

Bulletin

September 2014 — Septembre 2014

N° 126

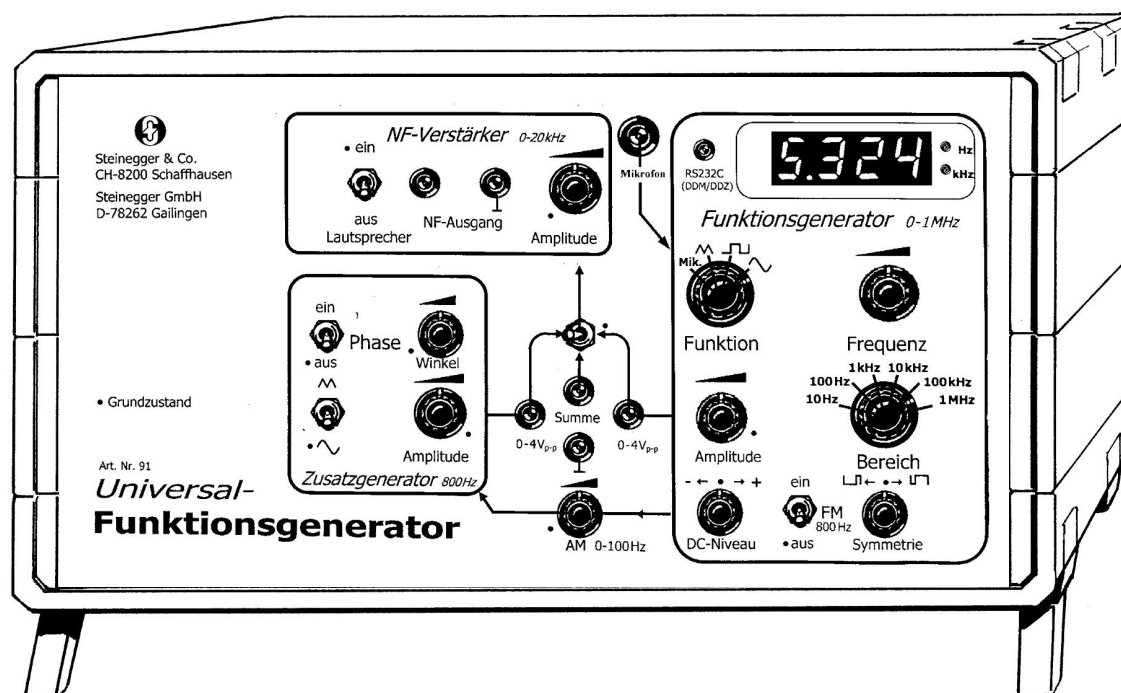


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1288.-**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro***VSMP — SSPMP — SSIMF 3**

Einladung zur Generalversammlung — Invitation à l'assemblée générale 3

Veranstaltung: Lehrertag an der Didacta Schweiz, Basel 4

Arno Gropengiesser
In memoria di Claudio Beretta 6

**Commission Romande de Mathématiques 7**

Frédy Gertsch
Hommage à Michel Aubert 7

Alain Stucky
Etudes qualitatives des équilibres d'un modèle dynamique de population 8

Jean-Daniel Voelke
Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique 12

**Deutschschweizerische Physikkommission 19**

Martin Lieberherr
Rundbogen 19

Kurs: 15. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht 23

Wolfgang Pils
Schweizer Bronzemedaille beim IYPT in Shrewsbury 24

Samuel Byland
Loaded Hoop 26

**Deutschschweizerische Mathematikkommission 30**

Peter Gallin
Abwicklung eines schiefen Kreiskegels 30

Kurs: Weiterbildung Berufsfeldbezogener Mathematikunterricht in der Fachmittelschule 33

Peter Gallin
Radien oder Seitenlängen zu den 25 Aufgaben von Eugen Jost 34

Veranstaltung: Kopfrechnen mit dem 9-fachen Weltmeister 35

<i>Herbert Bruderer</i> Fund von zwei über 100-jährigen 24-Meter-Rechenwalzen an der ETH Zürich und bei der UBS, Basel	36
<i>ETH Zürich</i> : Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht — Programm HS 2014	40
<i>Kurs</i> : 6. Schweizer Tag für den Informatikunterricht STIU 2015 „Homo Informaticus“	44
<i>Hansjürg Stocker</i> Buchbesprechung: Philipp Schöbi, Helmut Sonderegger: Rheticus — Wegbereiter der Neuzeit	46
<i>Hansjürg Stocker</i> Buchbesprechung: Hans Walser: Der Goldene Schnitt	47
<i>H.R. Schneebeli</i> Buchbesprechung: Hans Walser: DIN A4 in Raum und Zeit	48
<i>PZ BS</i> : Basler Kolloquium für Mathematiklehrpersonen — Programm HS 2014	50
<i>Hans Ulrich Keller</i> Schwerpunkt — von was?	52

Internet-Adressen — Adresses Internet

www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — Page de Titre

24-Meter-Rechenwalze an der ETH Zürich bzw. UBS, Basel (Copyright UBS AG)

Der zugehörige Artikel (S. 36) stammt aus dem Buch *Meilensteine der Rechentechnik. Zur Geschichte der Mathematik und der Informatik* (Herbert Bruderer, Walter de Gruyter, Berlin/Oldenbourg-Wissenschaftsverlag, München 2015)



SSPMP - VSMP - SSIMF
SOCIÉTÉ SUISSE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE
VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRKRÄFTE
SOCIETA SVIZZERA DEGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA E FISICA

Einladung zur GENERALVERSAMMLUNG des VSMP
Invitation à l'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE de la SSPMP
Invito all'Assemblea generale della SSIMF

Freitag, 21. November 2014 – *Vendredi 21 novembre 2014* – venerdì 21 novembre 2014

Hotel Kreuz, Zeughausgasse 41, 3000 Bern

I. Rahmenprogramm – programme cadre – programma quadro

Da gleichzeitig der WBZ-Kurs *1. MINT Tagung* stattfindet, wird dieses Jahr kein spezifisches Rahmenprogramm angeboten – *En parallèle se déroule la 1ère Journée MINT (cours CPS), la SSPMP ne propose donc pas un programme cadre* – In concomitanza si svolge il corso CPS *la giornata MINT*, la SSIMF non propone dunque un proprio programma.

Ort/Lieu/Luogo: Hotel Kreuz, Zeughausgasse 41, 3000 Bern

Einschreibung/Inscript./Iscriz.: <https://www.wbz-cps.ch/fr/1-mint-tagung-1ere-journee-mint>

II. Generalversammlung 2014 – Assemblée générale 2014 – Assemblea generale 2014, 16:45 – 17:45 Uhr

- | |
|--|
| <p>Traktandenliste – <i>Ordre du jour</i> – Ordine del giorno
Begrüssung – <i>Salutations</i> - Saluto</p> <ol style="list-style-type: none">1. Traktandenliste 2014, Protokoll 2013 – <i>Ordre du jour 2014, procès-verbal 2013</i> – Ordine del giorno 2014, verbale 20132. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen– <i>Rapports annuels de la société et des commissions</i> – Rapporti annuali della società e delle commissioni3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2013/14 – <i>Comptes annuels de la société et des commissions 2013/14</i> – Conti annuali della società e delle commissioni 2013/144. Budget 2014/15 & Mitgliederbeitrag – <i>Budget 2014/15 & Cotisations</i> – Preventivo 2014/15 e quota sociale5. Mutationen – <i>Mutations</i> – Mutazioni6. Wahlen – <i>Élections</i> – Elezioni7. Anträge von Mitgliedern – <i>Propositions des membres</i> – Mozioni di membri8. Varia – <i>Divers</i> – Eventuali |
|--|

Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2014 auch auf unserer Website www.vsmf.ch zu finden.

– *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation à l'AG de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet www.sspmp.ch à partir de fin d'octobre 2014.*

– A partire dalla fine di ottobre 2014 saranno disponibili sul sito www.ssimf.ch il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno (inclusivo dell'ordine del giorno).

III. Gemeinsames Abendessen – Repas du soir en commun – Cena comune

Im Anschluss an die GV werden wir in einem Berner Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.

– *Après l'AG nous irons manger ensemble dans un restaurant en ville de Berne.*

– Al termine dell'AG è prevista una cena comune in un ristorante nel centro di Berna.

Locarno, agosto 2014, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente



Deutscher Verein zur Förderung
des mathematischen
und naturwissenschaftlichen
Unterrichts e.V.



Am 31. Oktober 2014 richtet der MNU mit dem Worlddidac Verband und der Unterstützung des VSMP einen Lehretag während der Bildungsmesse Didacta Schweiz Basel aus.

Der MNU ist ein Lehrerverband, der sich seit fast 125 Jahren in Deutschland für die Förderung des Unterrichts in den MINT-Fächern engagiert und mit beinahe 6000 Mitgliedern bundesweit ein Sprachrohr für fachliche Inhalte und Belange des Mathematik- und naturwissenschaftlichen Unterrichts darstellt. Mitglieder arbeiten in Kommissionen an Lehrplänen und unterrichtlichen Weiterentwicklungen mit. Auf einem jährlich stattfindenden Kongress in einer deutschen Universitätsstadt ist die Möglichkeit gegeben, sich auszutauschen und Kontakte zu knüpfen, sich in Vorträgen und Workshops weiter zu bilden und sich in einer großen Lehrmittelausstellung über Neuerungen zu informieren. 18 Landesverbände organisieren regelmäßig Tagungen, auf denen auch regionale Besonderheiten eine Rolle spielen. Außerdem veranstaltet der MNU speziell Tagungen für Lehrkräfte in der Ausbildung und solche, die gerade ihre Tätigkeit aufgenommen haben.

Didacta Schweiz Basel – der wichtigste Treffpunkt für die Schweizer Bildungsbranche

Vom 29. bis 31. Oktober 2014 findet die grösste Bildungsmesse der Schweiz statt, die sich an Lehrpersonen, Schulleitende und weitere Exponenten im Bildungsbereich richtet. Rund 180 Aussteller präsentieren ihre Produkte und Dienstleistungen für alle Schulstufen des Schweizer Schulsystems. Sie reichen von klassischen Lehr- und Lernmitteln über neue Unterrichtsmethoden bis zu digitalen Medien sowie Informations- und Kommunikationstechniken. Die zahlreichen Begleitveranstaltungen beleuchten Bildungstrends und bieten den Fachbesuchern Inspirationen und Informationen für Schule und Unterricht. Zeitgleich, aber räumlich getrennt findet die internationale Worlddidac Basel statt.

Mithilfe des baden-württembergischen Landesverband möchte der MNU sich gerne auf der Didacta Schweiz Basel auch bei schweizerischen Lehrkräften präsentieren und in mathematischen und naturwissenschaftlichen Themen in einen Austausch treten. Eine solche grenzüberschreitende Kooperation ist ein Novum und verspricht viele interessante Diskussionen und Erfahrungsaustausche.

Das Programm soll den folgenden Ablauf haben:

- | | |
|-------------------|---|
| 9.00 – 10.30 Uhr | Hauptvortrag - Jean Pütz, Wissenschaftsjournalist und Fernsehmoderator des Westdeutschen Rundfunk (provisorisch) |
| 11.00 – 12.30 Uhr | Workshop Physik - Dr. Andreas Mettenleitner, Pfaffenhofen
<i>Schülerexperimente zum Thema ENERGIE in der Sekundarstufe I und II</i> |

- 11.00 – 12.30 Uhr **Workshop Chemie** - Prof. Dr. Matthias Ducci et al., Karlsruhe
Badepferlen Stressfrei – Fluoreszenzexperimente mit Bedarfsgegenständen
- 14.00 – 15.30 Uhr **Workshop Mathematik** - Gaby Heintz, Jüchen
Einführung in das kooperative Arbeiten im Mathematikunterricht
- 14.00 – 15.30 Uhr **Workshop Biologie** - Berthold Brose, Dortmund
Selbstgesteuertes Lernen im Biologieunterricht (Sek. II)

Zwischen dem Vortrag und den Workshops wird genügend Zeit sein, sich auf der Didacta Schweiz Basel und der international ausgerichteten Worlddidac Basel über Lehr- und Lernmittel zu informieren.

Eine Anmeldung, bei der auch die genauen Zeiten und Örtlichkeiten eingesehen werden können, ist erforderlich und kann ab dem 22. September 2014 über die Homepage www.mnu.de erfolgen.

In memoria di Claudio “Tom” Beretta



È dello scorso mese di agosto la triste notizia dell'improvvisa scomparsa, dopo breve malattia, di Claudio “Tom” Beretta, già presidente della Società svizzera degli insegnanti di matematica e di fisica SSIMF e per tanti anni membro della Commissione romanda di matematica CRM. Chi lo ha conosciuto, e non sono pochi, conserverà il ricordo di una persona straordinaria che ha dato molto alla scuola ticinese e al promovimento della cultura scientifica.

Nato a Locarno, dopo l'ottenimento della laurea all'Università di Losanna ha trascorso tutta la sua vita professionale facendo amare la matematica a generazioni di studenti della Scuola Magistrale prima e del Liceo poi. Il suo impegno per la formazione e l'educazione delle future generazioni lo ha spinto ad assumere cariche istituzionali importanti: esperto di materia nelle scuole medie (secondario I) e direttore del Liceo cantonale di Locarno. Il suo spiccato senso civico lo aveva mosso, sin da giovane, ad assumere cariche politiche nel suo comune di domicilio, di cui è stato vicesindaco, e a livello regionale.

Tom, così lo chiamavano tutti, è stato per moltissimi anni membro attivo della CRM, partecipando alla redazione della collana “Fundamentum de mathématique” e organizzando corsi di aggiornamento per docenti del medio superiore. Coloro che hanno partecipato al Congresso nazionale Musica-Fisica-Matematica MUFIMA, svoltosi a Locarno, ricordano questo evento memorabile per l'impeccabile organizzazione e per l'altissima qualità dei contenuti. Claudio aveva saputo, infatti, invitare relatori e conferenzieri di chiara fama per i tre ambiti disciplinari.

I colleghi ticinesi lo ricordano con riconoscenza per aver fortemente voluto che si costituisse, accanto alle quattro commissioni permanenti della SSIMF esistenti da tempo, una commissione di matematica della Svizzera italiana. Quando era presidente della Società svizzera degli insegnanti di matematica e di fisica, in occasione del centenario della società aveva infatti promosso la revisione degli statuti e aperto così la strada alla creazione della CMSI. Grazie ai suoi contatti e al suo dinamismo è nata una serie innumerevole di iniziative a favore dell'insegnamento della matematica e, più in generale, della promozione della cultura scientifica, iniziative che hanno chiamato al sud delle Alpi, a beneficio di insegnanti e studenti, conferenzieri e ricercatori di altissimo valore.

Indimenticabile resterà pure il ricordo delle ottime cene a casa sua durante le quali si progettavano le iniziative. Claudio era infatti un ottimo cuoco e un invito a cena era l'occasione per constatare che anche ai fornelli ci metteva l'anima e il cuore. Non mancavano, tra un piatto e l'altro, animate discussioni che si risolvevano però sempre con un abbraccio, una risata e la sua solita frase “oramai, a som un selvadig”.

Quest'uomo dal grande cuore era una persona vulcanica, un'esplosione di idee che evidenziavano il suo essere rimasto giovane nello spirito. Claudio possedeva, oltre all'estro, anche una preparazione culturale ampia e profonda: era un grande cultore ed appassionato di musica ed un attento osservatore degli sviluppi della ricerca scientifica e della società in genere.

La Società svizzera degli insegnanti di matematica e fisica, unitamente alle cinque commissioni permanenti, si unisce al profondo cordoglio dei famigliari e degli amici e ricorda con affetto e gratitudine il suo instancabile impegno e la sua passione. L'amico Claudio lascia un vuoto profondo nel nostro cuore e la sua memoria resterà ben viva nel nostro animo.

Arno Gropengiesser, presidente SSIMF

Hommage à Michel Aubert

Les anciens membres de la CRM qui l'ont côtoyé – certains pendant quinze ans - ont eu un pincement au cœur début mai en apprenant le décès de Michel. Avec émotion, ils ont pu raviver bien des souvenirs de ce collègue exceptionnel.

Michel a été accueilli à la CRM en 1978. D'emblée, ce nouveau collègue si cordial, toujours bien mis, en permanence à l'écoute des autres, a impressionné. La CRM, à l'époque, était plongée dans les travaux de rédaction et d'édition de la série « Fundamentum ». Par son expérience de professeur au gymnase de Chamblandes, Michel avait des idées claires sur les besoins en moyens d'enseignement des mathématiques. Il sut les mettre en pratique en s'associant avec enthousiasme à cette tâche d'une grande ampleur.

Ceux qui ont eu le privilège de travailler avec lui à l'élaboration de ces ouvrages se souviennent d'âpres discussions au cours desquelles Michel jouait de manière naturelle le rôle de modérateur. Avec succès ! Son sens de la diplomatie lui permettait de ramener dans un chemin raisonnable ceux qui, parfois, s'égarèrent. Grâce à lui, les travaux de rédaction ont pu déboucher sur des ouvrages équilibrés et bien adaptés aux classes des gymnases ou des lycées de Suisse romande.

C'est tout naturellement que la CRM l'élut à sa présidence, fonction qu'il occupa avec brio de 1990 à 1993, avant d'être appelé à la tête de la SSPMP, puis de la SSPE. En tant que membre, puis président de la CRM, Michel s'est beaucoup investi, il a consacré son temps sans compter non seulement à la rédaction des « Fundamentum », mais aussi à des problèmes d'édition particulièrement délicats, mais toujours surmontés.

Au-delà de ces questions, il faut surtout relever avec quelle conviction et quelle opiniâtreté il s'est battu pour défendre un enseignement de qualité des mathématiques. Qu'il s'agisse d'organiser des forums ou des cours de perfectionnement, de se prononcer sur un projet de nouvelle maturité, de participer en tant qu'expert aux examens fédéraux de maturité, Michel a apporté dans tous les domaines un point de vue critique toujours bien étayé. Sa grande culture et son amour des mathématiques ont fait que partout, il était écouté et reconnu.

En pensant à tous les moments d'amitié partagée, nous lui sommes reconnaissants d'avoir, par ses compétences, sa générosité et son dévouement, écrit quelques-unes des plus belles pages de l'histoire de la CRM.

Au nom de ses collègues de la CRM :

Frédy Gertsch



Étude qualitative des équilibres d'un modèle dynamique de population

Alain Stucki, lycée cantonal de Porrentruy

Introduction

Ce texte fait référence à un chapitre d'un cours que j'ai déjà donné trois fois à des élèves de l'option spécifique «Physique et applications des mathématiques» au lycée de Porrentruy. Cette thématique a toujours intéressé les étudiants.

Par dynamique de population, on entend l'étude de la variation du nombre d'individus d'un groupe d'êtres vivants au cours du temps. Ce type d'analyse est essentiel pour contrôler la gestion de la pêche ou de la chasse, pour prévoir le nombre d'individus nécessaires à la réintroduction d'une espèce animale dans un environnement, etc..

Le but des modèles est de prédire le type d'évolution d'une population donnée soumise ou non à des contraintes, c'est-à-dire savoir si la population reste stable, si elle est croissante ou décroissante et s'il existe des risques d'extinction (e.g. pour une population animale utile à l'homme) ou d'explosion (e.g. pour des nuisibles à l'homme).

Dans cet article, nous allons donner quelques outils permettant une étude qualitative des équilibres des solutions de l'équation différentielle liée à une dynamique.

Le modèle logistique comme exemple introductif

C'est vers 1840 que le mathématicien belge Pierre Verhulst propose un modèle de croissance de la population non exponentiel qu'il nomma «logistique» (ceci en réponse au modèle exponentiel et sans frein proposé par Thomas Malthus vers 1800).

Soit $P(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t . En écrivant que le taux de variation est proportionnel au nombre d'individus présents à l'instant t , soit

$$\frac{dP}{dt} = r P$$

on obtient le modèle malthusien avec un taux de croissance relatif r constant

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = r.$$

L'idée de Verhulst est de supposer que si la croissance d'une population est effectivement exponentielle lorsque le nombre d'individus est faible, elle se stabilise petit à petit vers une capacité maximale à cause de ressources (nourriture, grandeur du territoire, etc.) limitées. Le taux de croissance relatif doit donc diminuer lorsque la population P augmente. Pour tenir compte de ces constatations, Verhulst imagine que le taux de natalité $n(P)$ est une fonction affine décroissante (voire constante), et que le taux de mortalité $m(P)$ est une fonction affine croissante. Le taux de croissance relatif devient $(n(P) - m(P))$, et on peut écrire

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (n(P) - m(P)).$$

Compte tenu du type des fonctions $n(P)$ et $m(P)$ et en supposant que le taux de croissance est positif pour P petit, l'équation peut s'écrire

$$\frac{dP}{dt} = P(r - qP) \quad r, q \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad r, K \geq 0, \quad (1)$$

cette dernière version étant la forme la plus courante de l'équation logistique.

On remarque facilement que le taux de croissance relatif est bien proche de r lorsque la population P est petite, qu'il diminue lorsque P augmente et qu'il devient même négatif lorsque la population dépasse la valeur K .

L'équation (1) est à variable séparable et moyennant une petite décomposition en éléments simples, on obtient les solutions qui sont de la forme

$$P(t) = \frac{K}{1 + A e^{-rt}} \quad \text{où} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0} \quad \text{et} \quad P_0 = P(0)$$

Voici trois solutions (FIG.1) dessinées dans le champ de vecteurs correspondant à une équation logistique.

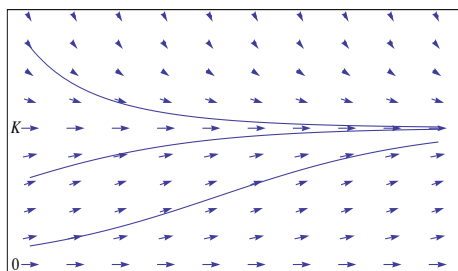


FIGURE 1

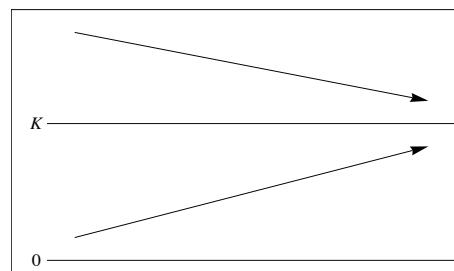


FIGURE 2

Il est intéressant de remarquer que $P = K$ est un *équilibre stable* ou *attractif*. En effet, quelle que soit la population au temps $t = 0$ (mais non nulle), la courbe d'évolution est attirée par $P = K$. Autrement dit, dès que l'on s'éloigne de cet équilibre, on est condamné à y revenir. Cette valeur K est appelée *capacité maximale*, ou *capacité biotique* ou encore *capacité d'accueil*.

Par contre l'équilibre $P = 0$ est *instable* : dès que l'on s'en écarte un peu, on s'en éloigne définitivement.

En fait, la résolution complète est souvent inutile (et souvent impossible!). La connaissance des équilibres et la variation des solutions suffisent pour établir le graphique de la FIG.2 qui renseigne parfaitement sur l'évolution de la population.

Recherche des équilibres et de leurs natures

On va s'intéresser à une dynamique $P(t)$ qui satisfait une équation de la forme

$$\frac{dP(t)}{dt} = f(P(t)). \quad (2)$$

On appelle *population d'équilibre* un nombre P^* tel que $P(t) = P^*$ pour tout $t \geq 0$. Il s'agit d'une solution constante de l'équation différentielle et par conséquent sa dérivée est nulle. On a donc la condition $f(P^*) = 0$.

Résultat 1 Les populations d'équilibre P_i^* d'une dynamique de type (2) sont les zéros de la fonction f .

Notons que pour des dynamiques de type (2), le champ de vecteurs donne des pentes identiques sur les horizontales $P(t) = \text{constante}$ car f dépend de la fonction $P(t)$ sans dépendre explicitement de la variable t (e.g. FIG.1). Ainsi, le signe de la fonction $f(P(t)) = P'(t)$ donne le sens de variation des solutions $P(t)$ quand la population initiale se situe entre deux équilibres ou au-delà de l'équilibre le plus grand.

Une caractérisation de la nature d'un équilibre peut se faire à l'aide de $f'(P)$.

Résultat 2 Si $f'(P^*) < 0$ (respectivement $f'(P^*) > 0$), alors P^* est un équilibre stable (respectivement instable). Si $f'(P^*) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

Ce résultat se justifie ainsi : si $f'(P^*) < 0$, alors la courbe représentative de f est décroissante au voisinage du point P^* et le taux de variation de $P(t)$ passe de valeurs positives à des valeurs négatives. Par conséquent, dans un voisinage de P^* ne contenant pas d'autre équilibre, les courbes $P(t)$ où la population initiale est plus petite que P^* sont croissantes et celles où la population initiale est plus grande que P^* sont décroissantes ; ces courbes n'ont pas d'autres choix que d'avoir un comportement asymptotique $P(t) = P^*$ et l'équilibre est stable. Le raisonnement est identique si $f'(P^*) > 0$ pour un équilibre instable.

Exemples

1. Si on applique les résultats ci-dessus à la fonction logistique, les points d'équilibre s'obtiennent en résolvant $f(P) = rP(1 - \frac{P}{K}) = 0$ et on trouve bien les deux points d'équilibre $P_1^* = 0$ et $P_2^* = K$.

La nature de ces points s'étudie via la dérivée seconde. Calculons $f'(P) = r(1 - \frac{2P}{K})$, $f'(0) = r$ et $f'(K) = -r$. En supposant r positif (taux de croissance intrinsèque de la population si P petit), on obtient bien que $P_1^* = 0$ est un équilibre instable et que $P_2^* = K$ est un équilibre stable.

2. Considérons la dynamique correspondant à l'équation

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = 0.1P - 6\sqrt{P}$$

Cette dynamique pourrait correspondre à une population d'insectes qui se regroupent en essaim ou une population de poissons qui se regroupent en banc. Le taux de croissance intrinsèque serait de 0.2 mais un taux de mortalité élevé existerait pour les individus se trouvant à la périphérie du groupe (existence de prédateurs, victimes du froid, etc.).

Les équilibres sont donnés par $f(P) = 0$, et on obtient $P_1^* = 0$ et $P_2^* = 3600$. Comme $f'(P) = 0,1 - \frac{3}{\sqrt{P}}$, $f'(0)$ n'existe pas et on ne peut pas conclure quant à la nature de $P_1^* = 0$. Par contre, l'équilibre est instable en $P_2^* = 3600$ car $f'(3600) = 0,05 > 0$.

La nature de $P_2^* = 3600$ et le signe de $f(P(t)) = P'(t)$ (FIG. 3) permettent d'établir le schéma de la FIG. 4 qui nous donne l'évolution des solutions

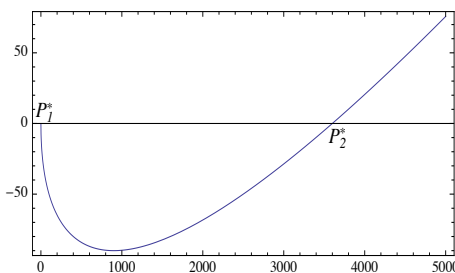


FIGURE 3

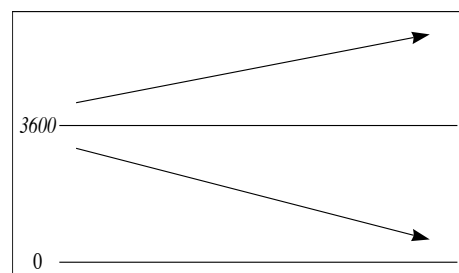


FIGURE 4

Ainsi, l'équilibre $P_1^* = 0$ est attractif. De plus, il y a explosion si la population initiale dépasse 3600 (ce qui serait problématique dans le cas d'une population de nuisibles), et extinction si la population initiale est inférieure à 3600 (ce qui serait problématique dans le cas d'une population qui constitue une ressource alimentaire pour l'homme).

3. Étude d'un modèle de pêche avec prélèvement constant.

On suppose que la dynamique d'une population de poissons est de type logistique en absence d'exploitation. Si on décide d'effectuer un prélèvement constant q , l'évolution de la taille de la population peut être modélisée par

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - q.$$

Les équilibres sont donnés par $f(P) = 0$, et on obtient $P_{1,2}^* = \frac{Kr \pm \sqrt{Kr(Kr-4q)}}{2r}$.

1) Si $q > \frac{Kr}{4}$, alors il n'y a pas d'équilibre (discriminant négatif car $K, r, q > 0$).

2) Si $q = \frac{Kr}{4}$, alors il existe un unique équilibre $P_1^* = \frac{K}{2}$.

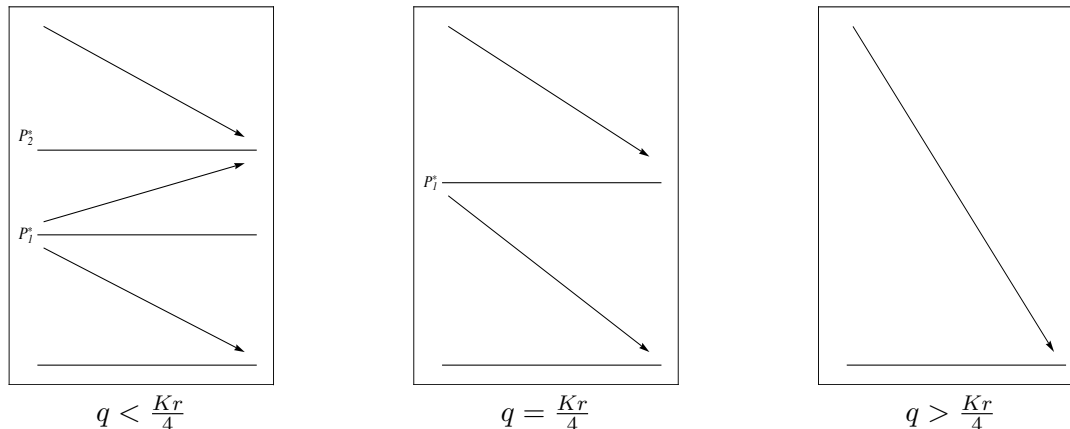
3) Si $q < \frac{Kr}{4}$, alors il y a deux équilibres $P_{1,2}^* = \frac{Kr \pm \sqrt{Kr(Kr-4q)}}{2r}$.

Afin de déterminer la nature des équilibres, calculons $f'(P) = r \left(1 - \frac{2P}{K}\right)$.

Dans le cas 2), $f'(\frac{K}{2}) = 0$ et on ne peut pas conclure.

Dans le cas 3), $f'(P_1^* = \frac{Kr - \sqrt{Kr(Kr-4q)}}{2r}) = \frac{\sqrt{Kr(Kr-4q)}}{K} > 0$ indique que l'équilibre P_1^* est instable, et $f'(P_2^* = \frac{Kr + \sqrt{Kr(Kr-4q)}}{2r}) = -\frac{\sqrt{Kr(Kr-4q)}}{K} < 0$ atteste d'un équilibre stable en P_2^* .

Ces résultats et le signe du graphe de la fonction $f(P)$ (parabole tournée vers le bas) nous permettent d'établir les graphiques correspondant à chacun des trois cas.



La décision d'octroyer un quota de pêche doit évidemment dépendre des évolutions décrites par ces graphiques. On note en particulier que pour les deux premiers cas, si la population initiale de poissons est inférieure à P_1^* , un quota satisfaisant la condition du cas respectif mène à l'extinction. Dans le troisième cas, tous les quotas $q > \frac{Kr}{4}$ mènent à l'extinction, quelle que soit la population initiale.

Dans un prochain article, je traiterai de dynamiques à deux espèces en compétition. A+.

Références

- [1] Analyse Volume 1. Fonctions d'une variable, James Stewart, p. 537-544
- [2] Cours de Licence SV1 des professeurs Diener : <http://math.unice.fr/~diener/>

Les origines de notre enseignement de la géométrie analytique

Jean-Daniel Voelke, Gymnase Auguste Piccard, Lausanne

1^{ère} partie¹

Introduction

La géométrie analytique prend naissance au 17^e siècle avec *La Géométrie* de René Descartes [Descartes, 1637] et *l'Introduction aux lieux plans et solides* de Pierre de Fermat [Fermat, 1679]². L'objectif principal de Descartes est de résoudre des problèmes géométriques. Sa méthode consiste à traduire en équations l'énoncé d'un problème, à résoudre ces équations et à chercher enfin une construction de la solution. Descartes résout en particulier le célèbre problème dit «de Pappus»³ en utilisant une nouvelle technique consistant à repérer les points du plan par des coordonnées. Un lieu (i.e. une courbe) est alors représenté par une équation à deux inconnues. Cette technique rend possible l'étude des propriétés d'une courbe à partir de son équation; elle est considérée aujourd'hui comme la caractéristique constituante de la géométrie analytique, même s'il ne s'agit en fait pas de l'élément fondamental du mémoire de Descartes⁴. On retrouve cette caractéristique dans le mémoire de Fermat. Il introduit des coordonnées dans le plan et considère qu'une équation à deux inconnues représente un lieu. Il montre ensuite qu'une équation du 1^{er} degré représente une droite et une équation du 2^e degré un cercle ou une conique.

La géométrie analytique de Descartes et Fermat a peu de points communs avec celle que nous enseignons aujourd'hui au niveau gymnasial. Il n'y a qu'un axe de coordonnées sur lequel une origine est fixée. Les coordonnées sont des grandeurs au sens d'Euclide (segments) et non des nombres. La considération de coordonnées négatives n'est donc pas possible. Conformément à la tradition antique, les deux mathématiciens travaillent avec des expressions homogènes⁵, même si Descartes montre que cela n'est pas nécessaire si l'on introduit une unité de longueur. Les figures pour lesquelles Descartes donne une équation sont des coniques ou des courbes d'un degré supérieur. On ne trouve dans *La Géométrie* qu'une brève allusion au fait qu'une équation du 1^{er} degré représente une droite. L'appellation «équation cartésienne de la droite» n'est donc pas justifiée et il serait plus correct de parler d'équation «fermatienne». Comme indiqué précédemment, Fermat commence en effet son mémoire en étudiant le lieu représenté par une équation du 1^{er} degré.

¹ La seconde partie de cet article sera publiée dans le prochain numéro du *Bulletin*. L'intégralité de l'article est disponible dès maintenant à l'adresse www.sspmp.ch/crm/article.

² Le mémoire de Descartes fut publié en annexe au *Discours de la méthode*. Le texte de Fermat ne comporte qu'une douzaine de pages; il est en latin et fut rédigé vers 1636. Il fut ensuite diffusé parmi les mathématiciens parisiens mais publié seulement de manière posthume.

³ Considérons quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4 et quatre angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 . Soit P un point du plan. Notons e_i ($i=1,2,3,4$) la distance de P à la droite d_i mesurée selon l'angle α_i . Le problème consiste à déterminer le lieu des points P tels que $e_1 e_2 = e_3 e_4$. Descartes donne l'équation de ce lieu et démontre qu'il s'agit d'une conique. Le problème peut se généraliser à un nombre quelconque de droites.

⁴ Cf. [Bos, 2001, 227]

⁵ Dans cette tradition, on ne peut additionner ou comparer que des grandeurs de même dimension. Une expression de la forme $ax + b$ n'a donc pas de sens; cela reviendrait à additionner une aire et une ligne. Il faut écrire $ax + b^2$.

Après Descartes et Fermat, la géométrie analytique va se développer durant la seconde moitié du 17^e siècle puis tout au long du 18^e siècle⁶. L'identification des coordonnées à des nombres et la considération de coordonnées négatives vont progressivement s'imposer et sont relativement bien établies au milieu du 18^e siècle⁷. La géométrie analytique se développe aussi dans l'espace. Les figures étudiées par les géomètres restent cependant en premier lieu des courbes ou des surfaces et ce n'est qu'incidemment que l'on rencontre la droite, le cercle, le plan ou la sphère. Cette situation apparaît bien dans le second volume du traité de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* [Euler, 1748], ouvrage présentant une synthèse des résultats obtenus en géométrie analytique à cette époque. Euler établit l'équation de la droite mais ne résout pas de problèmes faisant intervenir uniquement cette figure. Il affirme que la nature de la droite est «déjà assez connue par les éléments de géométrie»⁸ et passe immédiatement à l'étude des courbes du 2^e degré. La droite ou le plan sont des figures trop simples pour retenir l'attention des géomètres. Cette situation va cependant évoluer à la fin du 18^e siècle avec tout d'abord la publication d'un important mémoire de Joseph-Louis Lagrange intitulé *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* [Lagrange, 1773]. L'auteur calcule le volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses sommets. Il calcule aussi les coordonnées du centre ainsi que le rayon des sphères inscrite et circonscrite au tétraèdre. Il détermine également les coordonnées de son centre de gravité. Dans son mémoire, Lagrange revendique des «solutions purement analytiques qui peuvent même être entendues sans figures.»⁹ Il introduit une série de notations dans lesquelles le lecteur moderne reconnaît le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs ainsi que le produit mixte ou déterminant de trois vecteurs¹⁰. Lagrange utilise systématiquement la formule donnant la distance de deux points dans l'espace, formule rarement utilisée jusque-là. Il établit et utilise aussi la formule donnant la distance d'un point à un plan. A la même époque, Gaspard Monge est amené à résoudre des problèmes analogues. Dans un mémoire sur les développées rédigé en 1771 mais publié seulement en 1785, il doit d'abord résoudre les deux problèmes de géométrie analytique suivants: 1^o trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée par ses deux équations et 2^o trouver les équations d'une droite menée d'un point donné perpendiculairement à une droite donnée. Ces problèmes n'avaient pas été traités jusque-là¹¹. En 1794, Monge participe à la création de l'Ecole Polytechnique. Il y enseigne en 1795 la géométrie descriptive et l'application de l'analyse à la géométrie. Ses cours exerceront une influence déterminante sur une génération de mathématiciens et donneront en particulier naissance à une série de manuels de géométrie analytique publiés en France au début du 19^e siècle. Ils peuvent être considérés comme les premiers manuels modernes. Avant de les examiner, il convient de présenter plus en détail les résultats présentés à ses élèves par Monge.

⁶ Le terme généralement utilisé à cette époque est «application de l'analyse à la géométrie». L'appellation «géométrie analytique» n'apparaît qu'au début du 19^e siècle (cf. 2^e partie de l'article).

⁷ Cf. [Boyer, 1956, chapitre VII]

⁸ [Euler, 1748-1797, 39]

⁹ [Lagrange, 1773-1869, 661]

¹⁰ Lagrange établit en particulier l'identité qui porte aujourd'hui son nom. Dans le langage vectoriel, elle s'exprime sous la forme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$.

¹¹ Ces renseignements sont tirés de [Taton, 1951, 115].

L'enseignement de Monge

Dans le cadre de son cours d'application de l'analyse à la géométrie de 1795, Monge rédige ses *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* [Monge, 1795]. Il s'agit d'un résumé de ses leçons. Ces feuilles connaîtront une deuxième édition en 1801¹². Les quatorze premières pages constituent le premier exposé systématique de la géométrie analytique de la droite et du plan. Le premier paragraphe est consacré à l'équation de la droite dans le plan. Monge écrit sans préambule:

« En nommant x et z les coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite considérée sur un plan est $x = az + b$, dans laquelle b est la valeur de l'ordonnée x qui correspond à l'origine, et a est la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des z . » [Monge, 1801, no1]

Ces premières lignes témoignent de la concision qui caractérise l'exposé de Monge. La définition des coordonnées et la question de leur signe ne font l'objet d'aucune discussion. Ces notions sont claires. Monge ne juge non plus pas nécessaire d'expliquer pourquoi l'équation d'une droite est du 1^{er} degré et démontre immédiatement que si deux droites d'équation $x = az + b$ et $x = a'z + b'$ sont perpendiculaires, on a $aa' + 1 = 0$. Sa justification revient à dire que les angles directeurs α et α' diffèrent de $\frac{\pi}{2}$ et que l'on a alors $a' = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\cot(\alpha) = -\frac{1}{a}$.

Monge ne poursuit pas davantage l'étude de la géométrie analytique dans le plan et passe à l'espace. Ses raisonnements ne comportent pas de figures et font à plusieurs reprises appel au point de vue de la géométrie descriptive. Dans son livre *Géométrie descriptive* [Monge, 1799], il relève à ce propos que la géométrie descriptive et l'algèbre «ont les rapports les plus intimes et qu'il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse.» Il ajoute que ces deux sciences devraient être «cultivées ensemble.»¹³

Monge considère qu'une droite de l'espace est déterminée par ses deux projections sur les plans de

coordonnées verticaux. Ses équations peuvent donc être mises sous la forme $\begin{cases} x = az + b \\ y = a'z + b' \end{cases}$. Les

équations d'une droite passant par le point (x', y', z') seront alors $\begin{cases} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = a'(z - z') \end{cases}$. On constate,

en utilisant une terminologie moderne, que le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ a' \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la

droite. En procédant par élimination, Monge montre que les équations de la droite passant par les

points (x', y', z') et (x'', y'', z'') sont $\begin{cases} x(z' - z'') = z(x' - x'') + x''z' - x'z'' \\ y(z' - z'') = z(y' - y'') + z'y'' - z''y' \end{cases}$. Il termine le paragraphe

consacré à la droite dans l'espace en donnant la formule permettant de calculer la distance de deux points.

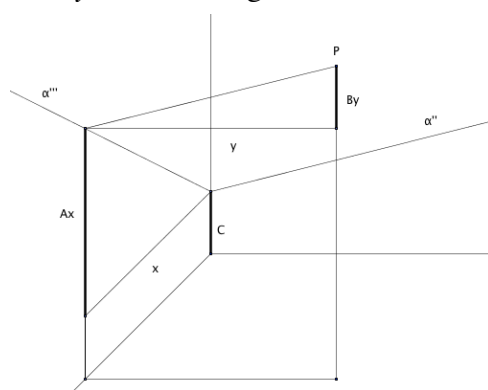
Monge établit ensuite l'équation du plan dans l'espace. Voici comment il raisonne:

¹² C'est sur cette édition que je me fonderai, la première étant pratiquement introuvable. Taton affirme qu'il n'y a quasiment pas de différences entre les deux éditions.

¹³ [Monge, 1799, 16]; cet ouvrage est issu de leçons données à l'École Normale de l'an III.

« Supposons que le plan donné soit connu, 1°. par son ordonnée verticale à l'origine, ordonnée que nous représentons par C ; 2°. par les angles que ses deux traces sur les plans verticaux forment avec l'horizon; et que les tangentes de ces angles soient A pour celui qui est dans le plan des x, z , et B pour celui qui est dans le plan des y, z .

Le plan pouvant être considéré comme engendré par le mouvement d'une des traces parallèles à elle-même le long de l'autre, pour un point pris sur le plan, et correspondant aux ordonnées x, y , la verticale z sera composée de trois parties: 1°, de l'ordonnée verticale C à l'origine; 2°, de la quantité Ax , dont la trace mobile s'élève le long de l'autre, pour se transporter sur le point; 3°, de la quantité By , dont il faut s'élever sur la trace mobile pour aller de la trace fixe au point. Ainsi l'équation d'un plan est $z = Ax + By + C$. » [Monge, 1801, no1]



On retrouve ici la méthode de la géométrie descriptive: un plan est représenté par ses traces. L'idée de considérer une surface comme engendrée par le mouvement d'une ligne (droite ou courbe) est une autre caractéristique de la méthode de Monge¹⁴.

L'équation d'un plan passant par un point (x', y', z') est $z - z' = A(x - x') + B(y - y')$. Monge note que l'équation d'un plan peut être mise sous la forme générale $Ax + By + Cz + D = 0$. Il détermine ensuite l'équation du plan passant par trois points (x, y, z) , (x', y', z') et (x'', y'', z'') . En procédant par élimination, il obtient les valeurs des coefficients A , B , C et D en fonction des coordonnées des trois points.

Après avoir établi les équations de la droite et du plan dans l'espace, Monge résout un certain nombre de problèmes. Il calcule d'abord les angles formés par un plan avec les plans de coordonnées puis établit un critère pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan. Son raisonnement est à nouveau issu de la géométrie descriptive. Monge utilise le fait que si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette droite sur les plans de coordonnées sont perpendiculaires aux traces du plan. Il en déduit que si les équations du plan et de la droite sont

$Ax + By + Cz + D = 0$ et $\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases}$, on a les égalités $A = aC$ et $B = bC$. Cela revient à dire, en

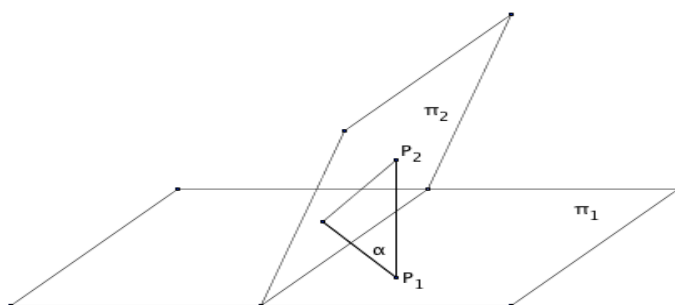
utilisant le langage vectoriel, que le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ de la droite est colinéaire au

¹⁴ Cette idée est longuement développée au début de la *Géométrie descriptive* [Monge, 1799, 18-20].

vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ normal au plan. Ce critère lui permet d'établir les équations d'une droite d

passant par un point P donné et perpendiculaire à un plan π donné; il peut alors calculer les coordonnées du point d'intersection P' de d et π et la longueur du segment PP' ; il obtient ainsi la formule connue donnant la distance d'un point à un plan. Ce critère lui permet aussi d'établir l'équation d'un plan π passant par un point donné P et perpendiculaire à une droite donnée d ; il peut alors calculer les coordonnées du point d'intersection P' de d et π et la longueur du segment PP' ; il obtient de cette manière la formule donnant la distance d'un point à une droite. Monge établit aussi un critère pour que deux droites soient concourantes et un critère pour qu'elles soient orthogonales. Grâce à ces deux critères, il obtient les équations de la droite p passant par un point donné P et perpendiculaire à une droite donnée d . Monge calcule également l'angle de deux plans. Expliquons sa méthode. Soient $Ax + By + Cz + D = 0$ et $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations des deux plans. Monge remarque d'abord qu'il suffit de calculer l'angle entre les plans parallèles à ces plans et passant par l'origine. Il poursuit:

« Par un point pris à volonté sur le second plan, concevons une perpendiculaire abaissée sur le premier, et du pied de cette perpendiculaire concevons-en une autre abaissée sur le second plan. Il est évident que le quotient de la seconde perpendiculaire divisée par la première, est le cosinus de l'angle formé par les deux plans. Il ne reste donc plus qu'à trouver les grandeurs des perpendiculaires.» [Monge, 1801, no2]



En utilisant la formule donnant la distance d'un point à un plan, Monge obtient la valeur du cosinus de l'angle entre les deux plans: $\cos(\alpha) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$. Il remarque que l'égalité

$AA' + BB' + CC' = 0$ exprime la condition pour que les deux plans soient perpendiculaires, résultat que nous interprétons aujourd'hui de manière vectorielle.

Monge aborde ensuite un autre problème: deux plans étant donnés, trouver les équations des projections sur les plans de coordonnées de la droite d'intersection de ces plans. Il obtient ainsi une nouvelle manière de représenter analytiquement une droite. Voici quelques détails. Soient $Ax + By + Cz + D = 0$ et $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations des deux plans. Si l'on élimine z , on obtient $(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y + (DC' - D'C) = 0$. C'est l'équation de la projection de la droite sur le plan Oxy . On obtient de la même manière les équations des projections de cette droite sur les plans Oyz et Oxz . Monge introduit les notations suivantes: $BC' - B'C = l$, $CA' - C'A = m$, $AB' - A'B = n$, $DA' - D'A = \lambda$, $DB' - D'B = \mu$ et $DC' - D'C = \nu$. Les équations des projections de

la droite sur les différents plans de coordonnées prennent la forme suivante: $ly - mx + v = 0$, $mz - ny + \lambda = 0$ et $nx - lz + \mu = 0$. Les six constantes l , m , n , λ , μ , v sont déterminées à proportionnalité près et satisfont à la relation $l\lambda + m\mu + nv = 0$ ¹⁵. Seules quatre d'entre elles sont donc nécessaires. Monge juge que c'est «sous cette forme générale qu'il est le plus avantageux de mettre les équations d'une ligne donnée dans l'espace.»¹⁶

Le critère de perpendicularité entre un plan et une droite montre que le plan passant par l'origine et perpendiculaire à la droite a comme équation $lx + my + nz = 0$. L'angle de deux droites étant égal à l'angle formé par deux plans passant par l'origine et perpendiculaires à ces droites, le cosinus de cet

angle est égal à $\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}$; les deux droites sont donc orthogonales si et

seulement si $ll' + mm' + nn' = 0$. Monge calcule de la même manière l'angle d'une droite et d'un plan. Il termine son exposé en calculant la plus courte distance de deux droites et en établissant l'équation de la perpendiculaire commune à deux droites. Expliquons brièvement sa méthode. Il fait passer par les deux droites deux plans parallèles. Il calcule ensuite la distance de l'origine à chacun de ces plans. La différence de ces distances est égale à la distance des deux droites. Elle s'exprime à partir des six coefficients de chaque droite. La recherche de la perpendiculaire commune aux deux droites s'effectue en résolvant un système de cinq équations à six inconnues. La première est l'équation $l\lambda + m\mu + nv = 0$ liant les coefficients de la droite inconnue. Les quatre autres équations expriment que cette droite est orthogonale aux deux droites données et en même temps sécante.

¹⁵ On vérifie facilement que l , m et n sont les composantes d'un vecteur directeur de la droite.

¹⁶ [Monge, 1801, no2]

Bibliographie

Bos Henk

2001 *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer

Boyer Carl

1956 *History of analytic geometry*; réédition, Dover, New-York, 2004

Descartes René

1637 *La Géométrie; Œuvres de Descartes*, vol.6, 367-485, Vrin, Paris, 1996

Euler Leonhard

1748 *Introductio in Analysin infinitorum*, Lausanne; traduction française, Barrois, Paris, 1797

Fermat Pierre de

1679 *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge; Œuvres de Fermat*, vol.1, 91-103, Gauthier-Villars, Paris, 1891

Lagrange Joseph-Louis

1773 Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin, 149-176; *Oeuvres*, vol.3, 662-692, Paris, 1869

Monge Gaspard

1795 *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*; 2^e édition, Baudoin, Paris, 18011799 *Géométrie descriptive, Leçons données aux Ecoles Normales, l'an 3 de la République*, Baudoin, Paris; réédition, Jacques Gabay, 1989

Taton René

1952 *L'œuvre scientifique de Monge*, Presses universitaires de France, Paris

DPK

Rundbogen

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

In den Frühlingsferien spazierte ich in Disentis zum Bahnhof und lief auf dem Weg dorthin unter einer dieser schönen, steinernen Eisenbahnbrücken der RhB hindurch. Die Bögen des Viadukts schienen mir Halbkreise zu sein. Freie Bögen oder Tonnengewölbe müssen nur ihr eigenes Gewicht tragen. Die optimale Form ist eine Katenoide. Aber der Bogen des Viadukts trägt ja mehr als nur den Bogen. Ist dann der Kreis die optimale Form? Im zweiten Abschnitt wird die bekannte Rechnung für die Kettenlinie ins Gedächtnis gerufen, um sie in den folgenden Abschnitten variieren zu können.

2 Kettenlinie

Robert Hooke hatte 1675 die Idee, den freien Bogen als umgedrehte Kettenlinie zu betrachten [1]. Die Kette ist nur auf Zug belastbar, d.h. die Drehmomente auf die Kettenglieder verschwinden. Dreht man die Kette um, so erhält man eine sog. Stützlinie, d. h. einen Bogen, der nur auf Druck belastet ist. Die Stützlinie eines freien Bogens ist also eine umgedrehte Katenoide, siehe Abbildung 1. Natürlich müssen geeignete Idealisierungen gemacht werden: Der Bogen ist dünn und das Gewicht pro Länge ist konstant.

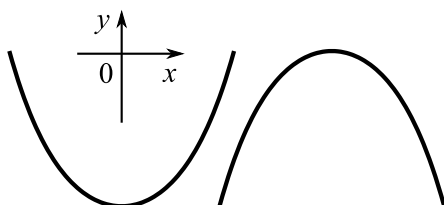


Abbildung 1: Ein freitragender Bogen hat die Form einer umgedrehten Katenoide.

Auf ein Kettenglied der Länge dl wirken drei Kräfte, siehe Abbildung 2: Die Zugkraft des oberen Kettenstücks mit Komponenten F_x und F_y , die Erdanziehungskraft dF_y auf das Glied sowie die Zugkraft des Kettenstücks unterhalb des betrachteten Glieds. Weil das Kettenglied im Gleichgewicht ist, müssen sich die Kräfte kompensieren. Da die Kette flexibel ist, wirken die Zugkräfte tangential zur Kettenlinie, d.h.

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

Die horizontalen Zugkräfte F_x sind bei allen Gliedern gleich, sonst würden die Kettenglieder horizontal beschleunigen. F_x wird durch die Aufhängung (Lage der Befestigungspunkte, etc.) bestimmt und ist ein freier Parameter.

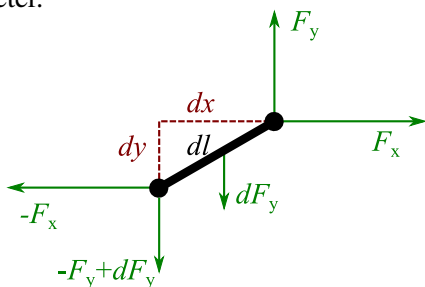


Abbildung 2: Auf ein Kettenglied der Länge dl wirken die Zugkraft der Kette oberhalb des Glieds (aufgeteilt in F_x und F_y), die Zugkraft der Kette darunter sowie die Gewichtskraft dF_y . Die Skizze ist nicht massstäblich.

Sei γ das längenspezifische Gewicht eines Kettenglieds, d.h. $\gamma = dF_y/dl$. Dann gilt

$$dF_y = \gamma \cdot dl = \gamma \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dF_y}{dx} = \gamma \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2)$$

Leiten wir Gleichung (1) nach x ab und verwenden (2), so erhalten wir die Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{F_x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3)$$

Die Lösung von (3) ist ein spezieller Cosinus hyperbolicus. Der Graph heisst Katenoide.

$$y = a \cdot \cosh \frac{x - x_S}{a} + c \quad (4)$$

Die freien Parameter x_S , $a = F_x/\gamma$ und c werden durch die Kettenlänge sowie die Randwerte (Aufhängpunkte) festgelegt.

Nun wollen wir dieses wohlbekanntes Thema etwas variieren.

3 Rundbogen

Bereits Robert Hooke hatte die Idee, zusätzliche Kräfte auf den Bogen durch Zusatzgewichte zu modellieren, um die Form der Stützlinie zu erhalten. Wie muss diese Zusatzbelastung verteilt sein, damit der Bogen kreisförmig wird? In Abbildung 3 sind die Zusatzgewichte dargestellt als Kettenstücke, die vertikal an einem Faden hängen: Die Länge der Kettenstücke ist dann proportional zur Last. Das Eigengewicht des Fadens sei jetzt vernachlässigbar gegen die Zusatzgewichte. Die hängenden Kettenstücke seien horizontal gleichabständig. Bei einem Torbogen kann man sich ja vorstellen, dass die Ziegelsteine vertikal darüber geschichtet werden und eine feste Breite haben.

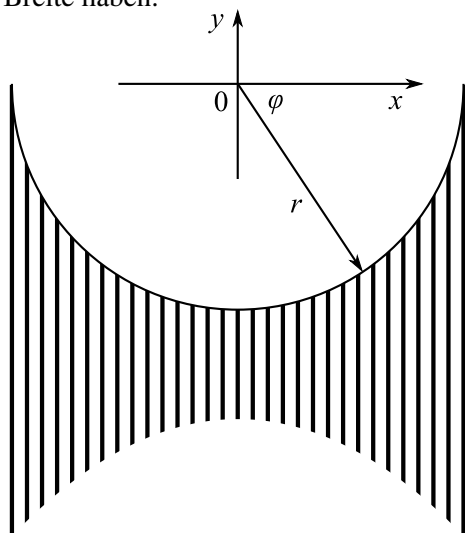


Abbildung 3: Wie muss der Faden belastet werden, damit er einen Halbkreis bildet? Die Zeichnung ist nicht massstäblich.

Die Kraft auf ein Fadenstück erfüllt immer noch Gleichung (1). Sei diesmal $\gamma(x)$ die gesuchte Lastverteilung, siehe Gleichung (5). Kombinieren wir die Gleichung (5) mit (1), so folgt (6).

$$\gamma(x) = \frac{dF_y}{dx} \quad (5)$$

$$\gamma(x) = F_x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6)$$

Wenn wir also für $y(x)$ die Halbkreis-Gleichung (7) einsetzen, erhalten wir direkt die Lastverteilung (8).

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad (7)$$

$$\gamma(x) = F_x \cdot \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} = F_x \cdot \frac{r^2}{y^3} = F_x \cdot \frac{r^2}{(r \sin \varphi)^3} = \frac{F_x}{r} \cdot \frac{1}{\sin^3 \varphi} \quad (8)$$

Die Lösung (8) findet man auch in [2]. Die Belastung müsste an den Aufhängepunkten sehr gross werden, damit der Faden dort vertikal hängt. Das ist unrealistisch und war zu erwarten. Der Rundbogen ist also keine optimale Form für dieses Problem. Zum Glück ist es baulich nicht so kritisch: Es genügt, wenn die Stützlinie innerhalb des Mauerbogens verläuft. Das ist leicht erfüllbar, wenn man genügend breite Steine nimmt. Früher hatte man ja immer das Problem, dass die Bögen von einfachen Handwerkern gebaut werden mussten. Komplizierte Formen liessen sich schlecht realisieren. Der Rundbogen oder der aus Kreisbögen zusammengesetzte Spitzbogen waren gute Kompromisse.

4 Viaduktbogen

Die Zusatzbelastung bei einem Viaduktbogen folgt nicht Gleichung (8). Der Viaduktbogen muss ja die Last des darüber liegenden Mauerwerks tragen. Modelliert als Faden, an den in gleichen horizontalen Abständen Ketten gehängt werden, müsste die Lastverteilung wie in Abbildung 4 aussehen, d.h.

$$\gamma(x) = \frac{dF_y}{dx} \propto y - y_1 \quad (9)$$

wobei y_1 die Koordinate ist, bis zu der alle Lastketten hinunter hängen (die Fahrbahn beim Eisenbahnviadukt ist horizontal). Damit folgt aus Gleichung (1) und (9) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \propto y - y_1 \quad (10)$$

Die Lösung von (10) ist ein Cosinus hyperbolicus (nicht unbedingt eine Kettenlinie).

$$y = a \cdot \cosh \frac{x - x_S}{b} + c \quad (11)$$

Die zweite Lösung von (10) wäre ein Sinus hyperbolicus, die aber ausser Betracht fällt, weil sie die falsche Symmetrie aufweist.

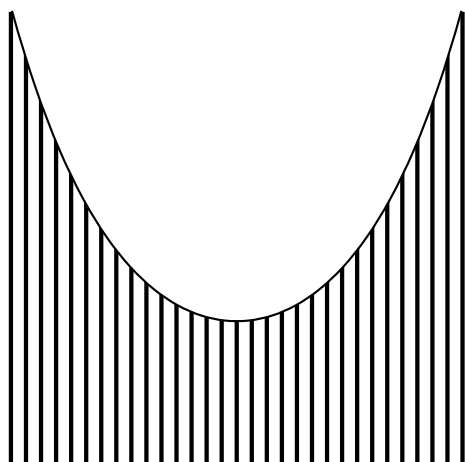


Abbildung 4: Welche Form nimmt der tragende Faden an, wenn er in der dargestellten Art durch angehängte Ketten belastet wird?

5 Ausblick: Hängebrücke

In derselben Weise kann auch die Form eines Hängebrückengurts berechnet werden: Diesmal sind die angehängten Lastketten alle gleich lang, denn jedes Hängeseil trägt denselben Anteil an der Fahrbahn, siehe Abbildung 5.

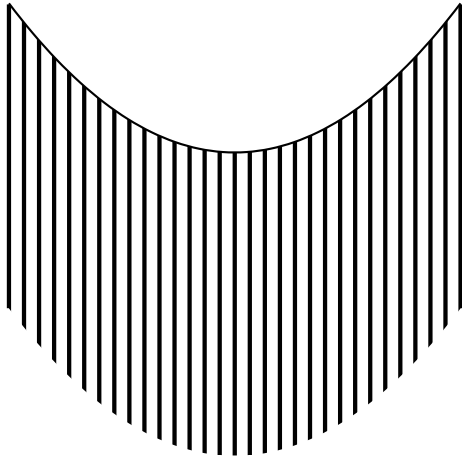


Abbildung 5: Welche Form nimmt der tragende Faden an, wenn er gleichmässig durch gleich schwere Ketten belastet wird?

In Gleichung (5) wird jetzt

$$\frac{dF_y}{dx} = \gamma = \text{const} \quad (12)$$

und Gleichung (6) vereinfacht sich zu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{F_x} = \text{const} \quad (13)$$

Die Lösung von (13) ist eine Parabel. Der Hängebrückengurt wird also durch die Hängeseile so belastet, dass er eine parabolische Form annimmt.

Literatur

[1] <http://ingenieurbüro-böttcher-asl.de/mediapool/88/885822/data/Gewoelbe.pdf> (Abruf am 30. April 2014)

[2] <http://de.wikipedia.org/wiki/Stützlinie> (Abruf am 30. April 2014)

26. Juni 2014/ Lie.

15. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht

Freitag, 14. November 2014, 13:00 - 17:30 Uhr an der EMPA, Dübendorf

Themen: Mobilität und Energie der Zukunft

- 13:00 - 13:30 Begrüssungskaffee in der EMPA-Akademie
- 13:30 - 13:40 **Begrüssung zum Anlass durch Andreas Vaterlaus, ETHZ**
- 13:40 - 14:10 **Begrüssung an der EMPA und Übersicht über die Forschung im Bereich Energie**
Dr. Brigitte Buchmann, Leiterin Departement Mobilität, Energie und Umwelt
- 14:10 - 14:40 **Technische Neuerungen in der Mobilität**
Christian Bach, Abteilungsleiter Verbrennungsmotoren, EMPA
- 14:40 - 15:00 **Kaffeepause mit Austauschmöglichkeit**
- 15:00 - 15:30 **Aktuelle Entwicklungen im Bereich Photovoltaik**
Dr. Stephan Bücheler, Dünnschichten und Photovoltaik, EMPA
- 15:30 - 16:30 **Führung in zwei Gruppen zu den Themen Photovoltaik und Mobilität**
Dr. Stephan Bücheler / Christian Bach
- 16:30 - 17:30 **Apéro in der Motorenhalle der EMPA**

(Referate: Input je 20 Min., anschliessend 10 Min. Fragen/Diskussion)

Treffpunkt:

Ort: EMPA-Akademie, Dübendorf (Der Weg ist ausgeschildert, Anfahrtsplan:

www.empa.ch/plugin/template/empa/*/25561/---/l=1)

Mailen, faxen oder schicken Sie die Anmeldung bitte spätestens bis zum 01. November 2014 an:

Andreas Vaterlaus, ETH Hönggerberg HPF G4.1 , 8093 Zürich.

FAX 044 633 1623

Email: vaterlaus@phys.ethz.ch

(für eine frühzeitige, ev. auch provisorische Anmeldung sind wir sehr dankbar!)

Kosten: keine

Angaben:

Name und Vorname:

Schule:

Email:

Schweizer Bronzemedaille beim IYPT in Shrewsbury (UK)

Wolfgang Pils, Pro IYPT-CH, wolfgang.pils@ksimlee.ch

Ende März wurde im Technopark Zürich zum siebten Mal das Swiss Young Physicists' Tournament (SYPT) ausgetragen. Das SYPT ist ein alljährlich stattfindender wissenschaftlicher Team-Wettbewerb für Mittelschülerinnen und Mittelschüler. Er bildet die Grundlage einer nationalen Qualifikation für das internationale Turnier IYPT. Zweier- und Dreier-Teams von verschiedenen Schulen verteidigten ihre Lösungen zu vorgegebenen Problemstellungen, die sie in den vorangegangenen Monaten im Physikunterricht und in ihrer Freizeit erarbeitet hatten. Als Beispiel stellt der Artikel "Loaded Hoop" in dieser Ausgabe eine Fragestellung aus diesem Jahr etwas detaillierter vor.

Das Bearbeiten von IYPT-Problemen und die Teilnahme an den "Fights" ist in höchstem Grade geprägt von selbstorganisiertem Lernen SOL und Immersion und eignet sich deshalb besonders für Unterrichtsfächer dieser Art.

Zu Beginn der Sommerferien reiste ein Team mit Schülerinnen und Schülern von der Zurich International School und vom MNG Rämibühl Zürich nach Shrewsbury. Nach dem Gewinn der Goldmedaille im letzten Jahr gab es diesmal immerhin Bronze.

Am 27./28. März 2015 findet das SYPT im Science Lab UZH auf dem Campus Irchel der Universität Zürich und das IYPT Ende Juni in Thailand statt. Die zu bearbeitenden Probleme sind auf der nächsten Seite abgedruckt.

Weitere Informationen: www.sypt.ch (Schweizer Wettbewerb), www.iypt.org (Internationale Website)

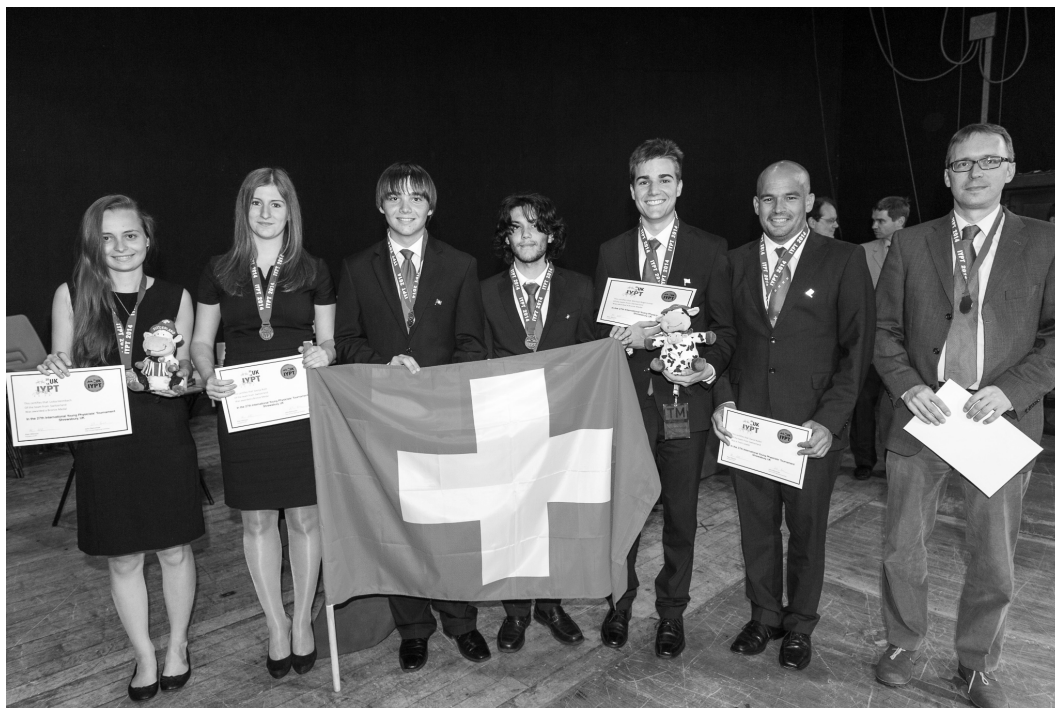


Abbildung 1: Schweizer Team beim IYPT 2014 in Shrewsbury (England)

Problems for the 28th IYPT 2015

Released by the IOC on July 11th, 2014

*"Would you tell me, please, which way I ought to walk from here?"
"That depends a good deal on where you want to get to," said the Cat.
Lewis Carroll*

1. Packing

The fraction of space occupied by granular particles depends on their shape. Pour non-spherical particles such as rice, matches, or M&M's candies into a box. How do characteristics like coordination number, orientational order, or the random close packing fraction depend on the relevant parameters?

2. Plume of Smoke

If a burning candle is covered by a transparent glass, the flame extinguishes and a steady upward stream of smoke is produced. Investigate the plume of smoke at various magnifications.

3. Artificial Muscle

Attach a polymer fishing line to an electric drill and apply tension to the line. As it twists, the fibre will form tight coils in a spring-like arrangement. Apply heat to the coils to permanently fix that spring-like shape. When you apply heat again, the coil will contract. Investigate this 'artificial muscle'.

4. Liquid Film Motor

Form a soap film on a flat frame. Put the film in an electric field parallel to the film surface and pass an electric current through the film. The film rotates in its plane. Investigate and explain the phenomenon.



5. Two Balloons

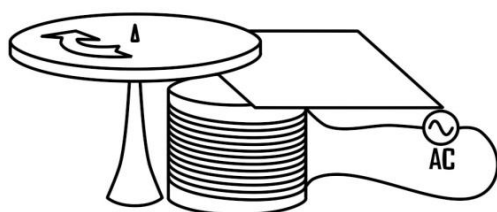
Two rubber balloons are partially inflated with air and connected together by a hose with a valve. It is found that depending on initial balloon volumes, the air can flow in different directions. Investigate this phenomenon.

6. Magnus Glider

Glue the bottoms of two light cups together to make a glider. Wind an elastic band around the centre and hold the free end that remains. While holding the glider, stretch the free end of the elastic band and then release the glider. Investigate its motion.

7. Shaded Pole

Place a non-ferromagnetic metal disk over an electromagnet powered by an AC supply. The disk will be repelled, but not rotated. However, if a non-ferromagnetic metal sheet is partially inserted between the electromagnet and the disk, the disk will rotate. Investigate the phenomenon.



8. Sugar and Salt

When a container with a layer of sugar water placed above a layer of salt water is illuminated, a distinctive fingering pattern may be seen in the projected shadow. Investigate the phenomenon and its dependence on the relevant parameters.

9. Hovercraft

A simple model hovercraft can be built using a CD and a balloon filled with air attached via a tube. Exiting air can lift the device making it float over a surface with low friction. Investigate how the relevant parameters influence the time of the 'low-friction' state.

10. Singing Blades of Grass

It is possible to produce a sound by blowing across a blade of grass, a paper strip or similar. Investigate this effect.

11. Cat's Whisker

The first semiconductor diodes, widely used in crystal radios, consisted of a thin wire that lightly touched a crystal of a semiconducting material (e.g. galena). Build your own 'cat's-whisker' diode and investigate its electrical properties.

12. Thick Lens

A bottle filled with a liquid can work as a lens. Arguably, such a bottle is dangerous if left on a table on a sunny day. Can one use such a 'lens' to scorch a surface?

13. Magnetic Pendulum

Make a light pendulum with a small magnet at the free end. An adjacent electromagnet connected to an AC power source of a much higher frequency than the natural frequency of the pendulum can lead to undamped oscillations with various amplitudes. Study and explain the phenomenon.

14. Circle of Light

When a laser beam is aimed at a wire, a circle of light can be observed on a screen perpendicular to the wire. Explain this phenomenon and investigate how it depends on the relevant parameters.

15. Moving Brush

A brush may start moving when placed on a vibrating horizontal surface. Investigate the motion.

16. Wet and Dark

Clothes can look darker or change colour when they get wet. Investigate the phenomenon.

17. Coffee Cup

Physicists like drinking coffee, however walking between laboratories with a cup of coffee can be problematic. Investigate how the shape of the cup, speed of walking and other parameters affect the likelihood of coffee being spilt while walking.

Authors: Alan Allinson, John Balcombe, Roderick Bloem, Artsiom Bury, Samuel Byland, Nikita Chernikov, Lars Gislén, Łukasz Gładczuk, Timotheus Hell, Mihály Hömöstre, Stanislav Krasulin, Valentin Lobyshev, Ilya Martchenko, Reza Montazeri Namin, Stanisław Świdwiński, Boris Vavřík, Evgeny Yunosov.

Problem selection committee: John Balcombe, Samuel Byland, Ilya Martchenko.

Epigraph selected by Evgeny Yunosov.

Loaded Hoop

Samuel Byland, MNG Rämibühl Zürich, samuel.byland@mng.ch

1 Einleitung

Viele der Probleme beim *International Young Physicists' Tournament* (kurz IYPT) eignen sich hervorragend als Ausgangspunkt für projektartigen Unterricht. Häufig genügen einfache Hilfsmittel für die experimentelle Untersuchung, und die theoretische Behandlung kann sowohl vom Niveau als auch von der Tiefe her passend gewählt werden. Als Anregung für interessierte Lehrpersonen werden wir in loser Folge einige interessante Probleme und Lösungsansätze von Schweizer Teilnehmerinnen und Teilnehmern im Bulletin vorstellen.

Das Problem “Loaded Hoop”, welches im Rahmen des IYPT 2014 zu bearbeiten war, lautet wie folgt: *“Fasten a small weight to the inside of a hoop and set the hoop in motion by giving it an initial push. Investigate the hoop’s motion.”*

In diesem Artikel wird am Beispiel der Schwingbewegung (für kleine und grosse Amplituden) auf eine mögliche Bewegung des Reifens eingegangen.

2 Theorie

2.1 Bewegungsgleichung

Für einen starren Reifen, der ohne zu rutschen oder zu springen rollt, lassen sich die Bewegungsgleichungen relativ einfach herleiten. Die wichtigsten Grössen sind in Abb. 1 angegeben.

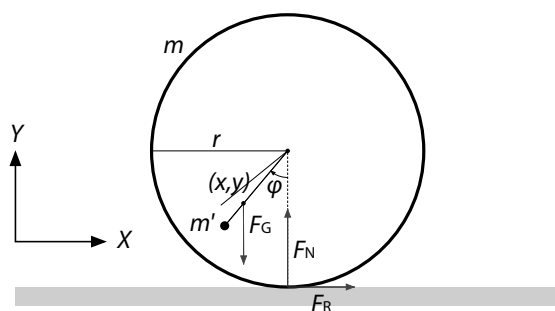


Abbildung 1: Reifen mit Masse m und Radius r mit Zusatzmasse m' im Abstand r' vom Zentrum. Die Pfeile bezeichnen Gewichtskraft (F_G), Normalkraft (F_N) und Haftreibung (F_R).

Die als punktförmig angenommene Zusatzmasse m' befindet sich im Abstand r' vom Zentrum des Reifens mit Radius r und Masse m . Der gemeinsame Schwerpunkt (Angriffspunkt der Gewichtskraft) liegt im Abstand ρ vom Zentrum, wobei

$$\rho = r' \frac{m'}{M} \quad (\text{mit der Gesamtmasse } M = m + m'). \quad (1)$$

Bezüglich eines relativ zur Unterlage ruhenden Koordinatensystems bezeichnen (x, y) die Koordinaten des Schwerpunktes. Mit dem Drehwinkel φ gilt:

$$x = r \varphi - \rho \sin \varphi \quad \text{bzw.} \quad y = r - \rho \cos \varphi \quad (2)$$

Für die Kräfte gelten die folgenden Beziehungen:

$$F_G = M g \quad (3)$$

$$F_N = M (\ddot{y} + g) \quad (4)$$

$$F_R = M \ddot{x} \quad (5)$$

Mit dem Trägheitsmoment J und Gleichung (2) ergibt sich damit für das totale Drehmoment:

$$\begin{aligned} M_{\text{tot}} &= J \ddot{\varphi} = -F_R (r - \rho \cos \varphi) - F_N \rho \sin \varphi \\ &= -M \ddot{x} (r - \rho \cos \varphi) - M (\ddot{y} + g) \rho \sin \varphi \\ &= -M (r \ddot{\varphi} + \rho (\sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \ddot{\varphi})) (r - \rho \cos \varphi) - M (\rho (\cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \ddot{\varphi} + g) \\ &\quad \cdot \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen (Position und Geschwindigkeit) bestimmt diese (nichtlineare) Differentialgleichung die Bewegung des Reifens unter den angenommenen Bedingungen vollständig.

2.2 Kleine Winkel

Für kleine Winkel ($\varphi \ll 1$) und kleine Winkelgeschwindigkeiten ($\dot{\varphi} \ll 1$) kann Gleichung (6) durch die Terme höchster Ordnung angenähert werden:

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{M g \rho}{J + M(r - \rho)^2} \varphi \quad (7)$$

Dies entspricht der charakteristischen Gleichung für eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{J + M(r - \rho)^2}{M g \rho}} \quad (8)$$

Interessanterweise entspricht dieser Ausdruck demjenigen für ein physikalisches Pendel, bei dem der Reifen mit Unwucht so aufgehängt wird, dass sich der Aufhängepunkt, der Schwerpunkt und das Reifenzentrum (in dieser Reihenfolge) auf einer Vertikalen befinden.

3 Messungen

Als Reifen wurden verschieden breite Stücke von Rohren (Kunststoff, Plexiglas, Aluminium) mit unterschiedlichen Massen und Durchmessern verwendet (Abb. 2). Für die Unwucht wurden verschieden lange und dicke Metallstangen an den Innenrand der Rohre geklebt (Abb. 3).

Bei der Messung der Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden wurde eine gewöhnliche Stoppuhr verwendet. Jede Messung wurde fünfmal durchgeführt.

Für genauere Bewegungsanalysen wurde mit einer Hochgeschwindigkeitskamera (Fastec Imaging Sports-Cam) mit 250 fps gefilmt und anschliessend die Position des Mittelpunktes mit der Software Tracker ([2]) nachverfolgt.



Abbildung 2: Unterschiedliche Rohre

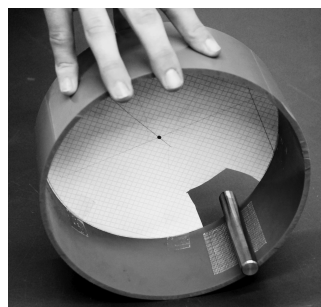


Abbildung 3: Reifen aus Kunststoffrohr mit Metallstange als Unwucht bei der Messung

4 Auswertung

4.1 Schwingungen

Abbildung 4 zeigt ein Beispiel für die Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden für einen Kunststoffreifen (Durchmesser 11 cm, Masse 162 g) mit verschiedenen Zusatzmassen (Stativstangen mit Durchmesser 1.4 cm, Massen von 36 g bis 360 g). Die Übereinstimmung mit der theoretisch berechneten Kurve (durchgezogene Linie) ist ausgezeichnet.

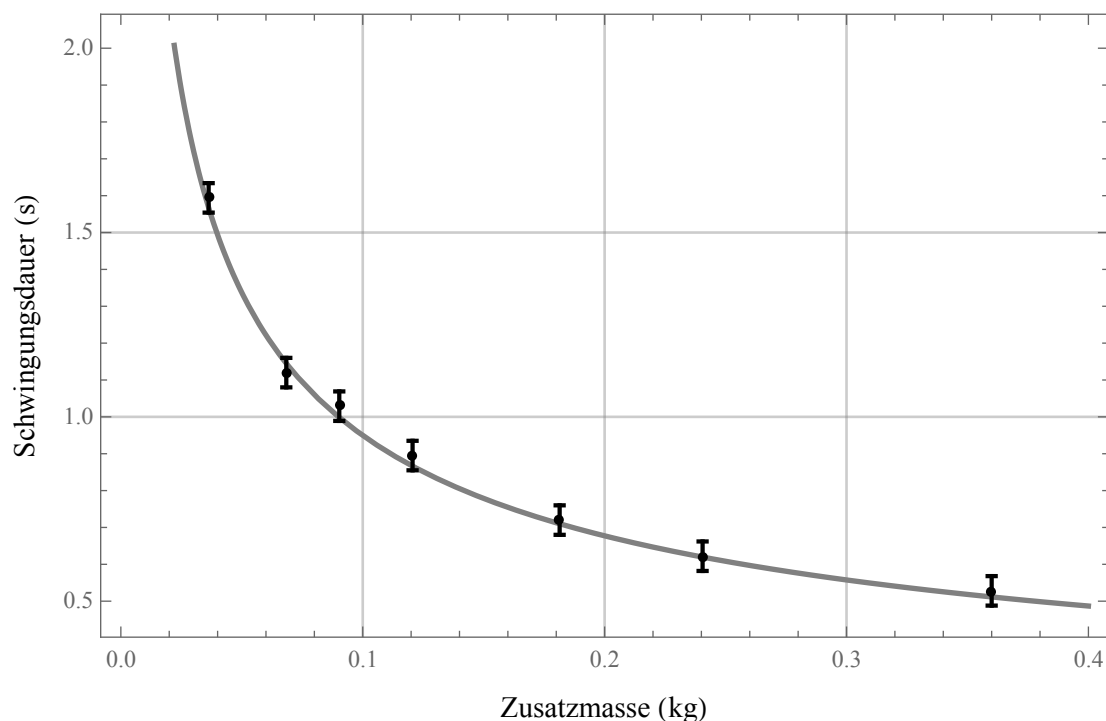


Abbildung 4: Schwingungsdauer bei kleiner Amplitude für unterschiedliche Zusatzmassen

Für grössere Amplituden weicht die Bewegung von einer harmonischen Schwingung ab. Abbildung (5) zeigt die Phasenraumdarstellung für verschiedene Amplituden. Die theoretischen Kurven weichen mit

zunehmender Amplitude immer mehr von einer Ellipse ab. Die Streuung der Messpunkte ist einerseits auf die Ablesegenauigkeit beim Tracken zurückzuführen, andererseits zeigt sich hier auch der Einfluss der dissipativen Kräfte, welche zu einer Abnahme der Schwingungsenergie führen.

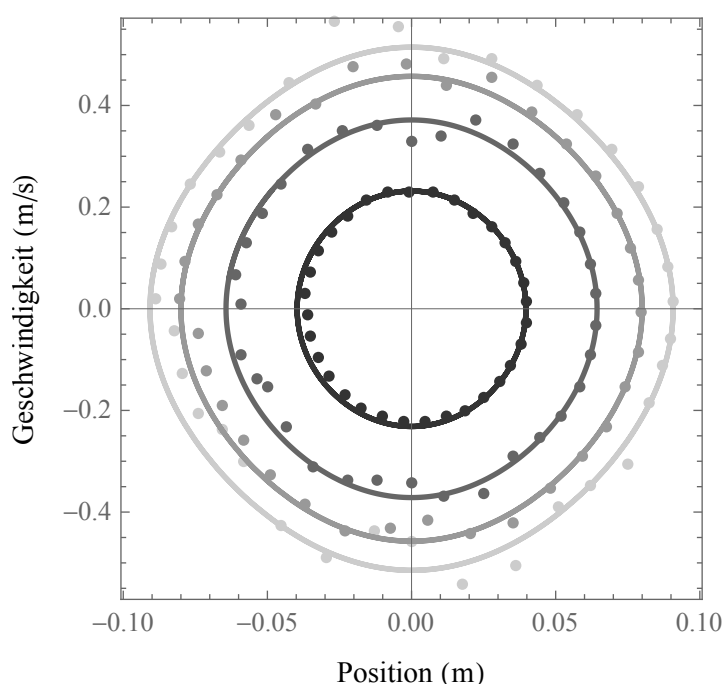


Abbildung 5: Bewegung im Phasenraum bei unterschiedlich grossen Amplituden. Fehlerbalken wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

5 Ausblick

Die Auswertung der Schwingbewegungen deckt nur einen kleinen Teil der möglichen Bewegungen ab. Weitergehende Analysen könnten auf das Überschwingen oder auf spannende Phänomene wie Rutschen oder Abheben eingehen. Theoretische Zugänge findet man in grosser Zahl (siehe Literatur) und die experimentelle Untersuchung sollte mit den beschriebenen Methoden problemlos möglich sein.

Literatur

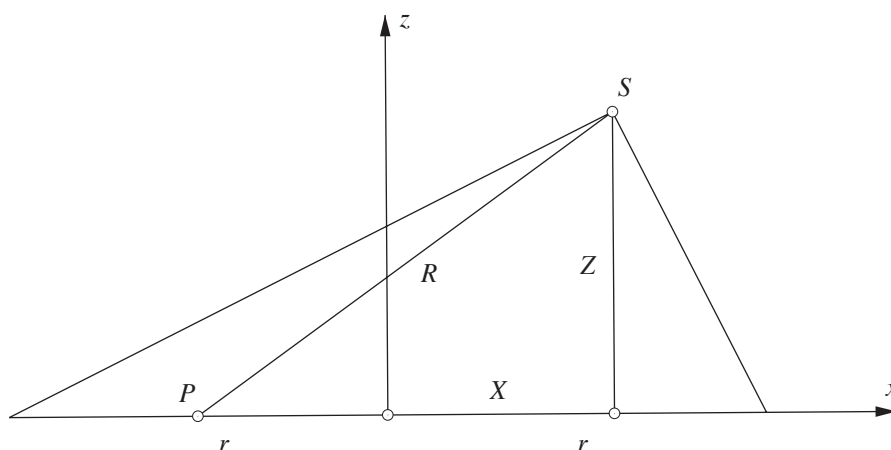
- [1] Das Problem Loaded Hoop wurde von Michael Rusterholz (MNG Rämibühl) bearbeitet. Die in diesem Artikel verwendeten Messungen führte er zusammen mit Sven Grübel (ebenfalls MNG Rämibühl) durch.
- [2] Tracker — Video Analysis and Modeling Tool, www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker
- [3] A. Taylor, M. Fehrs, *The dynamics of an eccentrically loaded hoop*, Am. J. Phys. 78, 496ff (2010)
- [4] W.F.D. Theron, M.F. Maritz, *The amazing variety of motions of a loaded hoop*, Math. Comput. Model., Vol. 47, pp 1077ff (2008)
- [5] W.F.D. Theron, *Analysis of the Rolling Motion of Loaded Hoops*, Dissertation at Department of Applied Mathematics of the University of Stellenbosch, South Africa (2008)
- [6] J.P. Butler, *Hopping Hoops Don't Hoop*, Am. Math. Mon., Vol. 106, No. 6, pp 565ff (1999)



Abwicklung eines schiefen Kreiskegels

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Wir betrachten einen schiefen Kreiskegel im kartesischen räumlichen $(x/y/z)$ -Koordinatensystem. Die Spitze S des Kegels habe die Koordinaten $(X/0/Z)$. Der Grundkreis mit Mittelpunkt im Ursprung liege in der (x/y) -Ebene und habe den Radius r . Ein beliebiger Punkt P auf der Grundkreislinie habe die Koordinaten $(r \cos u/r \sin u/0)$ mit dem Azimutwinkel u , gemessen von der x -Achse aus. Wir schränken unsere Überlegungen hier schon auf den halben Kegelmantel ein und setzen $0 \leq u \leq \pi$. Die nachfolgende Figur zeigt einen Seitenriss des Körpers mit den Werten $r = 5$, $X = 3$ und $Z = 4$ in Zentimetern.



Im Artikel von W. Wunderlich aus Wien, der in den „Elementen der Mathematik“ 1977¹ erschienen ist, wird das Problem der Abwicklung des Mantels eines schiefen Kreiskegels noch für die damals aktuellen Mittel der Darstellenden Geometrie aufbereitet. Heute hat sich vieles vereinfacht, da einerseits eine leistungsfähige Software für Analysis und andererseits gute Instrumente zum Zeichnen von geometrischen Objekten zur Verfügung stehen. Insbesondere kann man die auftretenden elliptischen Integrale explizit benützen.

Zunächst folgen wir den Ideen von W. Wunderlich und berechnen mit dem Satz von Pythagoras die Länge R einer Mantellinie \overline{SP} in Abhängigkeit des Winkels u :

$$R(u)^2 = (X - r \cos u)^2 + (r \sin u)^2 + Z^2 = X^2 + Z^2 + r^2 - 2rX \cos u$$

Wunderlich setzt sodann $a = rX$ und $b^2 = X^2 + Z^2 + r^2$ und stellt fest, dass es offenbar unendlich viele schiefe Kreiskegel mit veränderlichem Grundkreisradius r und variabler Spitze S gibt, welche genau die gleichen Mantellinienlängen $R(u)$ besitzen, solange nur a und b konstant sind. Daraus leitet er eine einfache Konstruktionsmethode für $R(u)$ ab, ohne dass man die damals berühmte „Wahrelängekonstruktion“ der Darstellenden Geometrie bemühen muss. Für unsere Zwecke halten wir bloss fest, dass wir jetzt mit

$$R(u)^2 = b^2 - 2a \cos u \quad \text{oder} \quad R(u) = \sqrt{b^2 - 2a \cos u} \quad (1)$$

¹W. Wunderlich: Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels. Elemente der Mathematik, Vol. 32/5, Birkhäuser Verlag Basel 1977.

rechnen. Das Hauptproblem besteht nun darin, den Zusammenhang zwischen R und ω , dem Netzwinkel in der Spitze des abgewickelten Mantels, zu finden. Dazu bestimmen wir zuerst den Winkel $\phi(u)$ zwischen der Mantellinie und der Tangente an den Grundkreis im Punkt P . Der Richtungsvektor \vec{m} der Mantellinie ist

$$\vec{m} = \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} r \cos u - X \\ r \sin u \\ -Z \end{pmatrix}$$

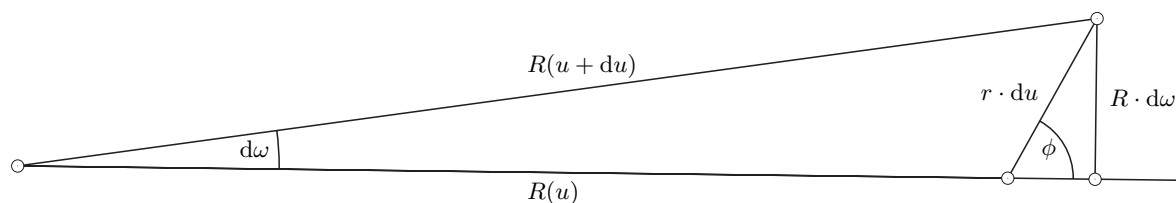
und der Tangenteneinheitsvektor \vec{t} an den Grundkreis lautet

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Skalarprodukt erhalten wir den Cosinus des Zwischenwinkels:

$$\cos \phi(u) = \frac{\vec{m} \circ \vec{t}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{t}|} = \frac{-r \cos u \sin u + X \sin u + r \sin u \cos u}{R(u)} = \frac{X \sin u}{R(u)} \quad (2)$$

In der nachfolgenden Figur überlegen wir uns, um wie viel der Netzwinkel ω zunimmt, wenn der Parameter u um du zunimmt. Dabei beträgt der Zuwachs auf dem Grundkreisbogen vom Punkt $P(u)$ zum Punkt $P(u + du)$ das infinitesimale Stück $r \cdot du$.



Aus dieser zweiten Figur liest man nun die infinitesimale Beziehung

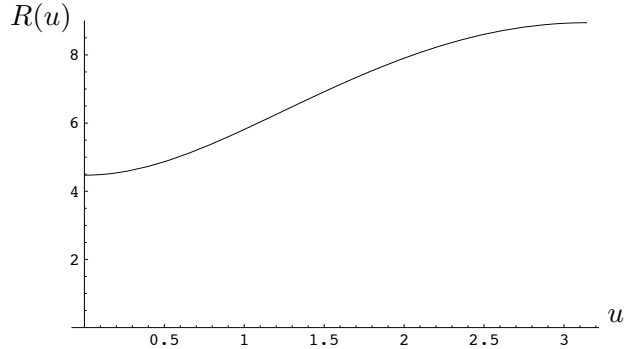
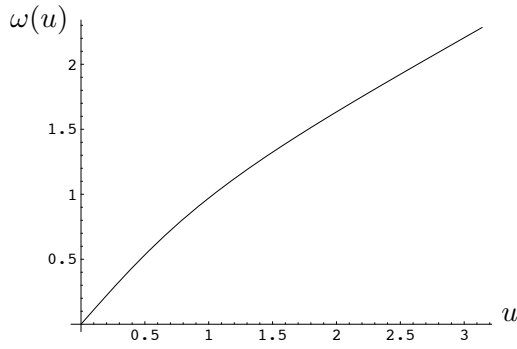
$$R \cdot d\omega = r \cdot du \cdot \sin \phi$$

ab. Damit erhalten wir die Ableitung von $\omega(u)$, in der wir gleich (2) verwenden:

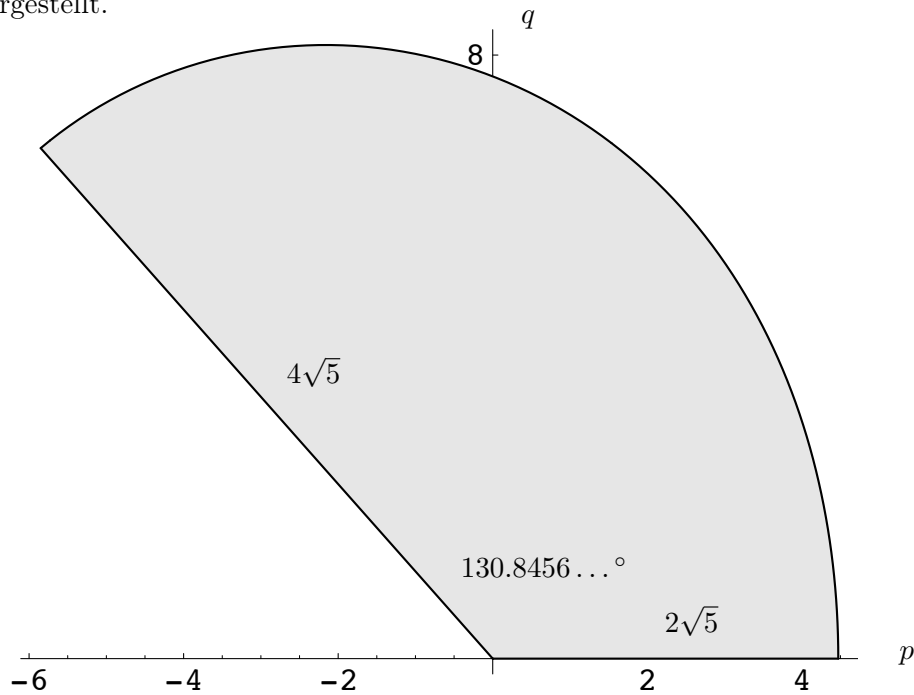
$$\omega'(u) = \frac{d\omega}{du} = \frac{r \cdot \sin \phi(u)}{R(u)} = \frac{r \cdot \sqrt{1 - (\cos \phi(u))^2}}{R(u)} = \frac{r \sqrt{R(u)^2 - (X \sin u)^2}}{R(u)^2} \quad (3)$$

Mit $R(u)$ aus (1) und $\omega(u) = \int_0^u \omega'(\tilde{u}) d\tilde{u}$ kennen wir jetzt eine Polardarstellung der Randkurve der gesuchten Abwicklung. Um ein konkretes Beispiel zu zeigen, wählen wir die Originalwerte $r = 5$, $X = 3$ und $Z = 4$, mit denen die erste Figur gezeichnet worden ist. Damit gilt $a = 15$ und $b = \sqrt{50}$. Die Software *Mathematica* liefert dann für das obige Integral den etwas komplizierten Term `omega[u]` mit elliptischen Integralen, der in der folgenden Abbildung zu sehen ist. Mit dem Befehl `Plot[omega[u], {u, 0, Pi}]` erhält man die graphische Darstellung von $\omega(u)$ mit dem Maximalwert für den Netzwinkel $\omega(\pi) = 2.2836868\dots = 130.8456\dots^\circ$. Daneben ist auch der Graph von $R(u)$ dargestellt mit $R(0) = 2\sqrt{5}$ und $R(\pi) = 4\sqrt{5}$ als Extremwerte.

$$\frac{1}{(1 + \cos[u]) \sqrt{\frac{91 - 60 \cos[u] + 9 \cos[2u]}{(1 + \cos[u])^2}}} \left(\sqrt{91 - 60 \cos[u] + 9 \cos[2u]} \right. \\ \left. - \left(5 \operatorname{EllipticF}\left[\operatorname{ArcSinh}\left[\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5} \tan\left[\frac{u}{2}\right]}\right], \frac{7}{25} - \frac{24I}{25}\right] \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} - \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \right) / \left(\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}} \sqrt{5 + 16 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2 + 20 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^4} \right) + \right. \\ \left. \left(3 \operatorname{EllipticPi}\left[\frac{2}{5} - \frac{3I}{10}, \operatorname{ArcSinh}\left[\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5} \tan\left[\frac{u}{2}\right]}\right], \frac{7}{25} - \frac{24I}{25}\right] \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} - \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \right) / \left(\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}} \sqrt{5 + 16 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2 + 20 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^4} \right) - \right. \\ \left. \left(3 \operatorname{EllipticPi}\left[\frac{8}{5} - \frac{6I}{5}, \operatorname{ArcSinh}\left[\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5} \tan\left[\frac{u}{2}\right]}\right], \frac{7}{25} - \frac{24I}{25}\right] \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} - \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \sqrt{1 + \left(\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}\right) \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2} \right) / \left(\sqrt{\frac{8}{5} + \frac{6I}{5}} \sqrt{5 + 16 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^2 + 20 \tan\left[\frac{u}{2}\right]^4} \right) \right) \right)$$



Aus der Polardarstellung mit R und ω machen wir eine Parameterdarstellung der gesuchten Abwicklung des halben Kegelmantels: $(p(u)/q(u)) = (R(u) \cos(\omega(u))/R(u) \sin(\omega(u)))$. Sie ist hier in der Originalgrösse dargestellt.



Wir kontrollieren noch, ob die Länge L der gebogenen Linie stimmt: $L = \int_0^\pi \sqrt{p'(u)^2 + q'(u)^2} du =$

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(R'(u) \cos(\omega(u)) - R(u) \sin(\omega(u)) \cdot \omega'(u) \right)^2 + \left(R'(u) \sin(\omega(u)) + R(u) \cos(\omega(u)) \cdot \omega'(u) \right)^2} du ,$$

wobei die Ableitung $R'(u) = \frac{a \sin(u)}{R(u)}$ aus (1) berechnet wird und $\omega'(u)$ aus (3) zu übernehmen ist. Tatsächlich liefert *Mathematica* bei numerischer Integration den Wert $L = 15.707963\dots$, was mit $r = 5$ genau dem halben Kreisumfang $L = \pi \cdot r = 15.707963\dots$ entspricht.

Weiterbildung Berufsfeldbezogener Mathematikunterricht in der Fachmittelschule

Zeit: 11.11.2014, 14-18 Uhr

Ort: Kantonsschule Olten

Referent: Torsten Linnemann (Gymnasium Oberwil und PH FHNW)

Veranstalter: Weiterbildungszentrale WBZ

Anmeldung bis 06.10.2014 unter <https://www.wbz-cps.ch/de/angebote-fachkurse>

Inhalt:

Der Rahmenlehrplan für die Fachmittelschule gibt vor, dass der Unterricht sowohl allgemeinbildend als auch berufsfeldbezogen sein soll.

In der Weiterbildung werden Ideen und Materialien vorgestellt, die spezifisch auf die Berufsfelder Gesundheit, Soziales und Pädagogik bezogen sind und zum Lehrplan der Fachmittelschule passen. Ausgangspunkt für die Materialien ist das Forschungs- und Entwicklungsprojekt KAMM 4 – berufsfeldbezogener Mathematikunterricht in der Fachmittelschule:

<http://web.fhnw.ch/ph/mathematikdidaktik/forschungs-und-entwicklungsprojekte/kamm/artikel-ergebnisse/berufsfeldbezug-im-fach-mathematik-in-der-fachmittelschule>

Im Rahmen dieses Projekts wurden Lehrpläne und Unterrichtsmaterialien analysiert und Interviews mit Auszubildenden und Berufsleuten aus den verschiedenen Bereichen geführt. Dabei wurden mathematikhaltige Situationen herausgearbeitet, die dann zu verschiedenen Materialien für die Fachmittelschule führen.

Die Arbeit ist entstanden im Rahmen des Projekts „KAMM – kognitiv aktivierender Mathematikunterricht in der Mittelschule“, dessen Ziel es ist, eine Didaktik für die Fachmittelschule zu entwickeln, die die Motivation und das Selbstwirksamkeitsgefühl in der Mathematik erhöhen soll. Ein wichtiger Pfeiler ist auch die Entwicklung von Lernumgebungen, zu denen schon 2013 eine WBZ-Weiterbildung stattgefunden hat.

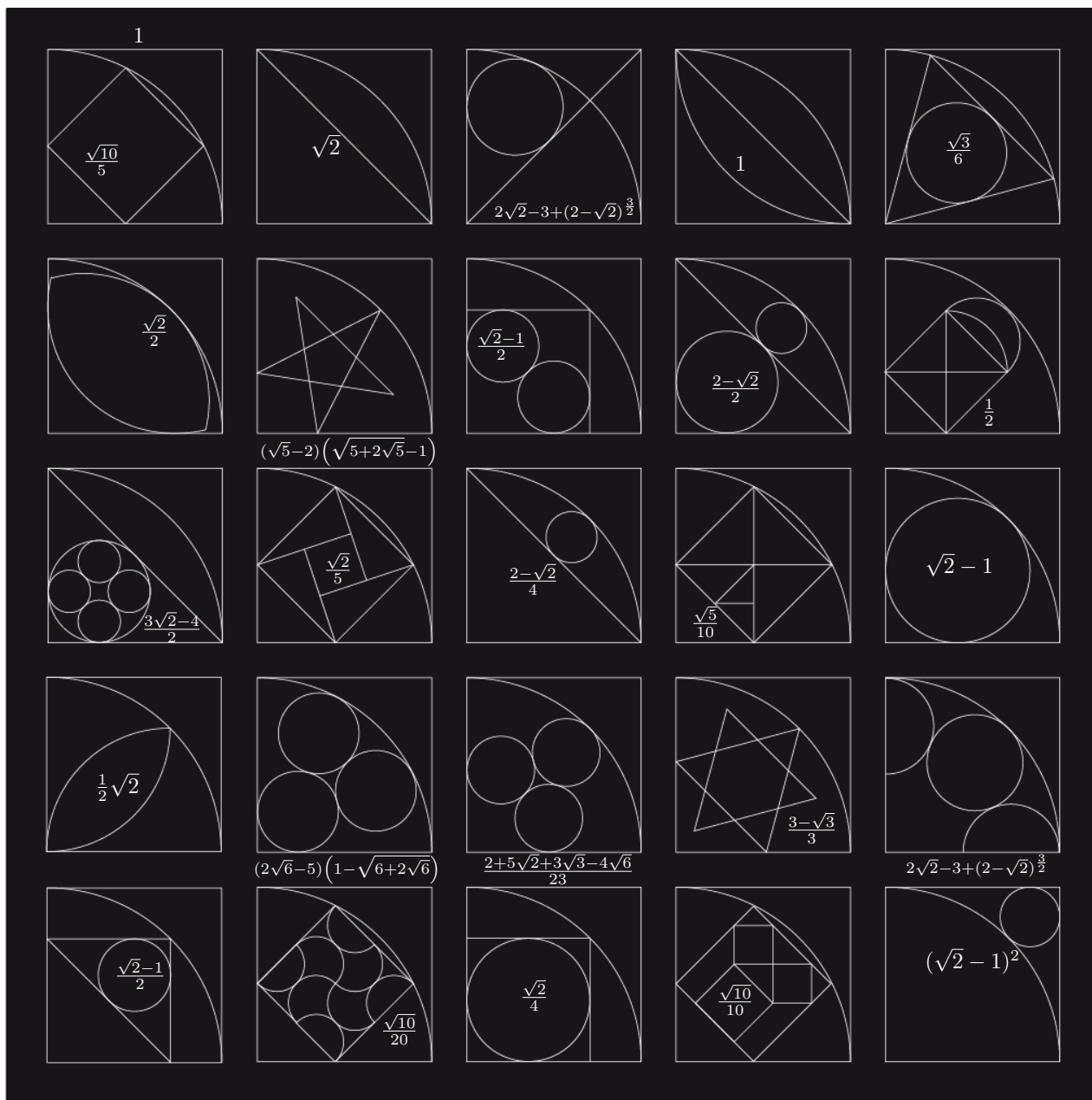
Ablauf der Veranstaltung:

- Vorstellung des Projekts
- Mathematikhaltige Situationen: Gesundheit und Soziales – Entwicklung von Materialien
- Kenntnisse und Fertigkeiten – Aufgaben im Bereich Gesundheit
- Lernumgebungen – Materialien vor allem für den Bereich Pädagogik
- Weitere Vorhaben

Radien oder Seitenlängen zu den 25 Aufgaben von Eugen Jost

Peter Gallin

Wie in der letzten Nummer des Bulletin versprochen, soll zu jedem Bild ein typisches Resultat mitgeteilt werden, wie beispielsweise ein Radius oder die Seitenlänge eines umbeschriebenen regelmäßiger Vielecks bei Sternen.



Computergraphik © Eugen Jost, Thun

Kopfrechnen mit dem 9-fachen Weltmeister

Der EHK (Elternverein für hochbegabte Kinder) führt mit Herrn Dr. Dr. Gert Mittring die **1. Europameisterschaft im Kopfrechnen für 10-17** jährige durch. Der Anlass findet im schönen **KKL in Luzern vom 15-19. Oktober 2014** statt.

Zuerst wird Herr Mittring den Kindern und Jugendlichen die rund 14 Themenbereiche des Kopfrechnens in Workshops vermitteln. Dazu gehören die Grundrechenarten, Wurzelziehen, Wochentag eines Datums errechnen, usw. (In seinen Büchern werden diese Themen beschrieben und Rechenwege aufgezeigt.) Nach den Workshops findet am Samstag Morgen die eigentliche 2-stündige Meisterschaft statt. Am Sonntag folgt die Abschlussfeier mit einigen Überraschungen.



Herr Mittring selber löst jedes rechnerische Problem schneller als ein Taschenrechner. Der 46jährige ist Psychologe und neunfacher Weltmeister in der Disziplin Kopfrechnen. Sein IQ liegt jenseits des Messbaren, bei geschätzten 175. Das Ziel des leidenschaftlichen Zahlenjongleurs ist es, die Magie der Mathematik auch denjenigen nahe zu bringen, die keine Ausnahmetalente sind. Am 15.12.2011 war Herr Mittring bei Kurt Aeschbacher. Dort wurde ihm eine speziell von der ETH ausgesuchte Aufgabe gestellt, welche er spielend löste. (siehe unter www.srf.ch/player/tv: „Mittring“ eingeben).

Ermuntern Sie Ihre Schülerinnen und Schüler sich anzumelden. Spass am Kopfrechnen genügt!

Was: 1. Europameisterschaft im Kopfrechnen für 10-17 jährige

Wann: 15-19. Okt 2014

Wo: KKL Luzern

Anmeldung unter: <http://mental-calc-children.de/>

Webpage: <http://mental-calc-children.de/>, www.ehk.ch und <http://gertmittring.wordpress.com/>)

Das Organisationskomitee

Fund von zwei über 100-jährigen 24-Meter-Rechenwalzen an der ETH Zürich und bei der UBS, Basel

Ende 2013 wurden an der ETH Zürich und bei der UBS Basel zwei sehr seltene, über 100-jährige Loga-Rechenwalzen mit einer Skalenlänge von 24 m gefunden. Es handelt sich unseres Wissens um die weltweit grössten und genauesten Rechenwalzen. Solche Rechenhilfsmittel wurden bis in die 1970er Jahre verwendet.

Herbert Bruderer

Seit Jahrtausenden versuchen die Menschen, sich die Arbeit mit Rechenhilfsmitteln zu erleichtern. Am bekanntesten ist der Abakus, der in manchen Ausprägungen (Suanpan in China, Soroban in Japan, Stschoty in Russland) vorkommt. Über 300 Jahre lang waren Rechenschieber weit verbreitete Werkzeuge, bis sie in den 1970er Jahren jäh durch elektronische Taschenrechner abgelöst wurden. Dieses Schicksal erlitt auch die kleinste mechanische Rechenmaschine der Welt, die in Liechtenstein gefertigte Curta. Rechenschieber gibt es in mehreren Bauformen: Rechenstäbe, Rechenscheiben, Rechenwalzen (Rechentrommeln, Rechenzylinder), Rechenuhren. Alle diese Geräte sind weitgehend in Vergessenheit geraten, selbst bei Fachleuten der Mathematik und Informatik.

Rechenschieber wurden in zahlreichen Ländern gefertigt, z.B. Grossbritannien, Frankreich, USA, Deutschland, Japan. Der führende Schweizer Hersteller von Rechenscheiben und Rechenwalzen war die Firma Loga-Calculator AG. Ihr Inhaber Heinrich Daemen Schmid errichtete 1900 eine Werkstatt in Zürich, 1903 wurde sie nach Oerlikon verlegt, 1911 zog er nach Uster um.

Analog- und Digitalrechner

Es wird zwischen analogen (stetigen) Rechengeräten (z.B. Rechenschieber, Planimeter, Integrieranlage) und digitalen (ziffernmässigen) Rechengeräten (z.B. Abakus, mechanische oder elektronische Rechenmaschine) unterschieden. Rechenschieber verwenden in der Regel logarithmische Skalen. Als Entdecker/Erfinder der Logarithmen gelten der Schotte John Napier und der Schweizer Jost Bürgi (Beginn des 17. Jahrhunderts), vgl. dazu auch das Locomat-Projekt von Denis Roegel, Universität Nancy (<http://locomat.loria.fr>). Der Engländer William Oughtred ist der Erfinder des Rechenschiebers. Nach ihm ist die Oughtred Society (<http://www.oughtred.org>) benannt.

Je länger die Skala, desto höher die Genauigkeit

Je länger die Skala eines Rechenschiebers ist, desto höher ist seine Genauigkeit. In der Praxis herrschten die Rechenstäbe vor. Rechenscheiben und vor allem Rechenwalzen ermöglichten jedoch mehr Stellen. Nach dem Rechenschieberfachmann Heinz Joss (Dällikon) hatten die grössten Rechenwalzen, die weltweit je auf den Markt gebracht wurden, eine Skalenlänge von 24 m. Sie stammen von Loga-Calculator. Diese Geräte, die laut Herstellerangaben auf 5 bis 6 Stellen genau rechnen, sind sehr selten. Bisher war nur von drei Stück (Allschwil, Dällikon, Greifswald) die Rede. In den grossen deutschen und österreichischen Technik- und Computermuseen sind keine Exemplare mit 24 m verzeichnet. Der Zufall wollte es, dass Ende November und Anfang Dezember 2013 gleich zwei weitere Exemplare aufgetaucht sind, je eine am Departement Informatik der ETH Zürich und im Konzernarchiv der UBS in Basel. Die beiden Walzen sind knapp 70 cm lang. Sie haben einen Durchmesser von etwa 25 cm und einen Umfang von 80 cm. Die 24-m-Skala ist auf 80 parallele Skalenabschnitte verteilt. Im Februar 2014 kam eine weitere Walze in Windisch zum Vorschein. Damit sind nun sechs 24-Meter-Walzen bekannt.

Rechenwalzen werden gleich bedient wie herkömmliche Rechenstäbe. Sie sind mit einem drehbaren und seitlich verschiebbaren Schieber (auch Manschette oder Käfig genannt) ausgestattet. Rechenwalzen waren jahrzehntelang im Gebrauch, so bei Banken, Versicherungen, Schulen, der Industrie und in der Forschung.

Wie lang ist die Skala?

Weder bei der ETH Zürich noch im Konzernarchiv der UBS Basel gibt es Unterlagen zu den neu entdeckten Rechenwalzen. Das mag erklären, weshalb die Bedeutung dieser Analogrechner nicht erkannt wurde. Entscheidendes Merkmal von Rechenwalzen ist die Skalenlänge. Für ihre Bestimmung gibt es verschiedene „Rezepte“ (Heinz Joss, Gerwin Bertelmann). Vor allem auf den frühen Geräten sind keinerlei Angaben zu finden. Mithilfe von Messungen und eines Modellverzeichnisses der Loga-Walzen war eine eindeutige Ermittlung der Skalenlänge von 24 m möglich. Loga-Calculator hat Walzen mit Skalenlängen von 1,2 bis 24 m hergestellt (Modelle: 1,2 m; 2,4 m; 7,5 m; 10 m; 15 m und 24 m).

Was bedeutet die Typenbezeichnung 24/48 m?

Die Loga-Calculator AG, Uster, verwendete in Modellverzeichnissen und Preislisten Typenbezeichnungen wie 10 m, 15 m, 24 m oder (selbst für Fachleute verwirrend) 10/20 m, 15/30 m, 24/48 m. Was ist beispielsweise unter dem Typ 24/48 m zu verstehen? Bei diesem Modell handelt es sich *nicht* um ein Gerät mit einer Skalenlänge von 48 m. Gemeint ist vielmehr eine 24-Meter-Rechenwalze. Beim Rechenstab kann man die Zunge seitlich herausziehen. Bei der Rechenwalze lässt sich die Manschette jedoch wegen der Bauform nur bis an den Rand schieben. Damit man überhaupt rechnen kann, ist nach Hans Peter Schaub (Allschwil, Sammler von Rechenschiebern aller Arten) auf beiden Seiten (links und rechts) eine Überlänge nötig. Das hat zur Folge, dass die Skala doppelt auf dem Zylinder aufgetragen werden muss. Die Skala beginnt in der Mitte der Walzenoberfläche. Der Anfangspunkt wird bei gewissen Ausführungen durch einen roten Kreisring gekennzeichnet, in anderen Fällen durch einen roten Doppelbalken. Eine Loga-Rechenwalze mit einer Skalenlänge von 24 m hat 80 Teilstrecken (Abschnitte) zu 60 cm, das heisst zwei Skalen zu 24 m (nicht jedoch eine Skala zu 48 m). Entsprechend haben 15-m-Walzen 60 Teilstrecken zu 50 cm (= 2 x 15 m). Wie erwähnt sind nicht zwei gleiche Skalen hintereinander aufgezeichnet, sondern eine Skala in der Mitte mit je einem Überhang links und rechts.

Über 100-jährig

Das Alter der beiden Geräte lässt sich dank der Aufschrift „Zürich (Schweiz)“ ungefähr festlegen: Sie wurden spätestens 1911 gebaut, denn das Unternehmen siedelte in diesem Jahr nach Uster um. Die beiden Rechenwalzen sind also über 100 Jahre alt. Der Nachlass der Loga-Calculator AG, Uster, befindet sich im Schweizerischen Wirtschaftsarchiv, Basel.

Zeitzeugen erinnern sich nicht mehr

Erst seit kurzem ist bekannt, dass im Institut für angewandte Mathematik der ETH Zürich eine Loga-Rechenwalze eingesetzt wurde. Sie wird in einem handschriftlichen Dokument vom 11. August 1949 (Nachlass von Eduard Stiefel im Archiv der ETH-Bibliothek) erwähnt. Das Institut besass damals eine elektrische Rechenmaschine und eine Loga-Rechenwalze. Es gelang nicht, Zeitzeugen zu finden, die mit der Walze gearbeitet haben oder sich daran erinnern. Eine Madas-Tischrechenmaschine der Firma Hans W. Egli AG, Zürich, wurde 1948 angeschafft. Wann und wie die Walze ans Institut für angewandte Mathematik kam, ist unbekannt. Laut den ETH-Schulratsprotokollen wurde Max Rosenmund (Professor für Geodäsie und Topographie) am 26. Dezember 1905 ermächtigt, eine logarithmische Rechenwalze zum Preis von 250 Franken zu er-

werben. Der tiefe Betrag deutet jedoch darauf hin, dass es vermutlich um eine kleinere Rechenwalze ging. Wie einem Etikett zu entnehmen ist, kam 24-Meter-Loga-Rechenwalzte über die Fernmeldetechnik ans Rechenzentrum der ETH.

Weitere Funde: Planimeter von Amsler und Coradi

Ende Januar 2014 kamen beim Kulturgüterschutz der ETH Zürich (www.kgs.ethz.ch) zudem mehrere bisher unbekannte Proportionalzirkel, Rechenschieber, u.a. Rechenstäbe aus Holz, Messing und Elfenbein, zum Vorschein. Noch unklar ist, ob sich darunter auch der bisher verschollene Rechenstab von Johann Caspar Horner (Nachbau durch Emil Kern, Aarau, etwa 1860) befindet, siehe dazu: Elisabeth Schoeck-Grüebler: Der freundeidgenössische Rechenschieber. Der Briefwechsel zwischen Felix Donat Kyd aus Brunnen und Hofrat Johann Caspar Horner aus Zürich, 1831–1834, Brunnen 2004, 130 Seiten, Selbstverlag.

Am 2. April 2014 wurden im Maschinenlabor der ETH weitere analoge Geräte gefunden, u. a. ein Planimeter des berühmten mathematisch-mechanischen Instituts Gottlieb Coradi (Zürich) sowie ein Dokument von Jakob Amsler-Laffon (Schaffhausen), Erfinder des Polarplanimeters. Planimeter dienen zur Berechnung von Flächeninhalten.

Museen

Rechenschieber aller Art sind in zahlreichen grösseren technischen Museen zu finden, z.B. Deutsches Museum (München), Heinz Nixdorf Museumsforum (Paderborn), Arithmeum (Bonn), Technisches Museum (Wien), Museum Enter, Solothurn, Museum für Kommunikation, Bern. Liebevoll gepflegte Sammlungen sind auf Anmeldung u.a. auch bei den Gebrüder Beck in Pfäffikon ZH (<http://www.becks.ch>; <http://www.curta.ch>) und Schaan FL (<http://www.tourismus.li/de/Kultur-Kulinarik/Museen/Liechtensteiner-Museen/Rechen-und-Schreibmaschinen-Museum.html>) sowie bei der UBS, Basel (UBS AG, Historisches Archiv & Museum, Aeschenplatz 6, 4002 Basel, www.ubs.com/geschichte), zu besichtigen. Mustergültig ist die Studiensammlung Kern in Aarau (Schwerpunkt: Vermessungswesen, <http://www.kern-aarau.ch/kern/willkommen.html>). Eine sehr vielfältige Sammlung historischer technischer Geräte befindet sich auch in Dorénaz bei Martigny.

Danksagung

Der Verfasser bedankt sich herzlich für hilfreiche Auskünfte bei den Rechenwalzenkennern und -sammlern Heinz Joss, Bruno Narr, Hans Peter Schaub und Nico Smallemburg sowie bei Heinz Aeschlimann und Aldo Lardelli (Studiensammlung Kern, Aarau).

Herbert Bruderer ist ehemaliger Dozent am Departement Informatik der ETH Zürich

Buchhinweis

Herbert Bruderer: Konrad Zuse und die Schweiz. Wer hat den Computer erfunden? Oldenbourg-Verlag, München/Walter de Gruyter, Berlin 2012, XXVI, 224 Seiten



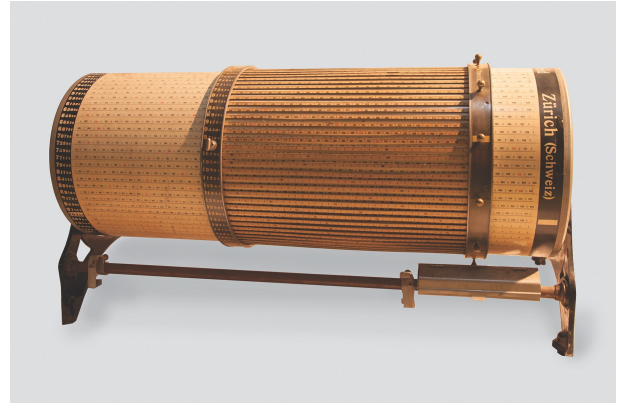
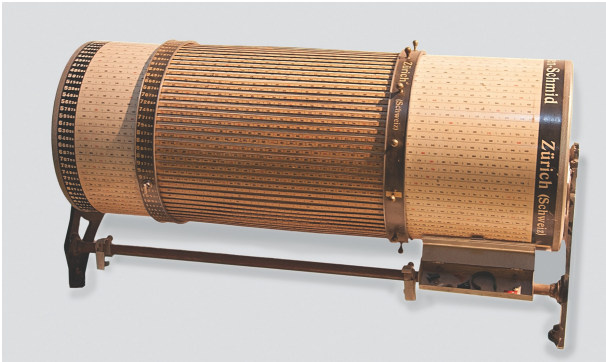
Weitere Auskünfte:

Herbert Bruderer, Telefon +41 71 855 77 11, herbert.bruderer@bluewin.ch oder bruderer@retired.ethz.ch.

Abbildungen

Ende 2013 wurden am Departement Informatik der ETH Zürich und im Konzernarchiv der UBS Basel gleich zwei sehr seltene, über 100-jährige Loga-Rechenwalzen mit einer Skalenlänge von 24 m gefunden. In der Mitte der seitlich verschiebbare und drehbare Schieber. Nach unserem Wissen handelt es sich dabei um die weltweit grössten Rechenwalzen.

Alle Bilder: © UBS



Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2014

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im **Hörsaal HG G 3** des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem
Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 23. Oktober 2014

Albert Gächter, dipl. Math.ETH, Kruesistrasse 12, CH - 9000 St.Gallen

Trifles im Mathematikunterricht!

Spätestens seit Dörrie sind Miniaturen in der Mathematik heimisch geworden. Trifles gehen noch einen Schritt weiter.!

trifle bedeutet Kleinigkeit oder Miniatur und ist gleichzeitig der Name für eine mehr-schichtige Süßspeise.!

Für die Mathematikdidaktik definiere ich Trifle als **eine mathematische Miniatur mit dem Potential für Mehrschichtigkeit.!**

Der Vortrag zeigt an einigen unterrichtsrelevanten Beispielen, wie Trifles die Linearität des Unterrichtes auflockern und ein spannendes Netzwerk bilden können. Im Sinne der Fokussierung auf wesentliche Ideen können Trifles mithelfen, den Mathematikstoff zu gliedern und so auch interessanter zu gestalten. Ausgangspunkte für Trifles sind z.B. Bilder, Algorithmen, Begriffe, Software oder Werkzeuge.!

Es gilt aber auch hier: Den Wind können wir nicht ändern, aber die Segel anders setzen.!

www.didamath.com

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2014

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem
Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 6. November 2014

Prof. Dr. Jörg Waldvogel, ETH Zürich, Seminar für Angewandte Mathematik, LEO
D 3, Leonhardstrasse 27, CH - 8092 Zürich

Jost Bürgi und die Entdeckung der Logarithmen

Jost Bürgi (1552 - 1632) aus Lichtensteig (Kanton St.Gallen, Schweiz) war ab 1579 Hofuhrmacher (mechanicus) von Landgraf Wilhelm IV von Hessen in Kassel. In dieser Stellung hat er wesentlich zur Wissenschaft und zum Instrumentenbau jener Zeit beigetragen: genaue Sekundenuhren, sich selbst bewegende Himmelsgloben, Sextanten, etc. Im Vortrag wird über die von Bürgi konzipierte und berechnete Logarithmentafel berichtet. Diese listet die Potenzen B^n der Basis $B=1.0001$ für n von 0 bis 23 027 mit 9 bedeutsamen Ziffern, ohne systematische Fehler. Mit linearer Interpolation (beschrieben im *gründlichen Unterricht*) erreicht man volle Genauigkeit. Leider haben wohl die Wirren des 30-jährigen Krieges eine ordentliche Publikation erhindert. Die zwei heute bekannten Originale (München, Graz; das Danziger Exemplar ging im zweiten Weltkrieg verloren) sind wahrscheinlich Probeabzüge (Prag, 1620). Die im Vortrag präsentierten Fehlerlisten und -statistiken belegen die hohe Qualität von Bürgis Tafel: 91.5% korrekte Rundungen, 7.3% Rundungen auf die falsche Seite; restliche fehlerhafte Ziffern häufig aufgrund von Übertragungsfehlern des Setzers oder unleserlich gedruckt.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2014

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem
Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 20. November 2014

Prof. Dr. Hans Walser, Mathematisches Institut, Universität Basel, Rheinsprung
21, CH - 4051 Basel Mathematisches Institut, Universität Basel

Das DIN-Format

Das DIN-Format ist mehr als ein Stück Papier und die Quadratwurzel aus Zwei. Wir treffen auf Spiralen, Grenzpunkte, Fragen der Abzählbarkeit, das Delische Problem, die gleichtemperierte 12-Ton-Stimmung, Jakobs Himmelsleiter, das Silberne Rechteck, Faltprobleme und Legespiele nach Fröbel.

Weitere Informationen zum Vortrag auf:

www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/Vortrag83_6/index.html

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2014

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem
Apéro im HG G 69 (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 4. Dezember 2014

Prof. Dr. Martin J. Gander, Section de Mathématiques, Université de Genève, 2-4
rue du Lièvre, CP 64, CH-1211 Genève

Euler, Lagrange, Ritz, Galerkin, Courant, Clough: Auf dem Weg zur Methode der finiten Elemente

Die sogenannte Ritz-Galerkin-Methode ist eines der fundamentalsten Werkzeuge der modernen numerischen Mathematik. Ihren Ursprung hat diese Methode in der Variationsrechnung von Euler und Lagrange und in der Doktorarbeit des Schweizer Walther Ritz, der 1909 im Alter von nur 31 Jahren an Tuberkulose starb. Seine Doktorarbeit reichte er 1902 in Göttingen ein, während einer Periode stürmischer Entwicklung in der Physik. Ritz versuchte das Phänomen der Balmer-Serie, einer bestimmten Folge von Spektrallinien, durch die Eigenwerte partieller Differentialgleichungen auf Rechtecken zu erklären. Obwohl sein physikalisches Modell sich schnell als inadäquat herausstellte, war seine mathematische Idee zu dessen Behandlung umso erfolgreicher und erlaubte es Ritz schwierige angewandte Probleme zu lösen. Dabei revolutionierte er die Variationsrechnung und wurde zum Vater der modernen numerischen Mathematik.

Die Ritzsche Methode wurde von russischen Mathematikern schnell als fundamentales Werkzeug erkannt und zur Berechnung der Biegung von Balken und Platten verwendet, was 1915 zur berühmten bahnbrechenden Arbeit von Galerkin führte. In Europa hingegen, insbesondere im damaligen mathematischen Zentrum Göttingen, fand die Methode wenig Beachtung, obwohl Ritz 1909 für seine Arbeit von der Französischen Académie des sciences mit dem Leconte Preis ausgezeichnet wurde, nachdem er den 1907 den Vaillant Preis Hadamard überlassen musste. Erst während des zweiten Weltkriegs, lange nach Ritz' Tod, wurde das volle Potential der Methode durch einen Vortrag Courants vor der AMS bekannt. Dabei präsentierte Courant was heute unter dem Namen Finite-Elemente-Methode FEM verwendet wird. Zu ihrem Namen kam die Methode durch eine Arbeit von Clough während er für Boeing arbeitete.

Der Vortrag zeigt, dass der Weg zu den modernen numerischen Methoden verschlungenen Pfaden folgte und durch die Bemühungen zahlreicher bedeutender Mathematiker vorangetrieben wurde.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Der 6. Schweizer Tag für den Informatikunterricht STIU 2015 „Homo informaticus“

Der 6. Schweizer Tag für den Informatikunterricht STIU (<http://www.abz.inf.ethz.ch/stiu-sechs>) findet unter dem Motto „Homo informaticus“ am Freitag, 23. Januar 2015 an der ETH Zürich statt.

Wie auch in den vergangenen Jahren dient der STIU 2015 dem Austausch unter den Lehrpersonen sowie der Fortbildung im Unterrichten der unterschiedlichen Informatikgebiete und bietet dabei einmalige Gelegenheiten, aussergewöhnliche Wissenschaftler und Fachdidaktiker der Informatik kennen zu lernen und von ihnen zu lernen. Ein herausragendes Angebot an Referaten und Workshops richtet sich an Informatiklehrpersonen, aber auch an Lehrpersonen anderer Fächer und Fachbereiche wie Mathematik, Naturwissenschaften oder Sprachen, welche ihren Unterricht durch Informatikmodule bereichern wollen. Der STIU ist auch für angehende Lehrpersonen und weitere Interessierte empfehlenswert. Der STIU wird jährlich vom Ausbildungs- und Beratungszentrum für Informatikunterricht (ABZ) der ETH veranstaltet und wird von der Hasler Stiftung, von Google und von der Schweizer Informatikgesellschaft SI unterstützt. Die Teilnahme am STIU ist für die Lehrpersonen kostenlos.

Das Motto des sechsten STIU verweist auf die Aufgabe der Wissenschaft, durch neue Sichtweisen Wissen zu generieren und es in unterschiedlichsten Formen der Gesellschaft zur Verfügung zu stellen. Die Wissenschaft hat seit jeher auch Lenkung, Ermächtigung, Kontrolle und Effizienz des menschlichen Handelns angestrebt, indem sie Vorgehensweisen entwickelte, mit welchen man bestimmte Ziele erreichen konnte. Weil man die Vorgehensweisen erfolgreich ausüben konnte, auch ohne die wissenschaftlichen Hintergründe zu verstehen, konnten bereits im vorinformatischen Zeitalter die menschlichen Tätigkeiten automatisiert werden und wurden immer effizienter. Die heutige Technik und Informatik gehen sogar so weit in der Fortsetzung dieser „Automatisierung“, dass die Ausübung der entdeckten Vorgehensweisen den Maschinen überlassen wird. Die mit der Industrialisierung einhergehende Mechanisierung der Handlungsprozesse wird heute von neuen Wirkungsweisen, Zielsetzungen, Freiheiten und Verantwortlichkeiten abgelöst. Zu den Aufgaben der Informatik in der Bildung gehört es, den Weg von der Wissenserzeugung bis zur Automatisierung der vom Wissen abgeleiteten Verfahren zu erlernen und zu verstehen und somit die Entfaltung des intellektuellen Potenzials der Jugendlichen im kreativen Gestalten zu fördern.

Der Ehrengast des STIU 2015 ist Turing-Preisträger Ron Rivest (<http://people.csail.mit.edu/rivest/>). Als einer der Erfinder des RSA-Kryptosystems gilt er als Vater der modernen Public-Key-Kryptographie. Das von ihm entwickelte, asymmetrische Verfahren zur Verschlüsselung geheimer Nachrichten ist eine geniale Anwendung sogenannter Falltürfunktionen. Dabei wird jede Nachricht an eine Person P mittels öffentlich publiziertem Schlüssel (eine Art Telefonnummer von P) verschlüsselt und mit privatem (nur P bekannten) Schlüssel entschlüsselt. Wesentlich ist dabei, dass der öffentliche aus dem privaten Schlüssel ganz leicht berechnet werden kann während das Umgekehrte praktisch unmöglich ist. Ronald L. Rivest wird von der neuen ETH-Rektorin Sarah Springman die Goldplatinmedaille für Informatik und Informatikunterricht bekommen und hält am STIU ein Referat.

Ein weiterer Ehrengast ist Albrecht Beutelspacher (<http://www.mathematikum.de/das-mathematikum/der-initiator.html>), der mit seiner Mathematik zum Anfassen, seinen vielen Büchern und ARD-Sendungen (<http://www.br.de/fernsehen/ard-alpha/sendungen/mathematik-zum-anfassen/staffel1-videos100.html>) wie kaum ein Zweiter die Mathematik den Jugendlichen und der ganzen Gesellschaft nahe gebracht hat. Er wird am STIU mit der Ehrenmedaille des ABZ geehrt. Sein Workshop am STIU thematisiert die starke Verbindung von Mathematik und Informatik.

Auch Jens Gallenbacher schreibt mit seiner Ausstellung „Abenteuer Informatik“ und „Abenteuer Technik“ Geschichte, was die Popularisierung der Informatik im deutschsprachigen Raum anbelangt. Die erfahrenen Didaktiker Jarka Arnold, Aegidius Plüss, Alexander Repenning und Jan Vahrenhold, Meike Akveld, Barbara Scheuner, Lukas Fässler und Markus Dahinden bieten am STIU spannende Workshops, welche wichtige Impulse für den Unterricht liefern. Eine junge Generation von Informatikerinnen und Informatikern, vertreten durch Wiebke Kothe, Dominik Heun, Barbara Scheuner, Lukas Fässler, Markus Dahinden, Sandro Feuz und Daniel Graf, zeigt in ihren besonderen Workshops, wie man echte informatische Herausforderungen meistert. In diesem Angebot des STIU 2015 kann jede Informatiklehrperson das Richtige und Anregendste für sich finden.

<http://www.abz.inf.ethz.ch/stiu-sechs>

Das STIU Programm 2015 (Updates siehe www.abz.inf.ethz.ch/stiu-sechs)

Datum: **23. Januar 2015**

Ort: **ETH Zürich**, Hauptgebäude, Rämistrasse 101, 8092 Zürich

Zeit: **13:00 bis 18:00**

Link zur Homepage mit weiteren Informationen und dem Anmeldeformular:

www.abz.inf.ethz.ch/stiu-sechs

Ablauf

ab 12:00 Registrierung

13:00 Begrüssung durch die ETH-Rektorin, Verleihung der Ehrenmedaillen

13:30 Vortrag Ronald Rivest

14:15 kurze Pause

14:30 1. Workshop-Runde

16:00 Kaffeepause mit Snacks

16:30 2. Workshop-Runde

18:00 Apéro

STIU Workshopangebot 2015

(Details auf <http://abz.inf.ethz.ch/stiu-sechs-workshops>)

Workshop 1: Meike Akveld: *The Shape of Space - Eine Alternative zur Schulung des Raumvorstellungsvermögens*

Workshop 2: Jarka Arnold und Aegidius Plüss: *Programmieren lernen mit dem neuen EV3 Roboter*

Workshop 3: Albrecht Beutelspacher: *Rechnen mit Bits - Eine starke Verbindung von Informatik und Mathematik*

Workshop 4: Markus Dahinden, Lukas Fässler, Barbara Scheuner: *Erfolgreicher Programmierunterricht von der Variablen-Deklaration bis zur Flugzeugsteuerung*

Workshop 5: Sandro Feuz, Daniel Graf: *Die Schweizer Informatikolympiade - Nachwuchsförderung durch kompetitive Programmierwettbewerbe*

Workshop 6: Jens Gallenbacher: *Online-Algorithmen für die Schule*

Workshop 7: Dominik Heun, Wiebke Kothe: *Jubel, Trubel, Informatik - Ein Informatikworkshop für technische Kompetenzen im Lernlabor „Abenteuer Technik“*

Workshop 8: Alexander Repenning: *Teach Your Students Game Design in One Week - Computational Thinking durch 3D Spielprogrammierung (in Deutsch)*

Workshop 9: Jan Vahrenhold: *Facebook(™), Twitter(™) & Co. - Nicht nur ein Thema für die Medienbildung*

Rezension: **Rheticus – Wegbereiter der Neuzeit**

Philipp Schöbi, Helmut Sonderegger (Hrsg.)

«Rheticus – Wegbereiter der Neuzeit»

Bucher Verlag, Hohenems/Wien/Vaduz, 2014 (2. erw. Aufl.)

ISBN 978-3-99018-263-5

Es sind wohl nicht gar viele unter uns, die wissen, dass Georg Joachim Rheticus erstens im Jahre 1514 – also vor 500 Jahren – in Feldkirch (FL) geboren wurde und zweitens, um wen es sich bei Rheticus überhaupt handelt und was ihn so interessant und bedeutend macht. Was eine Buchreklame mit 'Wie einer auszog, die Welt zu verändern' noch offen lässt, kommt in der Überschrift des Einstieg-Kapitels des renommierten Astronomen Harry Nussbaumer (emeritierter Professor an der ETH in Zürich) um so deutlicher zum Ausdruck: 'Ohne Rheticus kein Kopernikus'. Der vorliegende Band, eine stark erweiterte und reichhaltig bebilderte Neuauflage, ist eine Würdigung dieses Feldkircher Gelehrten und Wegbereiters der Neuzeit.

Inhaltlich ist das Buch wie folgt gegliedert: I. Einbettung in die Zeit, II. Leben und Werk von Rheticus, III. Ein Wissenschaftler moderner Prägung, IV. Ergänzungen und Übersichten. Als 25jähriger Gelehrter aus Feldkirch trat Rheticus eine Reise an, die die wissenschaftliche Welt verändern sollte. Ziel seiner Reise war das ostpreußische Frauenburg, wo er vom dortigen und damals bereits 66jährigen Domherrn Nikolaus Kopernikus aus erster Hand mehr darüber erfahren wollte, wieso sich die Erde um die Sonne drehen soll und nicht umgekehrt. Ohne diese Reise wäre die kopernikanische Wende damals gar nicht möglich geworden; denn ohne Rheticus hätte Kopernikus sein Hauptwerk «De revolutionibus orbium coelestium» wohl gar nie publiziert und die Wissenschaftsgeschichte hätte bestimmt einen anderen Verlauf genommen.

Die Bedeutung von Rheticus für die Wissenschaften beschränkt sich allerdings nicht nur auf diese Geburtshelferrolle im Zusammenhang mit dem Kopernikanischen Weltbild. Als Mathematiker befasste sich Rheticus auch mit vermessungstechnischen Fragen und veröffentlichte 1551 mit seinem «Canon doctrinae triangulorum» die ersten trigonometrischen Tabellen. Ebenso bemühte er sich, der in mittleren Jahren noch Medizin studiert hatte und ab 1554 in Krakau praktizierender Arzt war, die Lehre von Paracelsus bekannt zu machen. Er pflegte ferner überaus vielfältige wissenschaftliche Kontakte wie beispielsweise zum überaus gelehrten Conrad Gesner, den er als Mitschüler an der Fraumünsterschule in Zürich kennen lernte, und zum Mathematiker Gerolamo Cardano in Mailand, um nur zwei zu nennen.

In dieser überaus sorgfältig edierten und reich illustrierten Würdigungsschrift werden auch konfessionsrelevante Themen angeschnitten, die Familiengeschichte von Georg Joachim Rheticus und weitere seiner Tätigkeiten aufgezeichnet, jene als Instrumentenmacher astronomischer Beobachtungsgeräte beispielsweise oder als Dekan in Wittenberg, der Hochburg der Reformation. Alles in allem eine faszinierende, spannende und überaus lesenswerte Geschichte eines verkannten neuzeitlichen Wegbereiters aus Feldkirch, dem wohl bedeutendsten Wissenschaftler Vorarlbergs.

Hansjürg Stocker
hjstocker@bluewin.ch

Rezension: Der Goldene Schnitt

Hans Walser

«Der Goldene Schnitt»

Edition am Gutenbergplatz Leipzig, 2013 (6. Auflage), 233 Seiten, EAGLE 001

ISBN 978-3-937219-85-1

Louis Locher-Ernst begann die Besprechung von Karl Strubeckers «Einführung in die höhere Mathematik» wie folgt: *"Man kann drei Sorten von Büchern unterscheiden: erstens solche Bücher, die man nach dem aufmerksamen Durchblättern ungelesen auf die Seite legt, zweitens solche, bei denen die erste Durchsicht zum Entschluss führt, dies und jenes gelegentlich genauer zu lesen. Bei der dritten Sorte erweckt schon die flüchtige Einsichtnahme den Wunsch, das Buch unbedingt selbst zu besitzen. Das vorliegende Werk von Strubecker gehört ohne Zweifel zur letztgenannten Sorte."* Diese Einschätzung trifft ohne Einschränkung auf das bereits in 6. Auflage erschienene Taschenbuch «Der Goldene Schnitt» von Hans Walser zu. Nebst der Überarbeitung und maßvollen Erweiterung tragen die erstmals über sechzig farbigen Abbildungen zur Attraktivität der Neuauflage in der Reihe 'IM DIENSTE DER WISSENSCHAFT' bei; dazu gehören auch drei Bilder von Jo Niemeyer (Schluchsee, D). Der nach wie vor faszinierende und aufschlussreiche Text erschien erstmals 1993 gleichzeitig bei Teubner und im Verlag der Fachvereine Zürich, damals in der Reihe 'EINBLICKE IN DIE WISSENSCHAFT'.

Die 7 ersten Kapitelüberschriften sind über die zwanzig Jahre hinweg dieselben geblieben: *Worum geht es?* (5 Seiten) – *Fraktale* (16 Seiten) – *Goldene Geometrie* (56 Seiten) – *Falten und Schneiden* (11 Seiten) – *Zahlenfolgen* (36 Seiten) – *Reguläre und halbrekuläre Körper* (21 Seiten) – *Beispiele und weitere Fragen* (32 Seiten). Späteren Auflagen ist dann noch das Kapitel *Der Goldene Schnitt in Architektur, Kunst und Natur* (18 Seiten) hinzugefügt worden. Und seit der 5. Auflage (2009) enthält das gefällige Buch einen lesenswerten und kurzen Beitrag von Hans Wußing: «Über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig».

Es ist schlichtweg erstaunlich, wie viele Fragestellungen, Sachverhalte und Probleme Hans Walser zum Titelthema zusammengetragen, modulartig aufbereitet, durch zusätzlichen Beispielen von Kollegen erweitert und bei Bedarf aktualisiert hat. Beispielsweise verwendet er fürs Verhältnis vom Goldenen Schnitt nicht mehr τ und $\rho = \tau^{-1}$, sondern das heute üblichere Φ respektive Φ^{-1} . Gleichzeitig ist überaus deutlich zu spüren, dass er sich persönlich sehr intensiv mit den von Kapitel zu Kapitel wechselnden Aspekten auseinandergesetzt hat. – Seine verständlichen Ausführungen sind mit über 120 Fragen gespickt, auf die er am Ende jeden Kapitels knappe Antworten liefert. Auch deshalb können sich Studierende, Schülerinnen und Schüler, Lehrkräfte sowie interessierte Laien mit Gewinn in die "goldene" Thematik vertiefen und dabei algebraischen wie geometrischen Aktivitäten frönen; der mathematischen Ausrichtung oder ihren Vorlieben sind kaum Grenzen gesetzt. Zusätzlich unterstützt werden ihre Eigeninitiativen und Bemühungen durch ganz praktische Tipps und "Handreichungen". Und immer wieder wird deutlich, dass der Goldene Schnitt nicht als isoliertes Phänomen auftritt, sondern in auffallend vielen Fällen das erste und somit einfachste nicht-triviale Beispiel auf dem Weg zu mathematischen Verallgemeinerungen darstellt.

Eine reichhaltige Literaturliste, ausführliche Abbildungsnachweise sowie ein umfangreiches Namen- und Sachverzeichnis runden dieses auch äusserlich überaus ansprechende Buch ab. Ich kann es allseits und vorbehaltlos empfehlen!

Hansjürg Stocker, Wädenswil
hjestocker@bluewin.ch

Walser, Hans. DIN A4 in Raum und Zeit, Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. 101 Seiten, EUR 14.50, Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2013, EAGLE 069, ISBN 978-3-937219-69-1

Es gibt zwei Arten der Elementarmathematik: top down oder bottom up. Im ersten Fall wird ein mathematisches Thema abgemagert, bis es elementar erscheint. Im anderen wird ein elementares Thema mit Mathematik angereichert, bis es mathematisch relevant ist.

Der Text von Hans Walser gehört zur zweiten Art: Ein unscheinbares Thema gewinnt Bedeutung und Glanz, indem ein kreativer und mathematisch versierter Autor es mit didaktischem Flair in verschiedene Zusammenhänge stellt, es aus mehreren Standpunkten betrachtet, variiert, verallgemeinert. Walser zeigt, wie Mathematik sich in einem elementaren Thema entzünden lässt, indem man sich auf mathematisch relevante Fragen besinnt und um Antworten ringt. Er verwickelt die Leserin, den Leser alsbald in einen Dialog, indem er Aufgaben und Fragen stellt, mit denen sie sich beschäftigen mögen. Er steckt einen Rahmen ab, in welchem sich ein virtueller mathematischer Diskurs entspinnt, wenigstens mit all jenen, die sich um Antworten zu seinen Fragen bemühen, die im Ernst und mit Musse selbst nachdenken, Mathematik machen, bevor sie die Antwort skizzieren und Kommentare des Autors weiter lesen. Damit könnte auch ein Grundmuster skizziert sein, nach dem Maturaarbeiten oder Schülerforschung gelingen müssten.

Kurz zum Inhalt: Halbieren und Zusammensetzen von Rechtecken führt auf gewisse Spiralen und die Definition von DIN-476. Mit den Spiralen kommen Punktfolgen und deren Grenzpunkte ohne, dass ein theoretischer Vorspann mit ε und $n(\varepsilon)$ potentielle Neugierde im Keim erstickt. Es folgen Gedanken zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, der Schlüsselzahl im DIN-Format, aber auch zu rationalen Eigenschaften und zu Verbindungen zum Goldenen Schnitt und zum Goldenen Trapez. Der nächste Schritt nimmt sich die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen vor. Aber Walser bleibt nicht beim DIN-Quader stecken, seine Elementarmathematik lässt Raum auch für DIN-Hyperquader. Es folgen Exkursionen zum Silbernen Rechteck, zum Achteck und zu Achteckparketten und mehr. In eine andere Richtung weisen Kreise im DIN-Rechteck (orthogonale Kreise und berührende Kreise). Das Thema wird abgerundet durch eine Exkursion in die Polyedergeometrie. Ansetzen und Abschleifen heisst der Untertitel. Dass dabei Flechtmodelle nicht fehlen, ist ein Markenzeichen des Autors.

Die Erwähnung der Zeit im Titel mag an diesem Punkt rätselhaft erscheinen. Walser gibt einen Abriss über die historische Entwicklung der Papierformate. Er lässt Schlüsselpersonen auftreten, die seit der frühen Industrialisierung Vereinheitlichungen, Standards und Normen gefördert haben. Wir erfahren auch, warum es neben DIN A-Formaten eine Reihe von B- und C-Formaten gibt.

Empirie lässt Vermutungen keimen. Walser schafft Raum für eigene Gedanken zum Thema, für Fragen, für Freude an verblüffenden Mustern, für Neugierde und Antworten. Ist das nicht der Nährboden für elementare Mathematik, für neue Sprosse in der Mathematik überhaupt?

Wie immer bei Hans Walser kommen handfeste Materialisierungen mit ansprechenden Modellen und ästhetisch überzeugende grafische Umsetzungen mathe-

matischer Ideen zum Zug. Damit zeigt er Wege vom Konkreten zum Abstrakten und zurück. Auf diesen Wegen lassen sich in heterogenen Lerngruppen verschiedene Bedürfnisse stillen und zugleich verschiedene Fähigkeiten abrufen oder differenziert angemessene Ansprüche stellen.

Es ist wieder ein Text von Walser, der als gutes Vorbild wichtige didaktische Botschaften implizit vermittelt. Ich kann ihn vorbehaltlos empfehlen und weise gerne darauf hin, dass Hans Walser am 20.11.2014 an der ETH zu einem Thema aus dem Umfeld dieses Buches vortragen wird. – Das sollten Sie nicht verpassen!

H.R. Schneebeli, Wettingen



Einladung zum 33. und letzten Basler Kolloquium für Mathematiklehrpersonen

Vier Vorträge zur Fortbildung der Mathematiklehrer und -lehrerinnen an oberen Schulen und für weitere an Mathematik, ihrer Geschichte und ihren Anwendungen Interessierte

Mittwoch, 05.11.2014, 17:15–18:15 Prof. Dr. Daniel Bättig, Burgdorf

Lernen aus Daten: Wartezeiten zwischen starken Erdbeben

Suchmaschinen im Internet, Textmining, die Suche nach verschollenen Flugzeugen, automatisches Sortieren von Fischen, Bilderkennung: all diese Prozesse verarbeiten Information, lernen aus Daten und berechnen Trefferwahrscheinlichkeiten. Zwei mathematische Werkzeuge spielen dabei eine zentrale Rolle: die Bayes-Regel, um aus Daten zu lernen, und die Shannon-Entropie, um den dabei verarbeiteten Informationsgehalt zu messen.

Im Vortrag werden diese zwei Werkzeuge exemplarisch für eine Erdbebenvorhersage eingesetzt. Begriffe wie Wahrscheinlichkeit als Plausibilitätsmass, Datenmodell und Likelihood werden dabei vorgestellt. Didaktisch wird Wert darauf gelegt, dass die Rechnungen und Computersimulationen auch für GymnasiastInnen verständlich bleiben.

Literatur:

- S.B. McGayne, *Die Theorie, die nicht sterben wollte, Wie der englische Pastor Thomas Bayes eine Regel entdeckte, die nach 150 Jahren voller Kontroversen heute aus Wissenschaft, Technik und Gesellschaft nicht mehr wegzudenken ist*, Springer Spektrum, 2014.
- D. Bättig, *Datenanalyse - der Bayes'sche Weg*, Springer-Verlag, 2014 (in Druck).

Mittwoch, 12.11.2014, 17:15–18:15 Prof. Dr. Thomas Heim, Windisch

Kalenderrechnung: Was tun, wenns am Ende nicht aufgeht?

Zeitmessung erfolgt durch Abzählen von periodischen Vorgängen. Naheliegende Masseinheiten sind dabei Tag, Monat und Jahr, da diese Perioden das individuelle und das gesellschaftliche Leben fundamental betreffen. Um den Lauf der Zeit zu erfassen, wurden in allen Hochkulturen unterschiedliche, teils sehr originelle Kalender entwickelt.

Im Referat werden die zu Grunde liegenden astronomischen Phänomene beleuchtet und darauf basierende Ansätze diskutiert, die in verschiedenen Kalendern umgesetzt werden. Die Ansätze reichen von pragmatisch-simpel über exotisch-vertrackt zu idealistisch-stur. Einige Eigenheiten des bei uns üblichen Gregorianischen Kalenders werden speziell untersucht. Die meisten Rechnungen eignen sich auch als illustrative Anwendungsbeispiele im Mathematikunterricht.

**Mittwoch, 19.11.2014, 17:15–18:15 Dr. Christoph Pöppe,
Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg**

Monumentalgeometrie aus Karton

Durch die Arbeit einer großen (Schüler-)Gruppe entsteht in relativ kurzer Zeit aus biederem Karton ein geometrisches Großobjekt, das reichhaltiges Anschauungsmaterial bietet: zu Fraktalen, periodischen Raumfüllungen (darunter auch jüngst entdeckten), unendlichen platonischen Körpern, vierdimensionalen Objekten (in der Projektion) oder nichtperiodischen Raumfüllungen (Quasikristallen). Darüber hinaus ist das Endprodukt so eindrucksvoll, dass jeder Beteiligte auf seinen Beitrag dazu stolz sein kann.

Mittwoch, 26.11.2014, 17:15–18:15 Prof. Dr. Marcel Steiner, Windisch

Eulersche Knicklast

Das klassische Problem der Auffindung der Knicklast zylindrischer Stäbe unter Last wurde bereits von Euler untersucht. Seine berühmte Knickformel gehört heute zum Standardrepertoire der Ingenieurausbildung.

Nach einem historischen Abriss zur Knickformel wird die Differenzialgleichung für einen beidseitig gelenkig gelagerten Stab unter axialer Einwirkung einer Last hergeleitet. Daraus wird für verschiedene Stabgeometrien die Formel für die Eulersche Knicklast berechnet. Aus der numerischen Lösung des stückweise konischen Stabes wird sodann auf die technisch optimale Form des Stabes geschlossen, bei der die Knicklast maximiert wird.

Zur Validierung der Berechnungen wurden geometrietreue, aus einer Aluminiumlegierung hergestellte Stäbe dem Knickversuch unterworfen, um die experimentell ermittelten Knicklasten mit den im theoretischen und numerischen Teil gefundenen Knicklasten zu vergleichen.

Literatur:

- P. Cachot, M. Meier, M. Steiner und U. Wüst, *Eulersche Knicklast*, Elemente der Mathematik, 65, No. 3, 2010, p. 104–120.

Wo?

Im grossen Hörsaal des Mathematischen Instituts der Universität Basel, Rheinsprung 21, 4001 Basel.

Ab 16.30 Uhr gemütliches Beisammensein bei Kaffee und Tee im 1. Untergeschoss.

Nach den Vorträgen gehen wir jeweils mit den Referenten essen. Kommen Sie doch auch einmal mit! Es ist keine Anmeldung nötig.

Organisator

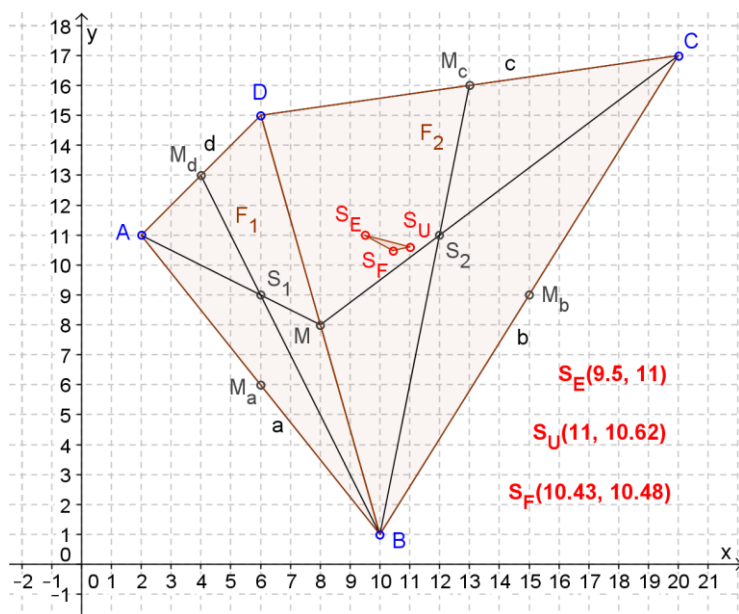
Marcel Steiner-Curtis
Beauftragter Mathematik-Kolloquium PZ.BS
Ameisenholzstrasse 14
4142 Münchenstein
steiner.marcel@gmail.com

Schwerpunkt – von was?

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

"Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2". Das sagt sich so leicht, aber was ist eigentlich mit dem Wort "Schwerpunkt" gemeint?

Zur Illustration sollen hier mit Hilfe des Programms "GeoGebra" der Schwerpunkt S_E der **Ecken**, der Schwerpunkt S_U des **Umfangs** und der Schwerpunkt S_F der **Fläche** des gleichen Vierecks dargestellt werden. Es zeigt sich sozusagen graphisch, dass diese drei Punkte alle voneinander verschieden sind! Es muss deshalb zwischen diesen drei Punkten unterschieden werden. Werden die Eckpunkte so gewählt, dass das Viereck ABCD eine einspringende Ecke hat, ist es sogar möglich, dass alle diese drei



Schwerpunkte ausserhalb des Vierecks liegen!

Der Schwerpunkt von Massenpunkten $S(x_s, y_s)$ berechnet sich bekanntlich wie folgt:

$$x_s = \frac{\sum_k m_k x_k}{\sum_k m_k}; y_s = \frac{\sum_k m_k y_k}{\sum_k m_k}$$

Nehmen wir an, dass in allen Ecken ein Massenpunkt der Masse 1 gegeben ist, ergibt sich für das links dargestellte Viereck mit den Ecken $A(2/11)$, $B(10/1)$, $C(20/17)$ und $D(6/15)$ der **Schwerpunkt der Ecken** $S_E(9.5/11.0)$.

Für den Schwerpunkt des Umfangs kann angenommen werden, dass sich die ganze Masse jeder Seite in der jeweiligen Seitenmitte befinden würde. Die Masse einer Seite ist dabei natürlich proportional zu ihrer Länge. Damit wird der **Schwerpunkt des Umfangs** (angenähert) $S_U(11.0025/10.6164)$.

Der Schwerpunkt der Fläche könnte mit Integralrechnung berechnet werden. Es geht aber auch mit elementargeometrischen Mitteln: Wir teilen das Viereck durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke mit Flächeninhalt F_1 resp. F_2 auf. Die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecksflächen sind die Flächenschwerpunkte S_1 respektive S_2 der Dreiecke, die sich im jeweiligen Schnittpunkt der Schwerlinien befinden; die zugehörigen Massen entsprechen den Flächeninhalten dieser Dreiecke, die z. B. mit der Heron-Formel oder mit passenden rechtwinkligen Trapezen berechnet werden können. Es darf gerechnet werden, wie wenn die gesamte Masse jeder Fläche in ihrem jeweiligen Schwerpunkt konzentriert wäre. Mit $F_1 = 36$ und $F_2 = 102$ und $S_1(6/9)$ resp. $S_2(12/11)$ ergibt die Rechnung für den **Schwerpunkt der Fläche** (angenähert) $S_F(10.4348/10.4783)$.

Wie man leicht zeigt, stimmt bei jedem **Dreieck** wenigstens der Schwerpunkt der Ecken mit dem Schwerpunkt der Fläche überein. Der Schwerpunkt des Umfangs hingegen stimmt im Allgemeinen bereits nicht mehr mit dem Schwerpunkt der Fläche überein. Die Beweise dafür dürfen dem Leser überlassen werden.

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG -SSPES - SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@mng.ch
Rain 14 Tel. 032 512 50 84
5000 Aarau

Inserateverwaltung — Publicité

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP:*
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées:*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — Tirage

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti
6600 Locarno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathemattikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 127 30.11.2014 (20.01.2015)
Nr. 128 31.03.2015 (20.05.2015)
Nr. 129 31.07.2015 (20.09.2015)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch