dN/dr könnte noch einen weiteren Faktor zwei enthalten.

3 Simulation

Eine Simulation ist genau das richtige Instrument, um die Rechnung zu prüfen. Bestätigt sie die Rechnung, sind wir beruhigt. Liefert die Simulation etwas anderes, müssen wir die Rechnung verbessern.

Eine Simulation mit Python war schnell geschrieben, jedenfalls schneller, als Abbildung 2 nach meinen Wünschen zu formatieren. Die Tücken impliziter Defaults in verschachtelten Modulen sind würdige Nachfolger des ausgestorbenen Spaghetticodes.

Abbildung 2: Simulierte Verteilung der Wurfweiten (Stufen) mit theoretisch berechneter Verteilung (glatte Kurve). Die Simulation erfolgte nur über 10 000 Würfe, damit die zufälligen Unterschiede zwischen Simulation und Theorie sichtbar bleiben. Damit die Theorie zur Simulation passt, musste die ursprünglich berechnete Verteilungsfunktion (Gleichung 8) mit einem Faktor Zwei multipliziert werden.



4 Schlusswort

Die Simulation hat gezeigt, dass die Wurfweiten wie vermutet nach

$$\frac{dN}{dr} = \frac{2g}{\pi v^2} \frac{1}{\sqrt{1 - (gr/v^2)^2}} \quad (8)$$

verteilt sind. Die grösste Dichte findet in der Nähe der maximalen Wurfweite. Man muss den optimalen Winkel also gar nicht so genau treffen, wenn man etwas möglichst weit werfen will. Die Rechnung kann leicht erweitert werden, denn wir haben nur den eindimensionalen Fall betrachtet. Die Kanone könnte ja nicht nur den Höhenwinkel zufällig einstellen, sondern auch den Seitenwinkel.

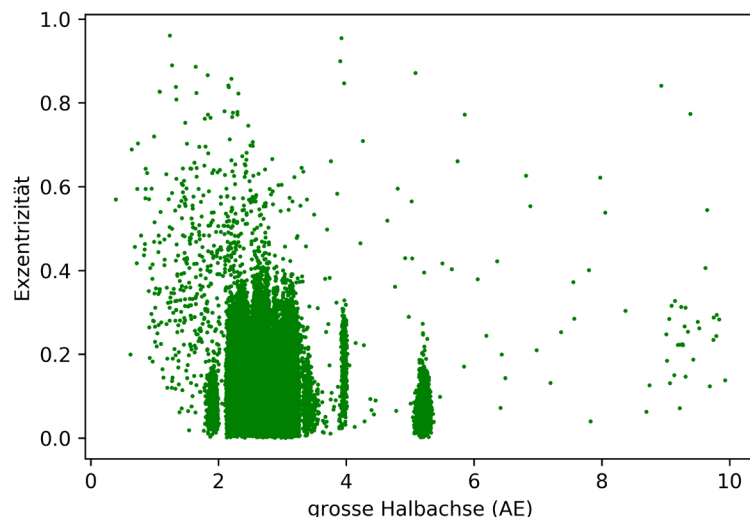
Die Schülerinnen und Schüler waren motiviert, aber leider nicht besser als sonst. Die Mühen mit der Abstraktion oder dem systematischen Denken blieben jedenfalls erhalten, die Mühen mit der Terminplanung sowieso. Für mich war der Unterricht mit Beamer und ohne Papier auch Neuland: Ich stellte die Templates online zur Verfügung und verlangte zum Abschluss ein digitales Dokument (bevorzugt ein Jupyter Notebook, das Text, Code und Grafiken kombinieren kann). Das Bewerten ist mir aber genauso schwer gefallen wie zu analogen Zeiten.

Computational Physics ist ein dankbarer Unterrichtsgegenstand mit einer langen Geschichte. Das früheste Beispiel, das ich kenne, war das (numerische) Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou Experiment¹ aus dem Jahr 1953, bei dem quasiperiodisches Verhalten in einem nichtlinearen Schwingungssystem entdeckt wurde. Informatik gehört – neben Arithmetik, Algebra und anderem – zum Handwerkszeug jeder Physikerin oder jedes Physikers. Ich finde, wir sollten das unseren Schülerinnen und Schülern auch zeigen dürfen.

5 Anhang

Und weil es noch etwas Platz auf der Seite hat: Ein Beispiel aus dem computational physics lab (Abb. 3).

Abbildung 3: Numerische Exzentrizität gegen grosse Halbachse für 100 000 Asteroiden. Wir haben geübt, aus einem grösseren Datensatz vom Minor Planet Center die gewünschten Informationen zu extrahieren. Die Lücken heissen “Kirkwood-gaps” und sind auf Bahnresonanzen mit den grossen Planeten zurückzuführen.



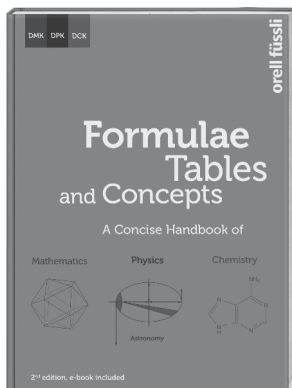
9. März 2020, Lie.

¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou-Experiment> (7. März 2020)

ÜBERARBEITET

Formeln, Tabellen, Begriffe

Die Formelsammlung für das Gymnasium und die Hochschule



DMK/DPK/DCK (Hrsg.)
Formulae Tables and Concepts
A Concise Handbook of Mathematics, Physics, Chemistry
inkl. E-Book
2. überarb. Aufl. 2020
264 Seiten, 17×23 cm, klappenbroschiert
978-3-280-04199-4
Fr. 30.–
Erscheint im Juli 2020

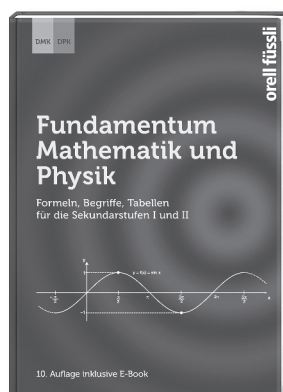


DMK/DPK/DCK (Hrsg.)
Formeln, Tabellen, Begriffe
Mathematik, Physik, Chemie
inkl. E-Book
7. durchgeseh. Aufl. 2019
264 Seiten, 17×23 cm klappenbroschiert
978-3-280-04193-2
Fr. 28.–

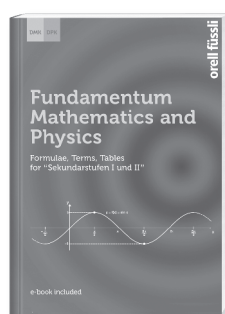
Das praktische Arbeitsinstrument ist identisch in zwei Sprachen erhältlich. In der deutschen 7. Auflage wurden die allgemeinen Konstanten aufgrund der Revision des Internationalen Einheitensystems angepasst. Die englische Ausgabe wird diese Änderungen in der 2. Auflage 2020 enthalten. Seit 2015 ist zudem der Chemieteil für die optimale Abdeckung der Anforderungen des Schwerpunktfaches Chemie/Biologie in beiden Ausgaben erweitert.

Fundamentum

Die praktische, leicht verständliche Formelsammlung



DMK/DPK (Hrsg.)
Fundamentum Mathematik und Physik
Formeln, Begriffe, Tabellen für die Sekundarstufen I und II
inkl. E-Book
10. durchgeseh. Aufl. 2019
120 Seiten, 17×23 cm broschiert
978-3-280-04192-5
Fr. 22.–



DMK/DPK (Hrsg.)
Fundamentum Mathematics and Physics
Formulae, Terms, Tables for «Sekundarstufen I und II»
inkl. E-Book
2016
120 Seiten, 17×23 cm broschiert
978-3-280-04080-5
Fr. 24.–

Die zentralen Wissensinhalte für Mathematik und Physik sind kurz und knapp in einem Buch verfügbar. Die Sachverhalte werden zusätzlich mit wenigen Worten umschrieben. In der deutschen Ausgabe des «Fundamentum» wurden 2019 die allgemeinen Konstanten aufgrund der Revision des Internationalen Einheitensystems angepasst. Ansonsten sind die beiden Ausgaben identisch.

Bestellen Sie online über
www.ofv.ch/lernmedien

orell füssli Verlag

Die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras oder Mathematische Spielerei auf den Spuren von Dirac

Rainer Hauser, rainer.hauser@gmail.com

1 Einleitung

In der Primarschule empfindet man die Addition als viel einfacher als die Multiplikation, aber spätestens im Gymnasium lernt man, dass sie bedeutend mehr Tücken hat. So ist zwar beispielsweise $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$, aber es gilt $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$ bis auf degenerierte Fälle. Die bekannten Potenzgesetze für reelle Zahlen $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ und $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ gelten nur für die Multiplikation. Sobald Potenzen und Wurzeln auftreten, wird es mit der Addition schwierig.

Aus dem Satz von Pythagoras kann man also nicht einfach die Wurzel ziehen, indem man aus der bekannten Formel

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

für die Katheten a , b und die Hypotenuse c im rechtwinkligen Dreieck auf $a + b = c$ schliesst, denn $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist eben nicht gleich $a + b$, was auch geometrisch offensichtlich ist, denn $a + b$ ist das Zusammensetzen von zwei Strecken der Längen a und b , bei dem die beiden Strecken die gleiche Richtung haben, während beim Satz von Pythagoras der rechte Winkel zwischen den beiden Strecken a und b entscheidend ist. (Der Cosinussatz ist die Verallgemeinerung und beinhaltet beide Situationen.)

Die Gleichung (1) lässt sich zwar zu $c^2 - a^2 = b^2$ umformen und in $(c + a)(c - a) = b^2$ zerlegen, und mit komplexen Zahlen lässt sich sogar $a^2 + b^2 = c^2$ in $(a + ib)(a - ib) = c^2$ direkt aufspalten, aber die Wurzel lässt sich aus $a^2 + b^2 = c^2$ nicht einfach ziehen, indem man daraus auf $a + b = c$ schliesst, um c^2 in $(a + b)(a + b)$ zu faktorisieren. Und doch gibt es einen interessanten Weg, sowas wie die Wurzel aus (1) zu ziehen, wenn man den Überlegungen von Paul Dirac folgt.

2 Der physikalische Hintergrund

In gewissem Sinne kann man behaupten, dass Dirac bei der Herleitung der nach ihm benannten Gleichung die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras gezogen hat. Um das zu belegen, muss man etwas ausholen. Gemäss der Speziellen Relativitätstheorie gilt mit c für die Lichtgeschwindigkeit

$$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \left(\frac{mc^2}{c}, 0, 0, 0 \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{c} \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für den Energie-Impuls-Vierervektor links in einem Bezugssystem mit Impuls (p_x, p_y, p_z) und Energie E und rechts im Ruhesystem mit der Masse m und der Energie $E = mc^2$. Ausmultipliziert gibt das

$$-\frac{E^2}{c^2} + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -m^2 c^2$$

oder umgeformt

$$\frac{E^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 c^2$$

im Hinblick auf die pythagoräische Formel $c^2 = a^2 + b^2$. Übersetzt in die Sprache der quantenmechanischen Operatoren $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ und analog für p_y und p_z gibt das die Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - m^2 c^2$$

genannt Klein-Gordon-Gleichung, die für relativistische Teilchen gültig ist.

Wie Dirac auf die Idee gekommen ist, daraus die Wurzel zu ziehen, ist vermutlich nicht an die Nachwelt überliefert worden. Er versuchte jedenfalls, aus dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Differentialgleichung erster Ordnung mit dem Ansatz

$$i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} = -i\hbar \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc$$

zu bestimmen, die “quadriert” wieder die Klein-Gordon-Gleichung ergeben sollte. Die Grössen α_x , α_y , α_z und β können keine Zahlen sein, weil sie nicht kommutieren, sondern antikommutieren, so dass beispielsweise $\alpha_x \alpha_y = -\alpha_y \alpha_x$ gelten muss, damit die gemischten Terme verschwinden. Es gibt vier solche Grössen in Form von vier komplexen 4×4 -Matrizen, welche die benötigten Bedingungen erfüllen. Sie heissen Dirac-Matrizen, und die entsprechende Gleichung, die quasi der Wurzel aus der Klein-Gordon-Gleichung entspricht, heisst Dirac-Gleichung. Die Objekte, welche die Dirac-Gleichung erfüllen, heissen Spinoren, haben Spin $\frac{1}{2}$ und spielen in der Teilchenphysik die Rolle der Fermionen, aus denen die Materie besteht. In [1] wird die Gleichung in der heute in der Teilchenphysik üblichen Weise mit vier γ -Matrizen statt α_x , α_y , α_z und β und mit der alternativen Minkowski-Metrik hergeleitet, die 1, -1, -1, -1 in der Diagonale hat, die sich in der Teilchenphysik eingebürgert hat.

Leonard Susskind in seiner Vorlesungsserie über Teilchenphysik [2] führt die Dirac-Gleichung in zwei Schritten ein. Erst nimmt er eine relativistische Raumzeitgeometrie mit nur einer Raumdimension neben der Zeitdimension an, sodass er mit einem α und einem β auskommt, und erweitert die Herleitung anschliessend auf alle drei Raumdimensionen.

3 Mathematische Problemstellung

Nimmt man also den Ansatz von Dirac reduziert auf zwei Dimensionen gemäss Susskind und vergisst die Übersetzung in quantenmechanische Operatoren mit dem ganzen Rest der Physik, so bleibt der mathematische Ansatz

$$\alpha a + \beta b = \gamma c \tag{2}$$

für die Wurzel aus $a^2 + b^2 = c^2$. Ausmultipliziert lässt sich $(\alpha a + \beta b)^2 = (\gamma c)^2$ als

$$\alpha \alpha a a + \alpha \beta b b + \beta \alpha a a + \beta \beta b b = \gamma c \gamma c$$

schreiben, wobei angenommen ist, dass das Assoziativgesetz gilt, sodass man keine Klammern schreiben muss. In Bezug auf das Kommutativgesetz sei zudem angenommen, dass a , b und c als Zahlen miteinander und mit α , β und γ kommutieren. Damit lässt sich die Gleichung in

$$\alpha^2 a^2 + \alpha \beta a b + \beta \alpha a b + \beta^2 b^2 = \gamma^2 c^2 \tag{3}$$

umformen. Wenn diese Gleichung mit $a^2 + b^2 = c^2$ übereinstimmen soll, so muss auf jeden Fall $\alpha \beta = -\beta \alpha$ gelten, was bedeutet, dass α und β für eine nicht-triviale Lösung sicher keine Zahlen sein können. Die Grössen α , β und γ sollen aber zu einer Gruppe mit dem neutralen Element **1**

gehören, sodass man $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \mathbf{1}$ und $\alpha\beta = -\beta\alpha$ verlangen muss, damit die Gleichung (3) mit $\mathbf{1}a^2 + \mathbf{1}b^2 = \mathbf{1}c^2$ übereinstimmt.

Die Wurzel aus $a^2 + b^2 = c^2$ mit dem Ansatz (2) ist das einfachere Problem als die Herleitung der Dirac-Gleichung aus der Klein-Gordon-Gleichung, weil sie nur 2×2 -Matrizen braucht und keine komplexen Zahlen verlangt. Nimmt man beispielsweise die beiden reellen Pauli-Matrizen und die Einheitsmatrix

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

für α , β und γ , so ergibt das

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c$$

für den Ansatz $\alpha a + \beta b = \gamma c$. Quadriert man diese Gleichung, bekommt man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c^2$$

wegen $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \mathbf{1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

und der Antikommutativität $\alpha\beta = -\beta\alpha$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

für die Pauli-Matrizen.

4 Anfängliche Tücken mit der Lösung

Die spannende Frage ist jetzt, welche Objekte a , b und c diese Gleichung erfüllen. Nimmt man Zahlen für a , b und c wie etwa das berühmteste der pythagoräischen Tripel, so müsste also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 5$$

gelten. Das stellt sich aber sofort als Irrtum heraus, denn

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht das, was man erwarten würde. Bei Wurzeln aus Gleichungen muss man immer aufpassen, denn nimmt man beispielsweise die Gleichung $4 = 4$, so ist zwar $2^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$, aber trotzdem ist $2 = -2$ falsch. Im Fall der Wurzel aus $a^2 + b^2 = c^2$ scheint man jedoch auf mehr als nur auf die Vorzeichen achten zu müssen, denn

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

hat nur eine triviale Lösung, sodass a , b und c für interessantere Lösungen keine Zahlen sein können.

Die Spinoren als Lösungen der Dirac-Gleichung sind Objekte mit vier Komponenten, was übrigens nur zufällig mit der Dimension vier der relativistischen Raumzeitgeometrie übereinstimmt. Entsprechend kann man hier versuchen, Objekte mit zwei Komponenten als Lösung der Wurzel aus dem Satz von Pythagoras zu suchen. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

folgen die zwei Gleichungen $a_1 + b_2 = c_1$ und $-a_2 + b_1 = c_2$ oder

$$\begin{cases} b_1 = c_2 + a_2 \\ b_2 = c_1 - a_1 \end{cases} \quad (7)$$

als Bedingungen an diese Vektoren mit zwei Komponenten. Als Nebenbemerkung sei erwähnt, dass auch bei der Dirac-Gleichung der Masseterm βmc die Komponenten der Spinoren mischt, wie das in diesen beiden Gleichungen passiert, in denen b_1 aus a_2 und c_2 berechnet wird, während b_2 aus a_1 und c_1 gebildet wird.

In der Überzeugung, dass das jetzt klappen muss, kann man als Beispiel, das die Bedingungen (7) erfüllt, die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wählen, wobei die Gleichung (3) jetzt

$$(\alpha\vec{a})^T(\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{a})^T(\beta\vec{b}) + (\beta\vec{b})^T(\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{b})^T(\beta\vec{b}) = (\gamma\vec{c})^T(\gamma\vec{c}) \quad (8)$$

bedeutet. Weil ja wegen der Antikommutativität der Pauli-Matrizen die gemischten Terme verschwinden sollten, gibt das mit den Identitäten (5)

$$(2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (3, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (3, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder ausgerechnet $4 + 1 + 9 + 1 = 9 + 4$, was aber offensichtlich falsch ist und somit etwas mehr Vorsicht verlangt.

5 Korrekte Lösung

Das Problem ist, dass zwar für Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sowie Matrizen α und β $(\alpha a)(\beta b) = ab\alpha\beta$ wie oben vorausgesetzt gilt, womit $ab\alpha\beta = -ab\beta\alpha$ durch ab dividiert werden darf, dass dies aber für Vektoren nicht mehr notwendigerweise richtig sein muss. Die Eigenschaften (6) genügen nicht, damit $(\alpha\vec{a})^T(\beta\vec{b}) + (\beta\vec{b})^T(\alpha\vec{a}) = \vec{a}^T\alpha^T\beta\vec{b} + \vec{b}^T\beta^T\alpha\vec{a}$ in (8) verschwindet. Weil für die beiden Pauli-Matrizen $\alpha^T = \alpha$ und $\beta^T = \beta$ gilt, lässt sich die zusätzlich nötige Bedingung als

$$(a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (b_1, b_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

schreiben. Das bedeutet somit $2(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ oder $a_1b_2 = a_2b_1$, was in der Form

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (9)$$

einfach heisst, dass der eine Vektor ein Vielfaches des andern sein muss.

Jetzt sollte eigentlich nichts mehr schiefgehen. Wählt man also beispielsweise die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus, die sowohl die Bedingung (7) als auch die Bedingung (9) erfüllen, so klappt es, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt für die “Wurzel” sowie

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \\ & \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = (7, 1) \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 50 \end{aligned}$$

und

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (5, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 50$$

für das “Quadrat” daraus. Entsprechend ist auch

$$(1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (3, 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = (7, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder ausgerechnet $1 + 4 + 9 + 36 = 49 + 1$.

6 Schlussbemerkung

Das hier präsentierte mathematische Problem, bei dem man versucht, die Wurzel aus dem Satz von Pythagoras zu ziehen, mag aussehen, als sei es an den Haaren herbeigezogen, und auch die Nützlichkeit der gefundenen Lösung ist fraglich. Die ganze Spielerei basiert im Wesentlichen auf der Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = c_1^2 + c_2^2$, wenn man $c_1 = a_1 + b_2$ und $c_2 = b_1 - a_2$ gemäss Bedingung (7) sowie $b_1 = ba_1$ und $b_2 = ba_2$ gemäss Bedingung (9) benutzt. (Der uninteressante Fall $\vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist hier ignoriert worden.) Das gibt

$$a_1^2 + a_2^2 + (ba_1)^2 + (ba_2)^2 \equiv (a_1 + ba_2)^2 + (ba_1 - a_2)^2$$

eingesetzt, und das ist eine Identität.

Interessant ist aber, dass Paul Dirac auf diese oder ähnliche Art eine Gleichung gefunden hat, die für die moderne Physik von riesiger Bedeutung ist. Mit ihr hat man vor bald hundert Jahren, als Protonen und Neutronen noch als Elementarteilchen galten, die Bestandteile und Struktur der Atome langsam besser verstehen gelernt, und von ihr stammte erst die Vermutung, dass es nicht nur Materie, sondern auch Antimaterie geben könnte.

Links

- [1] Dirac-Gleichung in *Wikipedia* (de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Gleichung)
- [2] Leonard Susskind, Vorlesungen über *Particle Physics 1: Basic Concepts* in *The Theoretical Minimum* (theoreticalminimum.com/courses/particle-physics-1-basic-concepts/2009/fall)

Ein schweres Integral

Peter Gallin, peter@gallin.ch

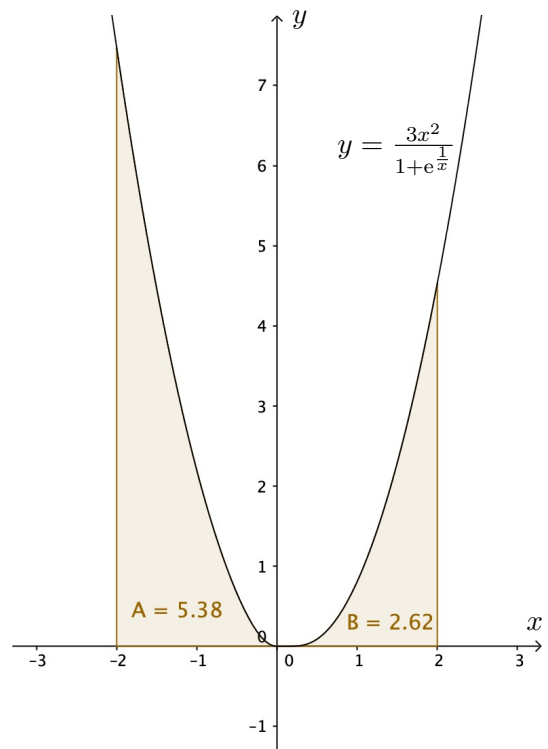
Auf Instagram im Internet habe ich unter #welove.math eine Integrationsaufgabe gefunden, die sich zuerst allen Lösungsversuchen widersetzte.

Man beweise, dass

$$\int_{-2}^2 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = 8 \quad .$$

Mit GeoGebra lässt sich rasch ein Überblick gewinnen und auch das Resultat 8 gibt das Programm numerisch klaglos aus. Jedoch eine Stammfunktion ist mit allen mir zugänglichen Tricks auch mit Mathematica nicht zu haben. Die Flächeninhalte A und B der Teilflächen werden in Mathematica und in GeoGebra numerisch problemlos berechnet und ergeben in ihrer Summe genau 8.

Erst der Gedanke an eine Symmetrie führte weiter. Zwar ändert sich der Integrand, wenn man x durch $-x$ ersetzt, aber es könnte ja sein, dass sowohl links wie rechts der y -Achse an sich unlösbare Integrale entstehen, die sich aber zusammen irgendwie ergänzen oder aufheben.



Das Aufteilen in ein linkes und ein rechtes Integral, die Substitution von x durch $-u$ und schliesslich das Ersetzen der Integrationsvariable u durch x brachten dann den Durchbruch:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx &= \int_{-2}^0 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_0^2 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-2}^0 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx - \int_0^{-2} \frac{3u^2}{1+e^{-\frac{1}{u}}} du = \\ &= \int_{-2}^0 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_{-2}^0 \frac{3u^2 e^{\frac{1}{u}}}{e^{\frac{1}{u}} + 1} du = \int_{-2}^0 \frac{3x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_{-2}^0 \frac{3x^2 e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + 1} dx \\ &= \int_{-2}^0 \frac{3x^2(1+e^{\frac{1}{x}})}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-2}^0 3x^2 dx = [x^3]_{-2}^0 = 8 \end{aligned}$$

”Beinahe-Pythagoras = Pell”

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch und Philipp Reinhard, philippreinhard@hotmail.com

1 Einleitung

Eugen Jost ist ein Künstler aus Thun, der es mit seinen Bildern meisterhaft versteht, Kunst und Mathematik (und Sprache!) zu verbinden (siehe zum Beispiel [1], [2], [3]).

Eines seiner Bilder scheint eine Pythagoras-Konfiguration darzustellen, ein rechtwinkliges Dreieck zusammen mit den beiden Kathetenquadraten und dem Hypotenusenquadrat.

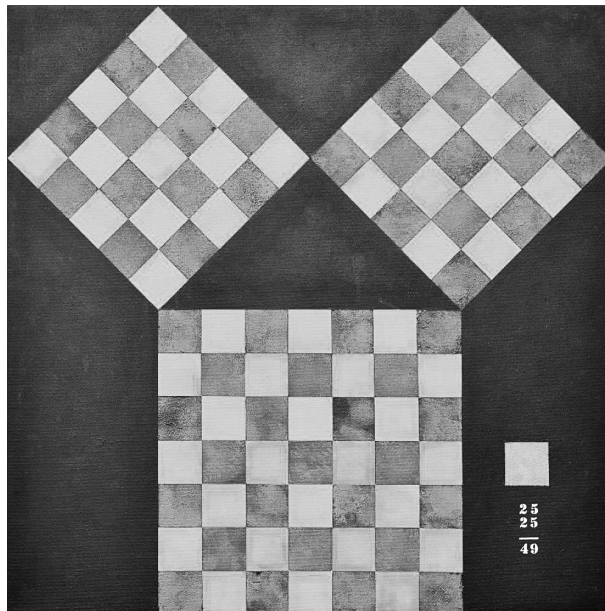


Abbildung 1

Auf den zweiten Blick (auch die angegebenen Zahlen $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ verraten es) sieht man schnell, dass die beiden ”Kathetenquadrate” aus je 25 Häuschen bestehen, das ”Hypotenusenquadrat” aber ’nur’ aus 49 Häuschen. Sind die kleinen hellen und dunkleren Häuschen alle gleich gross, dann ist das schwarze gleichschenklige Dreieck in der Mitte gar nicht rechtwinklig. Auf dem obigen Bild ist das schwarze Dreieck übrigens trotzdem rechtwinklig, der Künstler hat bei den Seitenlängen der Quadrate und also der Häuschen leicht geschummelt!

Eine Konfiguration wie oben (mit lauter gleich grossen kleinen Häuschen) kann natürlich gar nie zu einem rechtwinkligen Dreieck führen. Bezeichnet x die (ganzzahlige) Seitenlänge der Kathete, y die (ganzzahlige) Seitenlänge der Hypotenuse, dann müsste $x^2 + x^2 = 2x^2 = y^2$, also $\frac{y^2}{x^2} = 2$ und folglich $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$ sein. Das steht im Widerspruch zur Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

In Zusammenhang mit dem obigem Bild ist die Frage aufgetaucht, ob es andere Konfigurationen gibt, bei denen nach dem ’Geschmack des Pythagoras’ entweder ein Häuschen fehlt oder eines zu viel ist.

Bezeichnet wieder x die Seitenlänge der Kathete, y die Seitenlänge der Hypotenuse, dann lautet die Aufgabe: Finde alle (positiven) ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $x^2 + x^2 = 2x^2 = y^2 \pm 1$ resp.

$$y^2 - 2x^2 = \pm 1.$$

Diese beiden Gleichungen $y^2 - 2x^2 = 1$ und $y^2 - 2x^2 = -1$ sind Spezialfälle der sogenannten Pellischen Gleichung, einer diophantischen Gleichung, die allgemein die Form $y^2 - dx^2 = c$ hat (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Pellische_Gleichung). Diese Gleichung (mit $d = 2$) wurde wegen des Zusammenhangs mit $\sqrt{2}$ bereits im Altertum studiert.

Gleichungen, bei denen 'nur' ganzzahlige Lösungen gesucht sind, heissen diophantisch (benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantos von Alexandria (irgendwann zwischen -100 und +350)).

2 Die Lösungen der Pell-Gleichungen $y^2 - 2x^2 = 1$ und $y^2 - 2x^2 = -1$

Wir bezeichnen die Gleichung $y^2 - 2x^2 = 1$ mit $\text{Pell}(+)$ und $y^2 - 2x^2 = -1$ mit $\text{Pell}(-)$. Gesucht sind alle Paare (y, x) natürlicher Zahlen, welche eine der beiden Gleichungen erfüllen.

Satz:

- a) Die Zahlenpaare (y_n, x_n) , rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 & ; & & y_{n+1} &= y_n + 2x_n \\ x_1 &= 1 & ; & & x_{n+1} &= y_n + x_n, \end{aligned}$$

liefern abwechselnd Lösungen von $\text{Pell}(-)$ und von $\text{Pell}(+)$.

- b) Es gibt keine weiteren Lösungen für eine der beiden Gleichungen.

Beweis:

- a) Für jede natürliche Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen y_n und x_n mit $(1 + \sqrt{2})^n = y_n + x_n\sqrt{2}$. So ist $y_1 = x_1 = 1$ und wegen $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ weiter $y_2 = 3$ und $x_2 = 2$ etc.

Es ist einfach einzusehen, dass auch $(1 - \sqrt{2})^n = y_n - x_n\sqrt{2}$ gilt.

Wegen

$$(-1)^n = \left[(1 + \sqrt{2}) (1 - \sqrt{2}) \right]^n = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = (y_n + x_n\sqrt{2}) (y_n - x_n\sqrt{2}) = y_n^2 - 2x_n^2$$

ist (y_n, x_n) für jede natürliche Zahl n entweder Lösung von $\text{Pell}(+)$ oder von $\text{Pell}(-)$.

Weiter folgt aus

$$\begin{aligned} y_{n+1} + x_{n+1}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2}) (1 + \sqrt{2})^n \\ &= (1 + \sqrt{2}) (y_n + x_n\sqrt{2}) = (y_n + 2x_n) + (y_n + x_n)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

dass sich (y_{n+1}, x_{n+1}) aus (y_n, x_n) berechnen lässt.

Ausgehend von $(y_1, x_1) = (1, 1)$ liefern die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2x_n \\ x_{n+1} &= y_n + x_n \end{aligned}$$

folglich abwechselnd Lösungen von Pell(+) oder von Pell(-):

$$\begin{aligned} (y_1, x_1) &= (1, 1) & : & \quad 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1 \\ (y_2, x_2) &= (1 + 2 \cdot 1, 1 + 1) = (3, 2) & : & \quad 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 \\ (\mathbf{y_3, x_3}) &= (\mathbf{3 + 2 \cdot 2, 3 + 2}) = (\mathbf{7, 5}) & : & \quad \mathbf{7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1} \quad : \text{vergleiche mit Abbildung 1.} \\ (y_4, x_4) &= (7 + 2 \cdot 5, 7 + 5) = (17, 12) & : & \quad 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1 \\ (y_5, x_5) &= (17 + 2 \cdot 12, 17 + 12) = (41, 29) & : & \quad 41^2 - 2 \cdot 29^2 = -1 \\ (y_6, x_6) &= (41 + 2 \cdot 29, 41 + 29) = (99, 70) & : & \quad 99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1 \\ & & & \quad \vdots \end{aligned}$$

- b) Eine einfache Rechnung zeigt: Für jede Lösung (y, x) von Pell(+) oder von Pell(-) mit $x > 1$ und $y > 2$ gilt: $x < y < 2x$ resp. $0 < y - x < x$.

Wie nehmen an, es gebe Lösungen von Pell(+) oder von Pell(-), die nicht mit den obigen Rekursionsformeln erzeugt werden können. Wir wählen unter all diesen Lösungen diejenige mit dem kleinsten x -Wert und nennen sie (\tilde{y}, \tilde{x}) .

Aus $y_{n+1} = y_n + 2x_n$ und $x_{n+1} = y_n + x_n$ folgt umgekehrt $y_n = -y_{n+1} + 2x_{n+1}$ und $x_n = y_{n+1} - x_{n+1}$.

Wegen

$$(-\tilde{y} + 2\tilde{x})^2 - 2(\tilde{y} - \tilde{x})^2 = -(\tilde{y}^2 - 2\tilde{x}^2)$$

wäre mit (\tilde{y}, \tilde{x}) auch $(-\tilde{y} + 2\tilde{x}, \tilde{y} - \tilde{x})$ Lösung von Pell(+) oder von Pell(-), welche ebenfalls nicht durch die Rekursionsformeln erzeugt werden kann.

Wegen $0 < \tilde{y} - \tilde{x} < \tilde{x}$ hätte die neue Lösung aber einen kleineren (immer noch positiven) x -Wert als (\tilde{y}, \tilde{x}) . Das ist ein Widerspruch. \square

Bemerkung: Auch mit grossen Werten für y_n und x_n wird die entstehende "Beinahe-Pythagoras"-Konfiguration nie ganz rechtwinklig sein. Der Winkel im zentralen gleichschenkligen Dreieck beträgt nach Kosinussatz $y_n^2 = x_n^2 + x_n^2 - 2x_n^2 \cos \gamma$ und wegen $y_n^2 - 2x_n^2 = \pm 1$

$$\gamma = \arccos \frac{\pm 1}{2x_n^2}.$$

Wären in Abbildung 1 alle Häuschen gleich gross, bekäme man mit $x = 5$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{50} \approx 88.85^\circ.$$

3 Die Lösungen von Pell(-) oder Pell(+) und Kettenbrüche

Die Lösungen (1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12), (41, 29), (99, 70) von Pell(-) oder von Pell(+), je als Bruch geschrieben, tauchen in einem weiteren Bild von Eugen Jost auf!

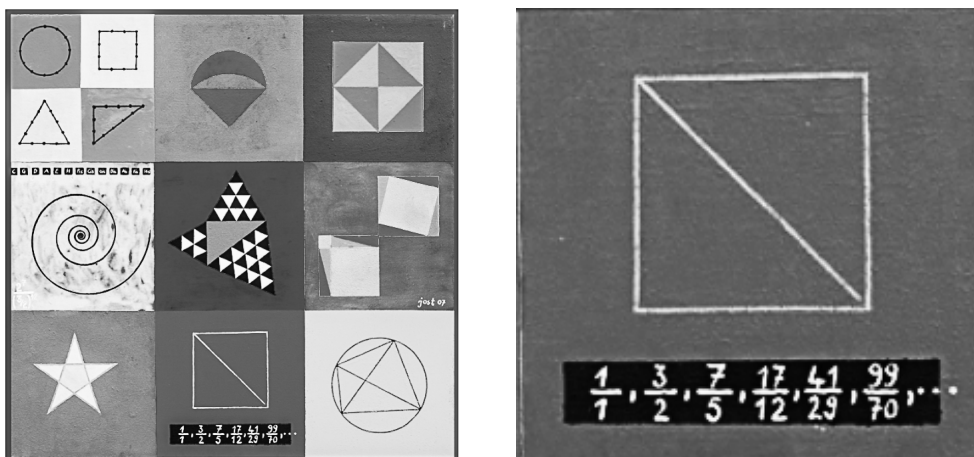


Abbildung 2

Die Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$ sind Näherungsbrüche des Kettenbruches von $\sqrt{2}$.

Den Kettenbruch von $\sqrt{2}$ bekommt man, wenn man den Euklidischen Algorithmus mit $\sqrt{2}$ und 1 durchführt.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1) && \text{mit } 0 < r_1 = \sqrt{2} - 1 < 1 \\ 1 &= 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2}) && \text{mit } 0 < r_2 = 3 - 2\sqrt{2} < \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 &= 2 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) + (5\sqrt{2} - 7) && \text{mit } 0 < r_3 = 5\sqrt{2} - 7 < 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Terme werden immer komplizierter! Multipliziert man aber die letzte Gleichung auf beiden Seiten mit $\sqrt{2} + 1$, dann bekommt man gerade die mittlere Gleichung! Folglich werden alle folgenden Divisionen mit Rest immer von der Form $p = 2 \cdot q + r$ mit $r < q$ sein.

Der Kettenbruch von $\sqrt{2}$ lautet also:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

Die ersten Näherungsbrüche lauten (siehe Abbildung 2):

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{y_1}{x_1}, \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{y_2}{x_2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = \frac{y_3}{x_3}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = \frac{y_4}{x_4}.$$

Näherungsbrüche sind - wie der Name schon sagt - Brüche, die eine gegebene irrationale Zahl sehr gut approximieren. Man kann zum Beispiel zeigen, dass kein Bruch mit (natürlichem) Nenner ≤ 12 existiert, der sich von $\sqrt{2}$ weniger unterscheidet als $\frac{17}{12}$.

Sei $\frac{y_n}{x_n}$ der gekürzte n -te Näherungsbruch von $\sqrt{2}$. Dann gilt für den nächsten Kettenbruch

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{y_n}{x_n}} = \frac{y_n + 2x_n}{y_n + x_n}.$$

Der Bruch rechts ist dabei bereits vollständig gekürzt, denn für den grössten gemeinsamen Teiler gilt

$$\text{ggT}(y_n + 2x_n, y_n + x_n) = \text{ggT}(x_n, y_n + x_n) = \text{ggT}(x_n, y_n) = 1.$$

Da nach Definition $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ ebenfalls vollständig gekürzt ist, können wir die Zähler und Nenner je gleichsetzen:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2x_n \\ x_{n+1} &= y_n + x_n. \end{aligned}$$

Wir finden die gleichen Rekursionsformeln wie oben für die Lösungen der beiden Pellschen Gleichungen!

Fazit: Alle Konfigurationen, bei denen 'Pythagoras' um 1 verfehlt wird, ergeben sich als Lösungen der beiden Pell-Gleichungen, durch die Entwicklung von $(1 + \sqrt{2})^n$ oder durch den Kettenbruch von $\sqrt{2}$.

4 Pell(+) \longleftrightarrow "Dreieckszahl=Quadratzahl"

Betrachten wir noch einmal die Gleichung Pell(+): $y^2 - 2x^2 = 1$.

Satz:

Ist (y, x) Lösung von $y^2 - 2x^2 = 1$, dann ist (k, s) mit $k = \frac{y-1}{2}$ und $s = \frac{x}{2}$ Lösung von $\frac{k(k+1)}{2} = s^2$.

Ist (k, s) Lösung von $\frac{k(k+1)}{2} = s^2$ dann ist (y, x) mit $y = 2k + 1$ und $x = 2s$ Lösung von $y^2 - 2x^2 = 1$.

$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k$ ist die k -te Dreieckszahl.

Jeder Lösung von Pell(+) entspricht eindeutig eine Dreieckszahl, die gleichzeitig eine Quadratzahl ist.

Beweis: Da $2x^2$ gerade ist, muss $y^2 = 2x^2 + 1$ ungerade sein. Damit ist auch y ungerade, also von der Form $y = 2k + 1$.

$$y^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2x^2 + 1 \implies x^2 = 2k^2 + 2k = 2(k^2 + k).$$

Also ist x^2 gerade und damit auch x . Einsetzen von $x = 2s$ ergibt schliesslich

$$\frac{k(k+1)}{2} = s^2.$$

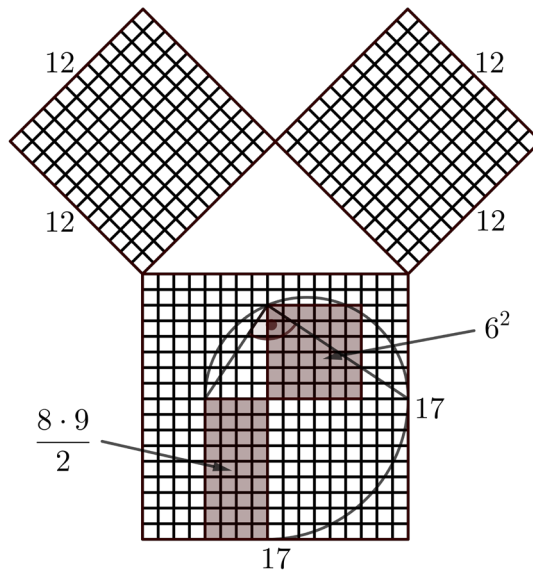
Die Schlussrichtungen lassen sich umkehren. □

Beispiele:

Für $(y, x) = (3, 2)$ gilt $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 \iff$ Für $(k, s) = (1, 1)$ gilt $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1 = 1^2$

Für $(y, x) = (17, 12)$ gilt $17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1 \iff$ Für $(k, s) = (8, 6)$ gilt $\frac{8 \cdot 9}{2} = 1 + \dots + 8 = 6^2$

Für $(y, x) = (99, 70)$ gilt $99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1 \iff$ Für $(k, s) = (49, 35)$ gilt $\frac{49 \cdot 50}{2} = 1 + \dots + 49 = 35^2$



$$17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$$

\iff

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 6^2$$

Abbildung 3

Das dunkle Rechteck der Breite $\frac{8}{2}$ und der Höhe $8 + 1$ steht für $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2}$, das dunkle Quadrat für 6^2 . Auch wegen des Höhensatzes sind beide Flächen gleich.

5 Pell(–) \iff Spezielle pythagoräische Zahlentripel

Satz:

Ist (y, x) Lösung von $y^2 - 2x^2 = -1$, dann ist (k, x) mit $k = \frac{y-1}{2}$ Lösung von $k^2 + (k+1)^2 = x^2$.

Ist (k, x) Lösung von $k^2 + (k+1)^2 = x^2$ dann ist (y, x) mit $y = 2k + 1$ Lösung von $y^2 - 2x^2 = -1$.

Jeder Lösung von $y^2 - 2x^2 = -1$ entspricht eindeutig ein pythagoräisches Zahlentripel, bei dem sich die Kathetenlängen um 1 unterscheiden!

Beweis: Auch bei der Gleichung $y^2 - 2x^2 = -1$ muss y^2 und damit y ungerade sein: $y = 2k + 1$.

$$y^2 - 2x^2 = (2k + 1)^2 - 2x^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 2x^2 = -1 \implies 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k + 1)^2 = x^2$$

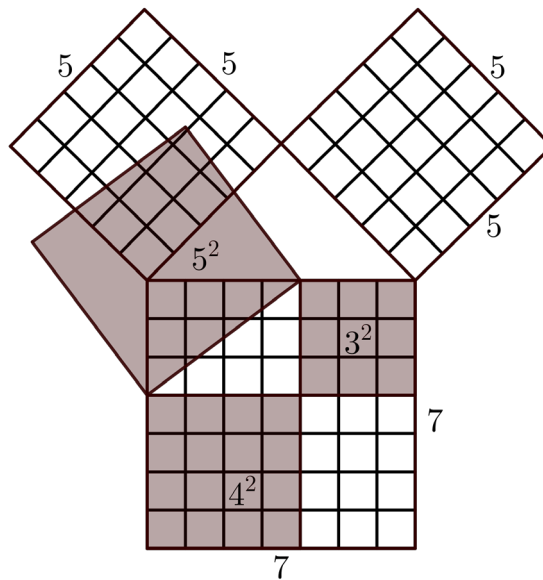
Die Schlussrichtungen lassen sich ebenfalls umkehren. □

Beispiele:

Für $(y, x) = (1, 1)$ gilt $1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1 \iff$ Für $(k, x) = (0, 1)$ gilt $0^2 + 1^2 = 1^2$

Für $(y, x) = (7, 5)$ gilt $7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1 \iff$ Für $(k, x) = (3, 5)$ gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$

Für $(y, x) = (41, 29)$ gilt $41^2 - 2 \cdot 29^2 = -1 \iff$ Für $(k, x) = (20, 29)$ gilt $20^2 + 21^2 = 29^2$



$$7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1 \iff 3^2 + 4^2 = 5^2$$

Abbildung 4: Dem Bild von Eugen Jost in Abbildung 1 entspricht gerade das berühmteste pythagoräische Zahlentripel $3^2 + 4^2 = 5^2$.

6 Kommentar

Die hier vorgestellten Tatsachen sind natürlich alle längst bekannt.

Es ging den Autoren darum, aufzuzeigen, wie Kunst, die Bilder von Eugen Jost im Speziellen, spannende Reisen in die Welt der Mathematik ermöglichen können.

Auf der hier beschriebenen Reise sind wir dem Satz des Pythagoras, Pell-Gleichungen, Rekursionsformeln, dem Kosinussatz, Kettenbrüchen, Näherungsbrüchen, dem Euklidischen Algorithmus, Dreieckszahlen, Quadratzahlen, dem Höhensatz und pythagoräischen Zahlentripeln begegnet!

Es warten weitere Reisen! (Siehe zum Beispiel [1], [2], [3].)

Literatur, Quellen

- [1] Eli Maor and Eugen Jost, Beautiful Geometry, Princeton University Press, 2014
- [2] Peter Baptist, Albrecht Beutelsbacher, Alles ist Zahl, mit Motiven von Eugen Jost, IW Medien, 2009
- [3] Peter Baptist, Eugen Jost, Carsten Miller, Alles ist Zahl: Mathematik andersARTig, Bayreuth, 2013



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2020

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt. Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 29. Oktober 2020

Markus Kalisch, ETH Zürich
Lukas Meier, ETH Zürich

Donnerstag, 12. November 2020

Klaus Volkert, Universität Wuppertal

Donnerstag, 26. November 2020

Giancarlo Copetti, Kantonsschule Schaffhausen

Donnerstag, 10. Dezember 2020

Albert Fässler

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

Ausbreitung von Epidemien nach dem SIR-Modell

Josef Züger, Bündner Kantonsschule, josef.zueger@bks-campus.ch

Einführung

In der Phase des Fernunterrichts sah man in diversen Präsentationen Grafiken, welche den Verlauf der Pandemie darstellen sollten. Dabei wurde versucht zu belegen, wie sich die Bundesrätlichen Massnahmen oder solche von anderen Regierungen auf die Ausbreitung auswirken werden. So ist mir unter anderem nebenstehende Grafik aufgefallen und ich habe mir die Frage gestellt, welches denn die Modellannahmen sind, mit denen diese Grafiken erstellt werden. Auf der Suche bin ich auf das im Jahre 1927 von W. O. Kermack und A. G. McKendrick unter dem Titel „A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics“ veröffentlichte SIR-Modell gestossen. Dabei handelt es sich um ein System von Differentialgleichungen, mit denen die Ausbreitung von Epidemien dargestellt wird. Ich habe dieses Modell für meine Schülerinnen und Schüler aufbereitet und als freiwilligen Lesetext zur Verfügung gestellt. Es hat sich die Gelegenheit ergeben, Aktualität in den Mathematikunterricht zu bringen und Differentialrechnung in Anwendung zu sehen.

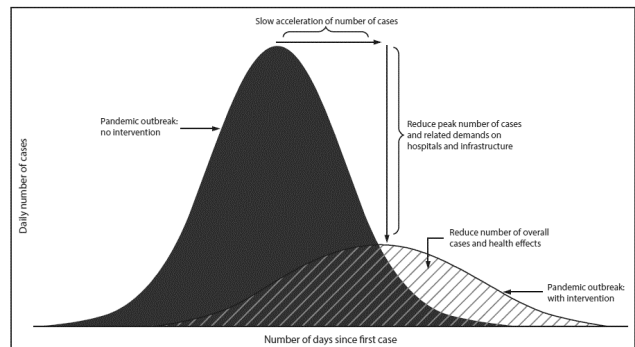


Abbildung 1: Vergleich des Verlaufs der Ansteckungen mit und ohne Massnahmen

(Quelle: <https://www.cdc.gov/mmwr/volumes/66/rr/rr6601a1.htm>)

Das SIR-Modell

Grundidee

Eine Population mit N Individuen wird in drei Gruppen aufgeteilt. Jedes Individuum gehört zu jedem Zeitpunkt t genau einer der drei Gruppen an. Die drei Gruppen sind:

Susceptibles: $S(t)$ ist die Anzahl der zum Zeitpunkt t infizierbaren, noch nicht angesteckten Individuen

Infected: $I(t)$ ist die Anzahl der zum Zeitpunkt t infizierten, allenfalls erkrankten, ansteckenden Individuen

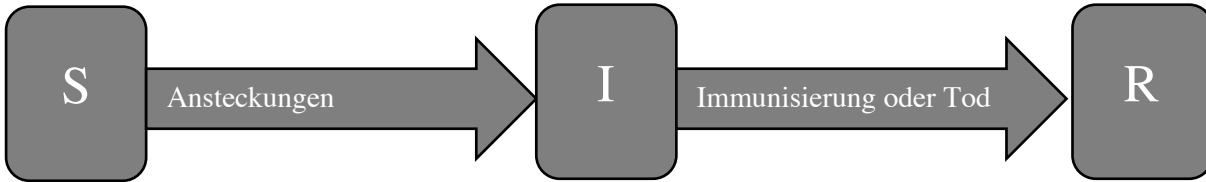
Removed: $R(t)$ ist die Anzahl der geheilten, immunisierten bzw. verstorbenen Individuen¹

Offensichtlich ist, dass die Summe der Gruppengrössen der Gesamtgrösse der Population entsprechen muss.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (1)$$

¹ Für den Verlauf der Epidemie ist es unerheblich, ob ein Individuum geheilt und immunisiert ist oder ob es verstorben ist. Der wichtige Aspekt ist, dass dieses Individuum nicht mehr ansteckend ist und auch nicht mehr angesteckt werden kann.

Dynamik des Systems



Die Anzahl Ansteckungen ist von vier Faktoren (im Modell direktproportional) abhängig:

1. Von der Anzahl der infizierbaren Individuen, also von $S(t)$.
2. Von der Anzahl der infizierten Individuen, also von $I(t)$.
3. Von einem Faktor α , der ein Mass dafür angibt, wie infektiös die Krankheit ist und wie viele Kontakte zwischen der Gruppe $S(t)$ und $I(t)$ stattfindet. Ein kleiner Wert bedeutet, dass die Krankheit schwer zu übertragen ist und/oder dass wenige Kontakte zwischen infizierbaren und infizierten Individuen stattfinden. Ein grosser Wert bedeutet, dass die Krankheit leicht zu übertragen ist und/oder dass viele Kontakte zwischen den Infizierbaren und den Infizierten stattfinden.²
4. Von der Länge des Zeitraums Δt , welchen man beobachtet.

Die Anzahl der Immunsierungen bzw. Todesfälle ist von drei Faktoren, im Modell ebenfalls direktproportional, abhängig:

1. Von der Anzahl der infizierten Individuen, also von $I(t)$.
2. Von einem Faktor β , der ein Mass dafür angibt, wie gross die Sterblichkeits- und Immunsierungsrate ist.³
3. Von der Länge des Zeitraums Δt , welchen man beobachtet

Betrachtet man die Populationsgrössen im Schritt vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t + \Delta t$, dann gelten im SIR-Modell folgende Beziehungen:

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \underbrace{\alpha \cdot I(t) \cdot S(t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl Ansteckungen}} \quad (2)$$

$$I(t + \Delta t) = I(t) + \underbrace{\alpha \cdot I(t) \cdot S(t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl Ansteckungen}} - \underbrace{\beta \cdot I(t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl Wechsel zu R}} \quad (3)$$

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \underbrace{\beta \cdot I(t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl Wechsel zu R}} \quad (4)$$

Addiert man zur Kontrolle (2), (3) und (4), bestätigt sich, dass das Modell

² Die bis zum Verfassungszeitpunkt am 30. März 2020 durch den Bundesrat erlassenen Massnahmen der Kontaktverminderung zielen darauf ab, den Wert für α zu verkleinern.

³ Als Wert für β wird im Modell üblicherweise der Kehrwert der durchschnittlichen Zeit T zwischen Ansteckung und Immunsierung bzw. Tod genommen. Wäre $I(t)$ konstant und T in Tagen angegeben, dann würden jeweils $\frac{I(t)}{T}$ Individuen täglich immun werden (oder sterben).

Gleichung (1) erfüllt.

Differentialgleichungssystem

Die Gleichungen (2), (3) und (4) werden üblicherweise als Differentialgleichungen notiert. Dazu bildet man die bekannten Differentialquotienten:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \dot{S}(t) \tag{5}$$

und erhält:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha \cdot I(t) \cdot S(t) \\ \dot{I}(t) = \alpha \cdot I(t) \cdot S(t) - \beta \cdot I(t) \\ \dot{R}(t) = \beta \cdot I(t) \end{cases} \tag{6}$$

Auch hier kann (1) überprüft werden. Bildet man die Summe der drei Differentialgleichungen, erhält man $\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0$, was wiederum bedeutet, dass die Summe $S(t) + I(t) + R(t)$ konstant ist.

Die ganze Dynamik des Systems ist in den ersten beiden Gleichungen enthalten. Die dritte Gleichung sammelt so quasi alle Individuen, welche keinen Einfluss mehr auf die Dynamik der Epidemie haben.

Simulation mit Excel oder GeoGebra

Mittels Eulerverfahren kann nun die Lösung des Differentialgleichungssystems mit Anfangswertproblem näherungsweise bestimmt werden. Folgende Grafiken wurden mit Excel erstellt. Sie benutzen eine Schrittweite von $\Delta t = 1$, $S(0) = 999, I(0) = 1, R(0) = 0$ (Eine Gesamtpopulation mit $N = 1000$ und ein infiziertes Individuum) und $\beta = 0.2$.

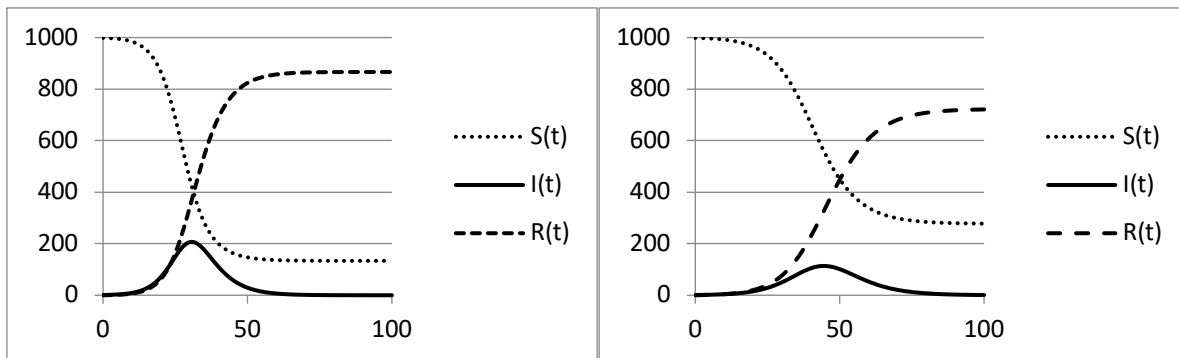


Abbildung 2: Verlauf mit $\alpha = 0.00045$ (links) und $\alpha = 0.00035$ (rechts)

Es zeigt sich, dass ein Verkleinern von α tatsächlich dazu führt, dass die Maximalzahl der gleichzeitig infizierten Individuen (und somit die Anzahl notwendiger Spitalbetten) reduziert werden kann.

Unter <https://www.youtube.com/watch?v=k6nLfCbAzgo> findet man ein Video, wie man das SIR-Modell in GeoGebra implementiert. Die entstehende Datei findet man unter <https://www.geogebra.org/m/nbjfjtpv>.



Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Ausschreibung der Matura Awards 2020 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2020 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

Die Preisverleihung wird im Rahmen des 31. Schweizerischen Tages über Mathematik und Unterricht am 9.9.2020 an der Neuen Kantonsschule Aarau stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2020 an

Alain Valette
alain.valette@unine.ch
Institut de Mathématiques - Unimail
Université de Neuchâtel
11 Rue Emile Argand
2000 Neuchâtel

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkräfte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Neuchâtel, 2. Januar 2020

Alain Valette
Vizepräsident der SMG

31. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Ort: Neue Kantonsschule Aarau
Datum: Mittwoch, 9. September 2020
Organisation: Meike Akveld (ETH), Claude Gittelsohn (NKSA), Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH), Gisela Phillips-Widmer (NKSA)
Anmeldung: bis 1. September 2020

Programm

Check-in: Kaffee, Orangensaft und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr (30 CHF)	09.30 – 10.00 Uhr
Begrüssung	10.00 – 10.15 Uhr
Vortrag: Michael Lambrou (University of Crete) <i>Invariants</i>	10.15 – 11.15 Uhr
Preisverleihung Matura Award SMG mit Präsentation der Arbeiten durch die Laurateen	11.15 – 11.45 Uhr
Aufsuchen der Workshopzimmer	11.45 – 12.00 Uhr
Workshops (siehe unten)	12.00 – 13.00 Uhr
Mittagessen: Mensa	13.00 – 14.15 Uhr
Workshops (siehe unten)	14.15 – 15.15 Uhr
Kaffeepause	15.15 – 15.45 Uhr
Vortrag: Rainer Kaenders (Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn) <i>Ungewöhnliche Integrations- und Differentiationsmethoden mit Elementargeometrie</i>	15.45 – 16.45 Uhr
Ende der Veranstaltung	16.45 Uhr

Workshops

- *Arduino im Mathematikunterricht*, Gisela Phillips-Widmer (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Interaktive Aktivitäten mit desmos.com*, Claude Gittelsohn (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Mathe-Club für helle Köpfe*, Tatiana Samrowski (Universität Zürich)
- *Gems from ancient Greek Mathematics*, Michael Lambrou (University of Crete)
- *Mathematical magic tricks, logic and other fun things*, Michael Lambrou (University of Crete)
- *BYOD im Mathematikunterricht*, Christian Wüest (Neue Kantonsschule Aarau)
- *Neue Lehrmittel für den Mathematik-Unterricht am Gymnasium*, Armin Barth (Kantonsschule Baden/ETH Zürich)
- *Blockchain Decrypted*, Georgette Weingärtner

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: www.math.ch/TMU2020

Medaillen vorerst nur aus der Ferne

Lara Gafner, Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Raphael Angst von der Kantonsschule Im Lee (ZH) und die Gymnasiastin Yanta Wang aus Oberwil (BL) haben für ihre Leistungen an der Schweizer Mathematik-Olympiade Gold gewonnen. Vier Mittelschülerinnen und Mittelschüler gewannen bei dem Wettbewerb Silber, sechs holten sich Bronze. Die Preisverleihung, die am 14. März zusammen mit Familien und Lehrpersonen der Finalistinnen und Finalisten hätte stattfinden sollen, wurde auf unbestimmte Zeit verschoben, um der Ausbreitung des Coronavirus keine Chance zu geben. Die jungen Mathematikerinnen und Mathematiker müssen sich also noch gedulden, bis sie ihre wohlverdienten Medaillen in den Händen halten. Bereits nach Hause nehmen können sie das Wissen, welches sie sich im Verlaufe der Olympiade angeeignet haben – zum Beispiel im Trainingslager in Aarburg vom 23. Februar bis zum 1. März. Wir berichten von jenem einwöchigen Treffen, bei welchem Schülerinnen und Schüler aus der ganzen Schweiz ihre Leidenschaft für Mathematik auslebten.

Mathematische und... sprachliche Fähigkeiten

Ende Februar kamen die Finalistinnen und Finalisten der Mathematik-Olympiade in Aarburg (AG) zu einem einwöchigen Camp zusammen. Bevor es an die Abschlussprüfung ging, konnten sie sich in der Theorie und der Praxis üben. Ein Besuch vor Ort am 26. Februar ermöglichte es uns, die Jugendlichen bei der Arbeit zu beobachten.

Die Teilnehmenden sind auf zwei Räume aufgeteilt: auf der einen Seite die Anfänger, auf der anderen Seite diejenigen, die bereits an der Mathematik-Olympiade teilgenommen haben. In jenem zweiten Raum gab es fröhliche Gespräche auf Englisch. Es ist erstaunlich, dass diese jungen Leute nicht nur mathematisch bewandert sind, sondern sich auch wissenschaftlich in der Sprache Shakespeares unterhalten können. Auf den Tischen liegen verstreut Hefte, Kompass, Klammern, aber auch Trinkflaschen, Süßigkeiten und Obst. Die Tafel ist gespickt mit Zahlen und Buchstaben - nach einer Logik zusammengesetzt, die dem einfachen Menschen entgeht. $CQ \cap AD \& W$...eine Geometrieübung, die am Vortag durchgeführt wurde. Heute steht die Kombinatorik auf dem Programm. Auf die weissen Seiten eines Flipcharts zeichnet ein Jugendlicher rote, nummerierte und ineinander verschachtelte Kreise. In der Regel arbeitet die ganze Gruppe gemeinsam stehend. Manchmal werden die Diskussionen in kleineren Gruppen geführt und gleiten ins Schweizerdeutsche ab. Dann wird die Forschung wieder auf die gesamte Gruppe ausgedehnt. Zeitweise hat man das Gefühl, dass alle gleichzeitig reden. Doch nach und nach finden die jungen Menschen eine gemeinsame Denkweise und schaffen es, Lösungen zu formulieren, die alle überzeugen.

Wenn alles zusammenkommt, ist es faszinierend

Die Teilnehmer aus der Westschweiz sind in der Minderheit. Wie kommuniziert man da miteinander? Den sechzehnjährigen Johann Williams aus Lausanne stört die Sprachbarriere nicht. Er findet es sogar gut, gleichzeitig sein Deutsch verbessern zu können. Durch die Arbeitsblätter, die oft in dieser Sprache zur Verfügung stehen, hat er ein umfangreiches mathematisches Vokabular erworben. Wie entwickelte sich seine Liebe zur Mathematik? "Als ich klein war, merkten meine Eltern, dass ich gerne mit Zahlen spiele und dass mir die Logik gefällt. Sie gaben mir Rätsel zu lösen. Dann entdeckte ich Logikwettbewerbe und die Mathematik-Olympiade". Was ihn fasziniert, ist die Konfrontation mit einem Problem, es Schritt für Schritt abzuarbeiten, "und dann kommt plötzlich alles zusammen". Wie sieht seine berufliche Zukunft aus? "Die Mathematik ist großartig. Aber sie ist hauptsächlich ein Werkzeug. Ich möchte sie im Alltag anwenden". Er zieht zum Beispiel einen Bachelor-Abschluss in Informatik in Betracht. In diesem Lager gefiel ihm ein "schönes Problem" in der Kombinatorik besonders. Seine Lösung erforderte die Einführung des Goldenen Schnittes. Das hatte er nicht erwartet, er fand es spannend. Übungen, bei denen viele Daten über einen langen Zeitraum gesammelt werden müssen, mag er weniger.

Eine Leidenschaft wie jede andere

Im Anfängerzimmer ist die Atmosphäre ruhiger und die Einrichtung ähnelt eher einem Schulklassenzimmer. Unter den Teilnehmenden ist Mathys Douma aus dem Dorf Courroux (JU), mit 13 Jahren wahrscheinlich der Jüngste. Nicht nur in Mathematik ist er begabt: Er hat zwei Klassen übersprungen und ist bereits im letzten Jahr der Sekundarschule. Wie Johann besucht auch er Euler-Kurse an der EPFL. Später will er sich vielleicht der Forschung in der Medizin oder den Neurowissenschaften zuwenden. "Es ist ein spannendes Gebiet, alles, was mit dem Gehirn zu tun hat, fasziniert mich." Einige seiner Freunde sehen Mathe als lästige Pflicht an und fragen ihn, warum er süchtig danach ist. "Ich liebe es! Es ist mehr als ein Hobby, es ist eine Leidenschaft. Also antworte ich, dass es genau gleich ist wie für sie und ihre Leidenschaften". Zahlentheorie und funktionale Gleichungen gehörten während dieses Lagers zu seinen Lieblingsübungen. Von der Kombinatorik, die heute Morgen auf dem Programm steht, ist er kein grosser Fan. Er relativiert aber: "Manchmal sucht man lange, lange Zeit - und merkt hinterher, dass es gar nicht so kompliziert war".

Die jungen Leute kommen abwechselnd an die Tafel, um ihre Hypothesen zu formulieren. Punkte, sich schneidende Linien und Dreiecke. Die Übung besteht darin, ein mathematisches Prinzip zu beweisen. "Intuitiv verstehen wir, warum es wahr ist, aber es ist schwer, den Beweis dafür zu erbringen", kommentiert ein junges Mädchen. "Man muss anders denken. Wenn man das erst einmal verstanden hat, wird man am Ende fündig", fügt ein Teilnehmer hinzu. Selbst in der Mittagspause diskutieren die Jugendlichen weiterhin über die Übungen und kritzeln Dreiecke auf die Tischdecke neben dem Geschirr. Was für eine Freude, sie so engagiert zu sehen. Sie machen verständlich, worin die Faszination der Mathematik liegt: Verspieltheit, Flexibilität im Denken und das ständige Entdecken neuer Dinge.



Bilder: Mathematik-Olympiade

Ab Herbst 2020 können sich Ihre Schülerinnen und Schüler für den Wettbewerb anmelden. Informieren Sie sich auf imosuisse.ch.

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälinstrasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger j.zueger@sunrise.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 144 31.07.2020 (Ende September)
Nr. 145 30.11.2020 (Ende Januar)
Nr. 146 31.03.2021 (Ende Mai)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch