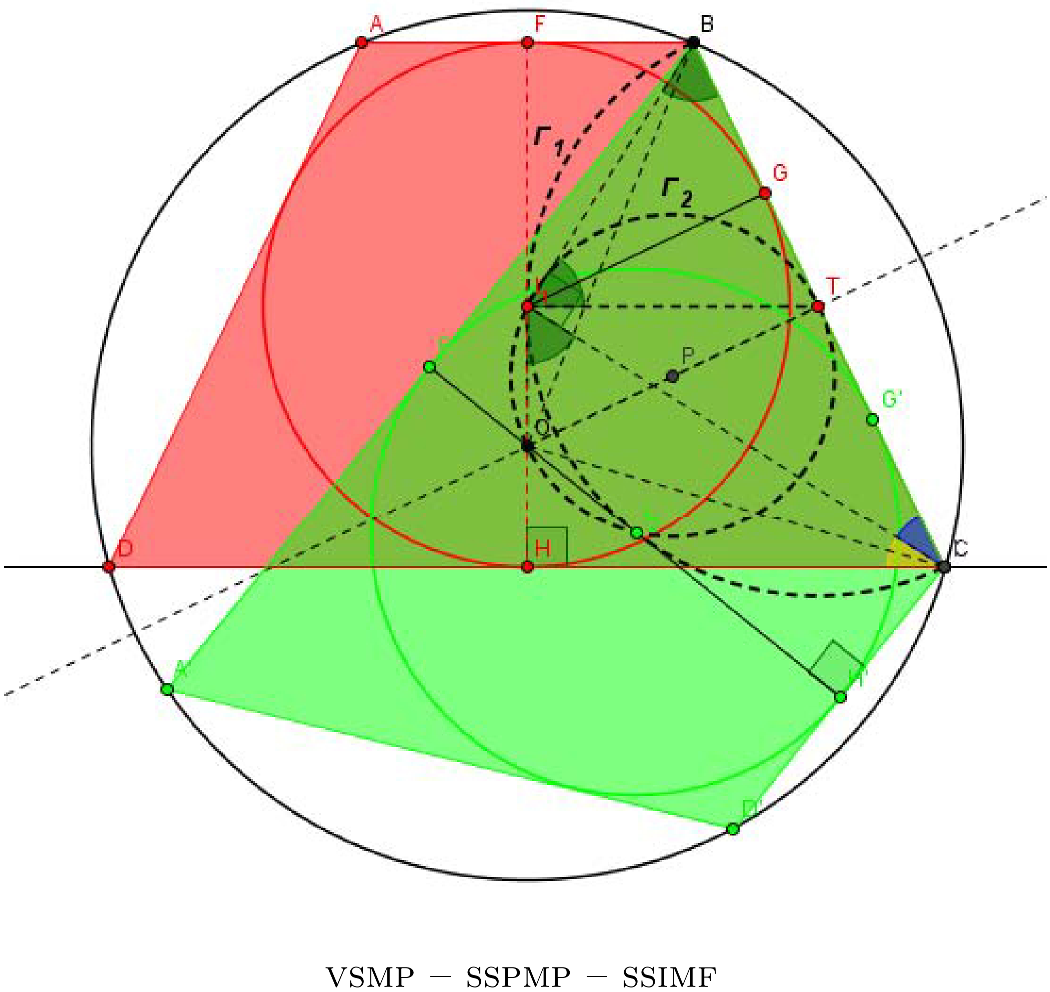
Bulletin

Januar 2014 – Janvier 2014 N° **124**



VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik– und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch

Page de titre

Fibonacci Meets Pythagoras, Computergraphik: Eugen Jost, Thun (cf. page **??**).

Ruzzle : à la recherche de la plus belle grille

Didier Müller, Lycée cantonal de Porrentruy

Ruzzle[1] est un jeu de lettres aux règles simples : une grille de quatre fois quatre lettres, et deux minutes pour trouver le plus de mots possibles, avec pour seul impératif que les cases se touchent. On ne peut pas utiliser deux fois la même case, ce qui fait que la longueur maximale d'un mot sera de 16.

Pour pimenter le jeu, *Ruzzle* reprend également les cases bonus « lettre compte double », « lettre compte triple », « mot compte double » et « mot compte triple » du Scrabble. Pour gagner, il faudra obtenir le plus gros score !

Dans cet article, on se contentera de trouver tous les mots possibles, sans s'occuper des bonus. Mais notre but est ambitieux : trouver la grille qui contient le plus de mots, celle que nous appellerons la « plus belle » grille.

Ressources trouvées sur le web

Dictionnaire

Premier outil indispensable : un dictionnaire de mots français, avec des lettres non accentuées, contenant des mots au singulier et au pluriel, et des verbes conjugués à tous les temps. Par chance, ce dictionnaire existe sur le web. Il faut juste l'adapter à nos besoins, à savoir éliminer les mots d'une seule lettre, les mots composés et les mots de plus de 16 lettres.

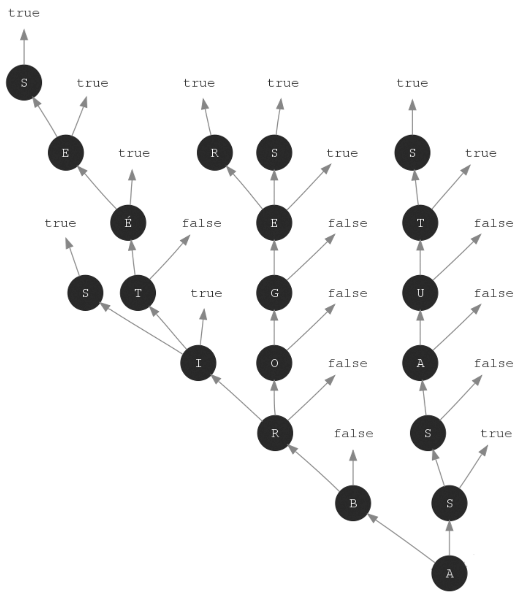
Ce dictionnaire purgé contient encore 328'465 mots[2]. Mais il faut préciser que ce n'est pas le même qu'utilise *Ruzzle*. En effet, *Ruzzle* donne plus de mots que n'en trouve le programme.

Structure de données du dictionnaire

Dans ce projet, il faut non seulement chercher tous les mots, mais encore les trouver très vite, en quelques millisecondes. En effet, il faudra faire cette recherche très souvent, d'où la nécessité d'avoir une représentation performante du lexique.

Un *trie* ou *arbre préfixe* est un arbre numérique ordonné qui est utilisé pour stocker une table associative où les clés sont généralement des chaînes de caractères. Contrairement à un arbre binaire de recherche, aucun nœud dans le *trie* ne stocke la chaîne à laquelle il est associé. C'est la position du nœud dans l'arbre qui détermine la chaîne correspondante.

Pour tout nœud, ses descendants ont en commun le même préfixe. La racine est associée à la chaîne vide. Des valeurs ne sont pas attribuées à chaque nœud, mais uniquement aux feuilles et à certains nœuds internes se trouvant à une position qui désigne l'intégralité d'une chaîne correspondant à une clé.



Ci-contre, un trie construit avec les mots :
abri, abris, abrité, abritée, abritées, abroge, abroger, abroges, as, assaut et assauts.

Chercher tous les mots d'une grille

Un programme très efficace existe sur le web qui permet de trouver tous les mots d'une grille[3]. Il utilise évidemment un Trie. La liste des mots est trouvée en quelques millièmes de secondes[4].

Recherche de la plus belle grille

Petit calcul grossier : il existe $26^{16} = 4{,}26 \cdot 10^{22}$ grilles différentes. Même si l'on enlève les grilles ne contenant que des consonnes, il sera impossible de les tester toutes ! Et il va falloir compter sur la chance. Ce qui veut dire qu'il sera quasiment impossible d'être sûr qu'il n'y a pas de plus belle grille que celle que nous trouverons.

Généralement, dans une partie réelle de *Ruzzle*, la grille proposée compte entre 250 et 350 mots, parfois plus.

Grille aléatoire

Première idée qui vient à l'esprit : générer un grand nombre de grilles aléatoirement. Cela donnera une première idée. Mais ne faisons pas n'importe quoi. Quand on joue souvent à *Ruzzle*, on constate que des lettres n'apparaissent presque jamais : Z, W, K, J, Y, notamment. On va d'abord calculer les fréquences des lettres dans notre dictionnaire. Les lettres seront tirées au sort en tenant compte de fréquences que nous avons calculées :

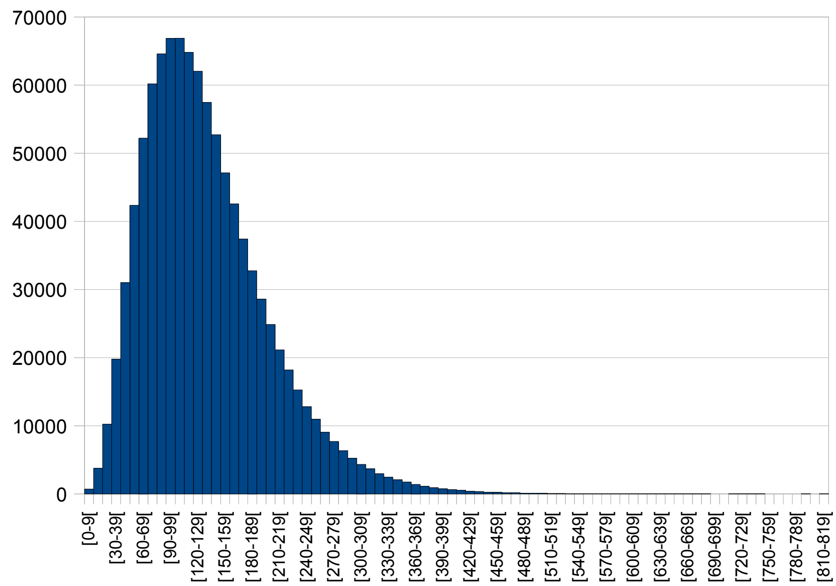
E	S	A	I	R	N	T	O	L	U	C	M	D
14.89%	10.21%	9.71%	9.40%	8.67%	7.34%	6.82%	5.82%	4.01%	3.60%	3.40%	2.54%	2.36%
P	G	B	F	H	Z	V	Q	Y	X	J	K	W
2.35%	1.60%	1.40%	1.36%	1.16%	1.07%	0.96%	0.50%	0.34%	0.25%	0.18%	0.05%	0.01%

On peut remarquer que cette table est un peu différente de celle des fréquences des lettres de la langue française[6]. La raison est simple : dans *Ruzzle*, chaque mot n'apparaît qu'une seule fois.

La meilleure grille trouvée avec cette méthode est `PETESRNIEIATMSEL` (on a écrit les 16 lettres ligne par ligne), qui contient 827 mots. C'est *grosso modo* le double de ce qu'on avait vu sur le jeu réel.

Dans une autre expérience, nous avons généré un million de grilles en utilisant les fréquences ci-dessus. Cela a mis environ 4 heures. Un rapide calcul nous permet d'estimer le temps que nous mettrions pour tester naïvement toutes les grilles possibles : environ 20'000 milliards d'années !

Sur l'histogramme ci-dessous, on a mis en abscisse le nombre de mots trouvés (classes de largeur 10) et en ordonnée le nombre de grilles correspondants. On voit que la grande majorité des grilles comptent entre 50 et 200 mots. Il y a donc un clair décalage entre le jeu réel et notre simulation. Explications possibles : soit *Ruzzle* utilise un dictionnaire beaucoup plus fourni que le nôtre, soit les grilles ne sont pas générées totalement au hasard, soit les deux...



Cette méthode naïve a vite montré ses limites. Il va falloir trouver des métaheuristiques[5] plus « intelligentes » pour améliorer nos performances. Toutes les méthodes que nous allons voir ont quelque chose en commun : on va partir d'une grille aléatoire, puis on va essayer d'améliorer petit à petit cette grille pour arriver à un maximum local.

Petite définition préalable : deux grilles sont « voisines » si elles ne diffèrent que d'une lettre.

Méthode de la plus grande pente

1. Générer une grille aléatoire.
2. Parmi les 400 (25 lettres x 16 cases) grilles voisines, choisir celle qui contient le plus de mots.
3. Si on a trouvé une meilleure grille, retourner à 2. Sinon STOP.

Le résultat dépend beaucoup de la grille de départ. La plus belle grille trouvée avec cette méthode est `STIPENALARIMSTES`, qui compte 1388 mots. Par rapport à la méthode naïve de la grille aléatoire, l'amélioration est spectaculaire.

Méthode avec tabous

Le problème de la méthode de la plus grande pente est que l'on se coince toujours dans un maximum local, et qu'il est impossible d'en sortir. Pour pallier cela, on peut ajouter une liste de tabous : on garde en mémoire les dernières grilles visitées, afin de ne pas revenir dessus. Si la liste est suffisamment longue, cela évite les blocages. La longueur de la liste des tabous est d'ailleurs le seul paramètre avec lequel on peut jouer.

1. Générer une grille aléatoire.
2. Parmi les 400 grilles voisines, choisir la plus belle qui n'est pas dans la liste des tabous.
3. Si la liste des tabous est pleine, retirer de cette file la grille la plus ancienne.
4. Mettre la grille précédente en queue de la liste des tabous.
5. Retourner à 2, tant qu'on n'a pas décidé de s'arrêter.

La plus belle grille trouvée avec cette méthode est `SMLPEIAERTNRSAIT`, qui contient 1473 mots.

Recuit simulé

Le recuit simulé introduit plus de hasard que dans la méthode avec tabous. On progressera toujours d'une grille à l'une de ses voisines, mais celle-ci sera tirée au sort. De deux choses l'une : soit la nouvelle grille est meilleure, et on la garde comme grille courante, soit elle est moins bonne, et on ne la gardera qu'avec une certaine probabilité qui diminuera avec le temps.

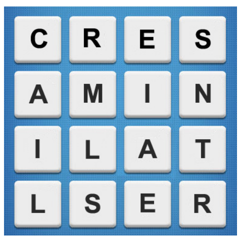
1. Choisir une « température » de départ T.
2. Générer une grille aléatoire. Appelons-la $G1$.
3. Copier la grille $G1$ dans une grille $G2$, puis effacer une case et placer une nouvelle lettre tirée au sort en tenant compte des fréquences.
4. Calculer $\Delta = \text{score}(G1) - \text{score}(G2)$
5. Si $\Delta \leq 0$, $G1 \leftarrow G2$; le cas échéant, mettre à jour le meilleur score et la meilleure grille. Aller à 8.
6. Générer un nombre réel aléatoire entre 0 et 1, que nous appellerons r.
7. Si $r < \exp(-\Delta/T)$, $G1 \leftarrow G2$.
8. Diminuer T.
9. Retourner à 3, tant qu'on n'a pas décidé de s'arrêter.

Le terme *température* du point 1 fait référence au procédé sidérurgique du recuit : on chauffe fortement un métal, puis on fait descendre la température par paliers.

Dans le recuit simulé, la décroissance de la température est un paramètre important avec lequel il faut jouer. Si la température décroît rapidement, on arrivera vite à un bon résultat, mais on risque de se coincer plus rapidement dans un maximum local. En effet, quand T diminue, $\exp(-\Delta/T)$ diminue aussi, et on retiendra moins volontiers une plus mauvaise grille. On fait généralement décroître la température par paliers : on laisse la température stable un certain nombre d'itérations (encore un paramètre délicat à régler), puis on multiplie T par un coefficient $0 < c < 1$ (dernier paramètre à choisir). Remarquons encore que plus Δ est grand, plus la probabilité d'acceptation d'une mauvaise grille est faible.

La plus belle grille trouvée avec cette méthode (après environ 2000 essais) est `CRESAMINILATLSER`, qui contient 1634 mots. On a utilisé les paramètres suivants :
$T_0 = 70$, paliers de longueur 10, $c = 0.95$, 1000 itérations au maximum.

Par un hasard incroyable, on a trouvé une autre grille composée des mêmes lettres et qui contient les mêmes 1634 mots : `RTNSEAIESLMRLIAC` (cette grille s'obtient en lisant la grille ci-contre de droite à gauche et de bas en haut).



Algorithme génétique

Dernière approche : un algorithme reprenant (plus ou moins) les principes de l'évolution, d'où son nom d'algorithme génétique. L'idée est d'observer une « population » de grilles que l'on va croiser deux par deux (*crossover*). Ce crossover consiste à couper deux chaînes, croiser deux segments, et les recoller. Par exemple, les deux chaînes :

```
ABCDEFGHIJ|KLMNOP                              ABCDEFGHIJ|PONMLK
       et                  deviennent                 et
ZYXWVUTSRQ|PONMLK                              ZYXWVUTSRQ|KLMNOP
```

1. Générer $2n$ grilles aléatoires.
2. Classer et numéroter ces $2n$ grilles selon leur score, du meilleur au moins bon.
3. Croiser les grilles $2k-1$ et $2k$, pour k allant de 1 à n.
4. Effectuer une *mutation* pour chaque grille : avec une certaine probabilité, effacer une case et placer une nouvelle lettre tirée au sort en tenant compte des fréquences.
5. Classer et numéroter les $2n$ grilles obtenues selon leur score, du meilleur au moins bon.
6. Dupliquer la grille 1 (la meilleure) et placer ce doublon en position $2n$, après avoir éliminé la grille $2n$ (la moins bonne).
7. Le cas échéant, mettre à jour le meilleur score et la meilleure grille.
8. Retourner à 3, tant qu'on n'a pas décidé de s'arrêter.

Les paramètres avec lesquels on peut jouer sont la taille de la population et la probabilité de mutation.
La plus belle grille trouvée avec cette méthode est `APEDRMLREIAESNTS`, qui compte 1508 mots. On a observé pendant 600 générations une population de 80 grilles, avec une probabilité de mutation de 10%.

Petite analyse des résultats

Les résultats complets sont disponibles sur [2]. On a gardé les 4 meilleures résultats obtenus avec chacune des méthode.

- Ce qui frappe d'abord, c'est que toutes ces excellentes grilles ne contiennent que les lettres A, C, E, I, L, M, N, P, R, S et T. Les voyelles O et U sont étrangement absentes. Inversement, on ne s'attendait pas forcément à trouver C et P.
- Sans surprise, les deux premières méthodes décrites dans cet article arrivent en bas du classement. On n'a pas dépassé 900 mots avec les grilles aléatoires et on reste en dessous des 1400 mots avec le méthode de la plus grande pente.
- On a dépassé les 1400 mots avec les trois autres métaheuristiques. C'est le recuit simulé qui a donné les meilleurs résultats, mais les deux autres méthodes pourraient probablement fournir de meilleures grilles, si l'on jouait davantage avec les paramètres.

À vous de jouer !

Comme on l'a déjà dit au début de l'article, il est très probable qu'il existe de plus belles grilles. Pourquoi ne pas vous laisser prendre au jeu et tenter de les découvrir ? Envoyez-moi vos découvertes à didier.muller@ju.educanet2.ch. Je mettrai à jour le tableau de [2], page où vous trouverez par ailleurs les programmes Python utilisés.
On peut aussi s'amuser à trouver les plus belles grilles avec contraintes. Par exemple :

- « E » est interdit dans la grille,
- « E » est la seule voyelle autorisée,
- contenir le plus de mots de 4 lettres,
- etc.

Références

[1] Site officiel de Ruzzle, <www.ruzzle-game.com/>
[2] Müller Didier, « Ruzzle : à la recherche de la plus belle grille », <www.nymphomath.ch/info/algo/corriges/ruzzle/>
[3] Ferraro Tyler, « Ruzzle-Solver », <https://github.com/TylerFerraro/Ruzzle-Solver>
[4] Mannino Miro, « Ruzzle Solver Algorithm **»**, **<**http://miromannino.com/ruzzle-solver-algorithm**>**
[5] Müller Didier, « Le problème des *n* dames pour illustrer les métaheuristiques », Bulletin 113 de la SSPMP, 2010
[6] Müller Didier, « Analyse des fréquences en français », <www.nymphomath.ch/crypto/stat/francais.html>

Histoire de trapèze isocèle

Jean Piquerez

Le problème suivant a été donné lors d'un concours d'entrée à Polytechnique : « Un trapèze isocèle, de périmètre 16, est inscrit dans un cercle de rayon 4. Calculer les côtés et le rayon du cercle inscrit ».

Ce problème sous-entend naturellement que le trapèze isocèle possède un cercle inscrit, ce qui n'est généralement pas le cas. J'ai voulu résoudre ce problème sur le plan littéral. Je l'ai donc reformulé ainsi :

« Un trapèze isocèle de périmètre $4p$ est inscrit dans un cercle de rayon R. Sachant qu'il est circonscriptible à un cercle de rayon r, calculer r et ses côtés. »

Figure 1

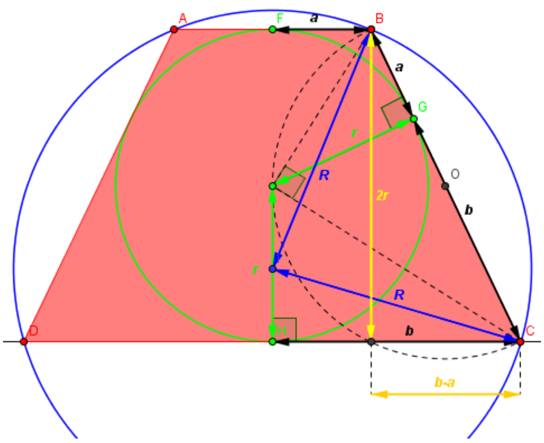
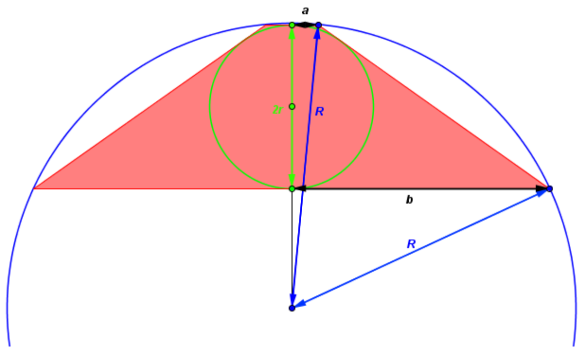


Figure 2



Posons $AB = 2a, CD = 2b$ et $BC = DA = c$.
Comme $BF = BG$ et $CG = CH$, il vient : $c = a + b$

Par Pythagore on a : $FH^2 = (2r)^2 = c^2 - (b-a)^2 = (b+a)^2 - (b-a)^2 = 4ab \Rightarrow r = \sqrt{ab}$ (1)

De plus, on a : $4p = 2(a+b+c) = 2(a+b+a+b) = 4(a+b) \Rightarrow p = a+b$ (2)

Toujours par Pythagore, on a : $\sqrt{R^2 - a^2} \pm \sqrt{R^2 - b^2} = 2r$ (3) selon les cas de figure.

D'où : $2R^2 - a^2 - b^2 \pm 2\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} = 4r^2 \Rightarrow (4ab + a^2 + b^2 - 2R^2)^2 = 4(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)$

$$\Rightarrow 14a^2b^2 + \underbrace{a^4 + b^4}_{(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2} + \underbrace{8a^3b + 8ab^3}_{8ab(a^2+b^2)} - 16R^2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2b^2+(p^2-2ab)^2+8ab(p^2-2ab-2R^2)=0 \Leftrightarrow p^4+4ab(p^2-4R^2)=0 \quad (4)$$

(2) dans (4) : $p^4+4a(p-a)(p^2-4R^2)=0 \Leftrightarrow 4(p^2-4R^2)a^2-4p(p^2-4R^2)a-p^4=0$ équation du second degré donnant la solution de a et de b puisque (4) est symétrique en a, b.
Comme $\Delta=4p^2(p^2-4R^2)^2+4p^4(p^2-4R^2)=8p^2(p^2-4R^2)(p^2-2R^2)$, il vient :

$$a=\frac{p}{2}\left[1-\sqrt{\frac{2(p^2-2R^2)}{p^2-4R^2}}\right] \text{ et } b=\frac{p}{2}\left[1+\sqrt{\frac{2(p^2-2R^2)}{p^2-4R^2}}\right] \Rightarrow r=\frac{p^2}{2\sqrt{4R^2-p^2}}$$

Application numérique : $p=R=4$

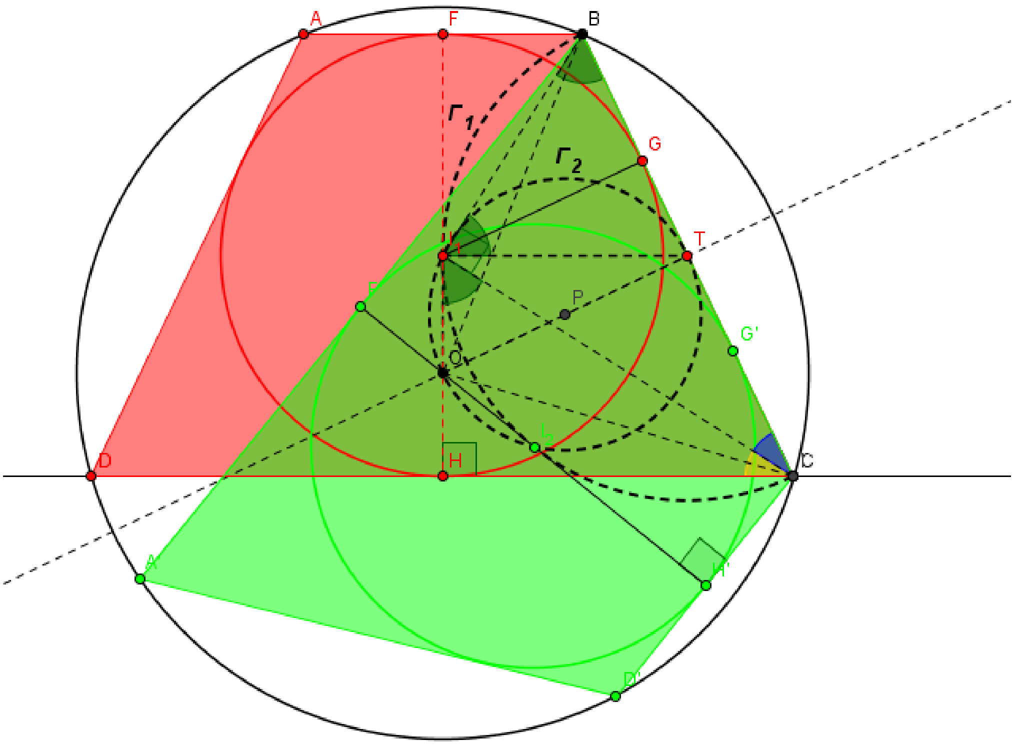
$$a=2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cong 0{,}37,\ b=2\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cong 3{,}63 \text{ et } r=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cong 1{,}15$$

et l'on trouve les valeurs numériques demandées.

Construction : On construit une corde $[BC]$ de longueur $p=a+b$ dans un cercle de rayon R et de centre O. Le centre I du cercle inscrit de rayon $r=\sqrt{ab}$ est à l'intersection d'un demi-cercle Γ_1 de diamètre BC et d'un cercle Γ_2 de centre $P=\text{mil}(O;T)$ et de rayon PO. En effet, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\triangle I_1TB \text{ isocèle en } T \Rightarrow \widehat{I_1BT}=\widehat{TI_1B}\\ \widehat{BCI_1}=\widehat{I_1CH} \Rightarrow \widehat{I_1BC}=\widehat{HI_1C}\end{array}\right\}\Rightarrow 90°=\widehat{CI_1B}=\widehat{CI_1T}+\widehat{TI_1B}=\underbrace{\widehat{CI_1T}+\widehat{HI_1C}}_{\widehat{OI_1T}}$$

On obtient ainsi les points I_1 et I_2 et deux solutions symétriques (en rouge) par rapport à la droite (OP).



Sur le même thème on peut imaginer le problème suivant : « Déterminer les côtés du trapèze isocèle simultanément inscriptible dans un cercle de rayon R et circonscriptible à un cercle de rayon r. »

On a donc à nouveau les relations (1) et (3). On en tire :

$$\left.\begin{array}{r} b=\dfrac{r^2}{a}\Rightarrow a^2b^2=r^4 \\ 12a^2b^2+(a^2+b^2)^2+8ab(a^2+b^2-2R^2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 12r^4+\left(a^2+\frac{r^4}{a^2}\right)^2+8r^2\left(a^2+\frac{r^4}{a^2}-2R^2\right)=0$$

Posons $a^2=u$; il vient alors :

$$\underbrace{u^2+\frac{r^8}{u^2}}_{\left(u+\frac{r^4}{u}\right)^2-2r^4}+8r^2\left(u+\frac{r^4}{u}\right)+14r^4-16r^2R^2=0\Rightarrow x^2+8r^2x+12r^4-16r^2R^2=0$$ en posant $x=u+\dfrac{r^4}{u}$

On trouve : $x=2r\sqrt{r^2+4R^2}-4r^2$

Revenant à u, on a : $u^2-2r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)u+r^4=0\Rightarrow u=r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm\sqrt{\Delta}$

avec $\Delta=r^2\left[\left(\sqrt{r^2+4R^2}-2r\right)^2-r^2\right]=4r^2\left[(r^2+R^2)-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]$, d'où :

$u=r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm 2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}$.

Par conséquent on a : $a=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)\pm 2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$

Comme $a\le r$, on peut montrer qu'il faut choisir le signe « $-$ ». Il s'ensuit :

$a=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)-2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$ et

$b=\sqrt{r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)+2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}}$

<u>Conditions d'existence d'une solution</u> :

$r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\ge 0\Leftrightarrow R\ge r\sqrt{2}$ et

$r(\sqrt{r^2+4R^2}-2r)-2r\sqrt{\left[r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}\right]}\ge 0$ qui est toujours vrai.

Remarque : Comme la résolution de ce problème n'exige que des quadratures, la solution est, bien entendu, aussi constructible à la règle et au compas.

Exposition : "La physique des objets du quotidien"

La Commission Romande de Physique a le plaisir de vous présenter sa nouvelle exposition qui porte sur la physique des objets du quotidien. Elle met ainsi en avant un ensemble d'objets, les appareils de production de la lumière (fluocompacts, LEDs et OLEDs), ainsi que le fonctionnement des systèmes de géolocalisation (GPS).

Voilà près de 2 ans qu'une sous-commission de la CRP planche sur sa nouvelle exposition. Elle fait suite aux récents cours de perfectionnement dont les sujets couvraient les thèmes de la physique moderne (physique quantique et relativité) ainsi que des nanotechnologies. L'exposition consiste en une dizaine de panneaux en format A0 imprimés sur du tissu facile d'utilisation et prêts à être suspendus. A part les frais de port, la réservation et bien-entendu gratuite.

Pour tout renseignement, vous pouvez contacter Monsieur Stéphane Davet au 0796231484 ou consulter le site internet de la CRP :
http://www.vsmp.ch/crp/annonces/

Les réservations sont d'ores-et-déjà accessibles à la même adresse. La Commission Romande de Physique se réjouit de votre participation et de vos futures commandes.

Les prochaines activités de la Commission porteront sur la mise en place du futur cours de perfectionnement, qui aura lieu à Champéry fin septembre 2014 sur le thème des énergies renouvelables, ainsi que sur une refonte de notre brochure : « physique nucléaire » rédigé historiquement par Eric Lindemann.

Stéphane Davet

Ausschreibung: Lehrmittelprojekte der DMK

Es ist ein zentrales Anliegen der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK), den Mathematikunterricht an Gymnasien der deutschsprachigen Schweiz zu unterstützen und zu fördern. Dies geschieht unter anderem durch das Erstellen geeigneter Lehrmittel. Eine kürzlich bei den Mathematiklehrkräften der Deutschschweiz durchgeführte Umfrage hat gezeigt, dass eine Auffrischung des aktuellen DMK-Literaturangebots wünschenswert ist und Bedarf an weiteren Lehrwerken besteht. Zurzeit ist die Algebra-Reihe in Bearbeitung, und auch die Übersetzung der DMK-Formelsammlungen ins Englische wird in Kürze abgeschlossen sein.

Im Rahmen einer kompetitiven Ausschreibung lädt die DMK erfahrene und neue Autorinnen und Autoren dazu ein, das derzeitige Lehrmittelangebot [http://www.vsmp.ch/dmk/index.php?m=lehrmittel] durch neue Buchprojekte zu ergänzen und zu bereichern.

Gymnasium

Vorgeschlagene Projekte sollen auf den Unterricht im **Grundlagenfach Mathematik** am Schweizer Gymnasium ausgerichtet sein und sich am aktuellen **Kanon der Mathematik** [www.math.ch/kanon/] orientieren. Insbesondere gilt es zu beachten, dass eine ausgeglichene Verteilung von semantischen, syntaktischen und explorativen Aspekten besteht. Eine parallele Entwicklung in den Sprachen Deutsch und Englisch ist möglich und willkommen.

Mögliche **Lehrmittelprojekte** sind:

- Lehrmittel zu den Stoffgebieten *Analysis* (insbesondere Differential- und Integralrechnung), *Vektorgeometrie* und/oder *Stochastik*. Dabei werden auch Bezüge und Querverbindungen zu angewandten Aspekten wie Numerik, Modellbildung oder der Einbezug von geeigneter Software begrüsst.

Bei den weiteren Büchern, die primär als **Aufgabensammlungen** konzipiert sind, wird darauf Wert gelegt, dass sie keine grossen Theorieteile enthalten. Besonders von Interesse sind:

- *Aufgabensammlung Analysis*: Sie deckt die Themengebiete Folgen und Reihen, Funktionen, Differential- und Integralrechnung sowie Differentialgleichungen, Modellierung und numerische Aspekte ab.

- *Aufgabensammlung Geometrie*: Sie beinhaltet die Themengebiete Elementargeometrie, Trigonometrie, Stereometrie und allenfalls Vektorgeometrie.

- *Aufgabensammlung Stochastik*: Sie enthält die Themengebiete deskriptive Statistik (insbesondere auch Umgang mit Daten), Zufallsexperimente, Zufallsvariablen und Erwartungswert, Verteilungsfunktionen und beurteilende Statistik. Die Verwendung von realen, statistischen Daten aus der Schweiz wird gewünscht.

Fachmittelschule

Zusätzlich geplant ist ein **Lehrmittel für die Fachmittelschule**, welches sich nach dem Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen der EDK [http://www.edk.ch/dyn/13722.php] richtet. Es soll speziell auf die künftigen Anforderungen der Berufsfelder der Absolventen (Gesundheit, Soziales, Pädagogik, Gestaltung und evtl. Kommunikation) ausgerichtet sein.

Bewerbungen
Bewerbungen können per Email an die Präsidentin der DMK, Daniela Grawehr (grawehr@kfanet.ch), gerichtet sein und sollen folgende Unterlagen enthalten:

1. **Autor(en):** Kurzer Lebenslauf (maximal 2 A4 Seiten pro Autorin/Autor) mit Aufstellung der bisherigen Lehrtätigkeiten, Mitarbeit in fachlichen Projektgruppen, Lehrmittel- und Buchprojekterfahrung (falls vorhanden).
2. **Projekt:** Maximal 5 A4-Seiten mit einer schriftlichen Kurzvorstellung des Projekts (Titel und Thema, Konzeptbeschrieb, provisorisches Inhaltsverzeichnis, ungefähre Seitenzahl, geschätzter zeitlicher Rahmen bis zur Fertigstellung des Buches).
3. **Probekapitel:** Optional (falls bereits vorhanden).

Eingereichte Projekte werden ausführlich durch die DMK begutachtet. Die Projekte werden von der DMK organisatorisch betreut, fachlich kollektoriert und finanziell unterstützt.

Eingabefrist: 31. März 2014

Schwyz, im Dezember 2013

Daniela Grawehr
Präsidentin DMK

Buchbesprechung

Mathematik für Naturwissenschaften: Einführung in die Lineare Algebra, Thomas P. Wihler,viii und 207 Seiten, 2012 Haupt Verlag, ISBN 978-3-8252-3636-6

Der Titel umschreibt Inhalt und Anspruch des Buches sehr nüchtern. Er lässt die im Buch enthaltene, vielfältige und inspirierende Sammlung von Anwendungen kaum erahnen. Zahlreiche spannende Beispiele aus den Naturwissenschaften - Atmosphärenmodell, Datenübermittlung, chemische Reaktionsgleichungen, Leslie-Modelle in der Biologie, etc. - motivieren oder veranschaulichen wichtige Sätze aus der Linearen Algebra. Das Buch ist als Einführung gedacht: Die praxisrelevanten, theoretischen Grundlagen werden häufig als Werkzeuge zur Beantwortung von konkreten, naturwissenschaftlichen Fragen präsentiert. Obwohl weitgehend auf rigorose Beweise verzichtet wird, finden sich an manchen Stellen erhellende Verifikationen oder intuitive Erklärungen.

Ausgehend vom physikalischen Beispiel eines elektrischen Stromkreises führen das Ohmsche und die Kirchhoffschen Gesetze zu einem ersten linearen Gleichungssystem für drei unbekannte Stromstärken. Schon ist der Weg bereitet für die Themen Gauss-Elimination und Matrixnotation. Behandelt werden weiterhin reguläre und singuläre Matrizen, Determinanten und über- bzw. unterbestimmte Gleichungssysteme. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Vektorräumen. Neben Grundoperationen mit Vektoren und Linearkombinationen werden auch die linearen Unterräume ausführlich diskutiert. Dabei wird sowohl an die Parameterdarstellung der Ebene aus der Vektorgeometrie in der Schule angeknüpft, als auch eine Verbindung zwischen linearen Gleichungen und Unterräumen hergestellt: Die Lösungsmenge eines homogenen, linearen Gleichungssystems bildet einen linearen Unterraum. Bei den Basen und Koordinaten wird auf die zentrale Tatsache hingewiesen, dass sich die Koordinaten immer auf eine gegebene Basis beziehen. Wussten Sie, dass sich jede chemische Verbindung, die sich aus den Molekülen Quarz, Korund und Disthen darstellen lässt, auch nur mit Quarz und Disthen geschrieben werden kann? Grund dafür ist, dass der Raum aller möglichen „Linearkombinationen“ von Quarz, Disthen und Korund die Dimension 2 hat und von Quarz und Disthen alleine aufgespannt wird. Auf dieses faszinierende Beispiel folgen die euklidische Norm, Skalarprodukt und die wirkungsvolle Projektionseigenschaft. Sie ist dann beispielsweise wesentlich für die Methode der kleinsten Quadrate und die diskrete Fouriertransformation im dritten Kapitel. Es folgen die linearen Abbildungen im vierten Kapitel. Aufgefallen sind mir nicht nur die eleganten Definitionen des Matrix-Vektor-Produkts und des Matrixprodukts, die nur mit komponentenweiser Skalarmultiplikation von Vektoren und ohne komplizierte Summenschreibweise auskommen, sondern auch das schmucke Beispiel einer projektiven Darstellung des Einheitswürfels in der zweidimensionalen Ebene. Besprochen werden ausserdem der Dimensionssatz sowie Verknüpfungen und Umkehrungen von linearen Abbildungen. Zudem wird bezüglich der Matrix einer linearen Abbildung wieder an die wichtige Tatsache der Abhängigkeit von der gewählten Basis erinnert. Das fünfte Kapitel ist den Eigenwertproblemen gewidmet. Diese Thematik wird wiederum entlang packender Beispiele ausgebreitet: Wartezeitenprozess zwischen zwei Ausbrüchen des Geysirs Old Faithful im Yellowstone Park, Entwicklung von verschiedenen Baumarten in einem Wald oder Hierarchien in sozialen Netzwerken. Die Eigenwerte und Eigenvektoren werden nicht nur theoretisch durch Auflösen des charakteristischen Polynoms gesucht. Die oftmals praxistauglichere Potenzmethode wird ebenfalls erläutert.

Das Buch wirkt auf mich sehr sorgfältig ausgearbeitet. Im Folgenden werde ich auf konkrete, kleinere Punkte eingehen. Die Schreibweise für Matrizen ist nicht durchgehend einheitlich. Eingangs werden sie mit fett gedruckten Grossbuchstaben geschrieben, dann - in Abgrenzung zu den linearen Abbildungen - zusätzlich mit eckigen Klammern. Für die zweite Variante spricht unter anderem die Möglichkeit zum eleganten Notieren des Sachverhalts, dass die Matrix der Umkehrabbildung gerade der inversen Matrix der ursprünglichen Abbildung entspricht. Die Lösungen zu den anregenden Übungsaufgaben fehlen leider. Trotz Beschränkung auf eine Auswahl der wichtigsten Sätze der Linearen Algebra und einer anwendungsorientierten Ausrichtung des Buches weist der Autor lobenswerterweise immer wieder auf mögliche Verallgemeinerungen oder potentielle Fehlschlüsse aufgrund der übersichtsmässigen Darstellung hin. Beispielsweise wird festgehalten, dass die betrachteten Leslie-Modelle mit konstanten Matrizen ohne zeitabhängige Koeffizienten die langzeitige Entwicklung einer Population nur ungenügend beschreiben würden.

Diese äusserst gelungene und gut verständliche Einführung wurde meines Erachtens auch sehr ansprechend und übersichtlich gestaltet. Zudem bietet sie dem Leser eine Kurzeinführung in Octave im Anhang des Textes sowie spezifische Implementationshinweise zu verschiedenen Beispielen.

M. Häfeli

Integration von Exponentialfunktionen mit Unter- und Obersummen

Gian Deflorin, Dr. Paul Kocian

Disentis, Juni 2013

1 Einführung

Wenn ich in einer Klasse die Integralrechnung einführe, lasse ich die Schüler Grenzwerte berechnen von Ober- und Untersummen bei Potenzfunktionen wie $y = x^2$, $y = x^3$ und evtl. $y = x$. Dies sind klassische Beispiele, die man in jedem Buch für Analysis auf Mittelschulniveau findet. Als Gian Deflorin aus der sechsten Klasse des Gymnasiums Kloster Disentis mich fragte, ob es auch für Exponentialfunktionen möglich wäre, machten wir uns an die Arbeit.

Wir betrachten die Fläche, die von der Kurve $y = a^x$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ begrenzt wird und wollen ihren Inhalt als Grenzwert von Ober- und Untersummen bestimmen. Wir nehmen $a > 1$ an, damit die Exponentialfunktion monoton wachsend ist.

2 Fall einer natürlichen Exponentialfunktion

2.1 Berechnung mit Untersummen

Das Intervall [0 ; 1] wird in n gleiche Teile unterteilt. Jeder Teil hat also die Länge $\frac{1}{n}$. Der Fläche werden nun n Rechtecke einbeschrieben. Die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Rechtecke ist die Untersumme U_n :

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^0 + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{0\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{1\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{2\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{3\cdot\frac{1}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{(n-1)\cdot\frac{1}{n}}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^0 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Wir setzen $z := \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Somit ist

$$U_n = \frac{1}{n}\left[z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}\right] \quad .$$

Die Summe in den eckigen Klammern bildet eine geometrische Reihe mit dem Quotienten z. Die Verwendung der Summenformel ergibt:

$$U_n = \frac{1}{n} z^0 \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$$

Nun lassen wir n gegen ∞ streben. Da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) = -1 \qquad \text{(für Details s. Anhang)},$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \mathrm{e} - 1 \quad .$$

2.2 Berechnung mit Obersummen

Der Fläche werden n Rechtecke umbeschrieben. Die Summe der Flächeninhalte aller umbeschriebenen Rechtecke ist die Obersumme O_n :

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{n}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{1\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{2\cdot\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{3\cdot\frac{1}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{n\cdot\frac{1}{n}}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[z^1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot z^1 \cdot \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) = -1$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \mathrm{e} - 1 \quad .$$

2.3 Schluss

Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich aus dem gemeinsamen Grenzwert von Unter- und Obersummen:

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \mathrm{e} - 1 \approx 1.72 \quad .$$

Direkte Integration mit Hilfe einer Stammfunktion führt zum selben Ergebnis:

$$A \;=\; \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 \;=\; \mathrm{e}-1 \quad .$$

3 Fall einer Exponentialfunktion mit Basis 2

Hier wird gleich verfahren, wie im Fall der natürlichen Exponentialfunktion. Wir erhalten folgende Formeln für Unter- bzw. Obersummen:

$$U_n \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1} \qquad \text{und} \qquad O_n \;=\; 2^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$$

Nun lassen wir n gegen ∞ streben. Da

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right) \;=\; \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{(s. Anhang)}$$

ist

$$\lim_{n\to\infty} U_n \;=\; \lim_{n\to\infty} O_n \;=\; \frac{1}{\ln 2} \;\approx\; 1.44 \quad .$$

Direkte Integration mit Hilfe einer Stammfunktion führt zum selben Ergebnis:

$$\int_0^1 2^x \,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 \;=\; \frac{2^1-2^0}{\ln 2} \;=\; \frac{1}{\ln 2} \quad .$$

Anhang

Zum Abschnitt 2

Wir wollen den folgenden Grenzwert beweisen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) \;=\; -1$$

Wir setzen $t := \frac{1}{n}$. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\right) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\mathrm{e}^t} \quad .$$

Da Zähler und Nenner beide gegen 0 streben und differenzierbar sind (t wird als kontinuierliche Variable betrachtet), verwenden wir den Satz von Bernoulli-l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\mathrm{e}^t} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{(t)'}{(1-\mathrm{e}^t)'} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{1}{-\,\mathrm{e}^t} \;=\; \frac{1}{-1} \;=\; -1 \quad .$$

Zum Abschnitt 3

Um den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

zu beweisen wird gleich verfahren:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{2^t-1} = \lim_{t\to 0}\frac{(t)'}{(2^t-1)'} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2^t\cdot\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \quad .$$

Gefässe füllen - mathematisch betrachtet

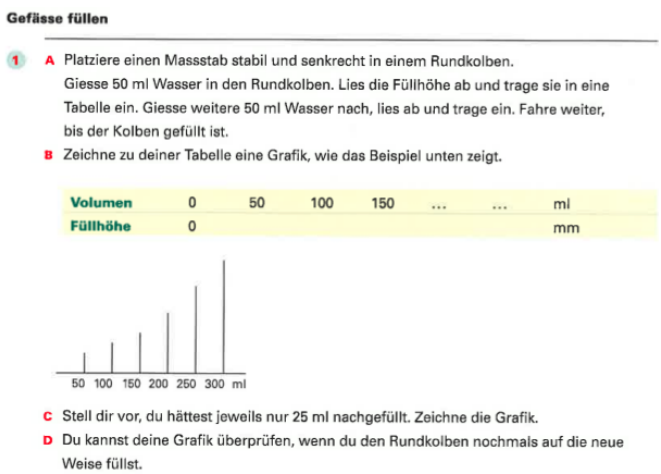
Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

In einen Becher oder in ein Sektglas wird 1 dl eines Getränkes eingefüllt, wie hoch steht dann die Flüssigkeit im Gefäss?

Es stellt sich heraus, dass diese Frage im allgemeinen gar nicht so einfach zu beantworten ist und auf das Lösen von kubischen Gleichungen hinausläuft.

"Gefässe füllen" kommt in zahlreichen Schulbüchern vor, meistens mit dem Ziel, den Funktionsbegriff einzuführen.



Gefässe füllen

1 A Platziere einen Massstab stabil und senkrecht in einem Rundkolben. Giesse 50 ml Wasser in den Rundkolben. Lies die Füllhöhe ab und trage sie in eine Tabelle ein. Giesse weitere 50 ml Wasser nach, lies ab und trage ein. Fahre weiter, bis der Kolben gefüllt ist.

B Zeichne zu deiner Tabelle eine Grafik, wie das Beispiel unten zeigt.

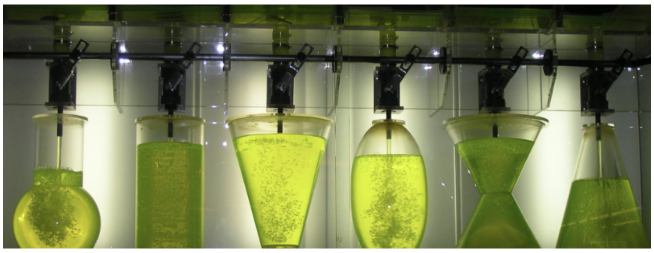
Volumen	0	50	100	150	...	...	ml
Füllhöhe	0						mm

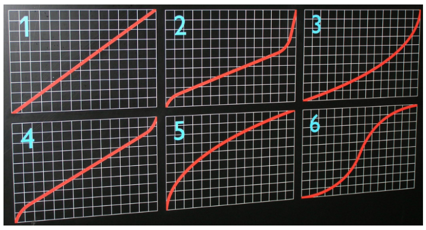
C Stell dir vor, du hättest jeweils nur 25 ml nachgefüllt. Zeichne die Grafik.

D Du kannst deine Grafik überprüfen, wenn du den Rundkolben nochmals auf die neue Weise füllst.

Aus der Lernumgebung "Wasserstand", mathbu.ch 7, siehe [1]

Auch im grössten populärwissenschaftlichen Museum Europas, in der "Cité des Sciences" in Paris werden Gefässe gefüllt.





Die Graphen rechts zeigen den Zusammenhang zwischen eingefüllter Flüssigkeitsmenge (x-Achse) und Flüssigkeitsstand (y-Achse): Welcher Graph gehört zu welchem Gefäss?

Im Folgenden soll das Problem streng mathematisch untersucht werden.

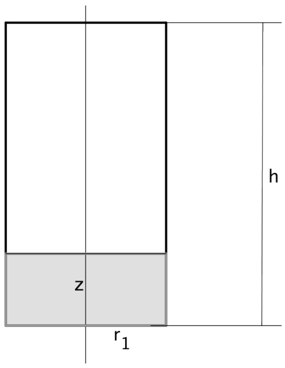
Hauptfrage: Eine vorgegebene Menge Flüssigkeit wird in ein Gefäss mit vorgegebenen Abmessungen eingefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Gefäss? Dazu bestimmen wir die Füllhöhe als Funktion der eingefüllten Flüssigkeitsmenge.

2 Einfache Gefässe füllen

Meist ist es einfach, das Volumen v der eingefüllten Flüssigkeit als Funktion der Füllhöhe z anzugeben. Um die Hauptfrage zu beantworten, gilt es, die Umkehrfunktion zu bestimmen. Wir untersuchen zuerst einfache Gefässformen wie Zylinder, Kegel(stumpfe), Kugeln.

2.1 Zylinder

Ein Kreiszylinder (innen hohl) sei gegeben durch den Radius r_1 und die Höhe h. Der Zylinder stehe auf einer waagrechten Fläche. Wir zeichnen hier und auch weiter unten jeweils nur Aufrisse der Gefässe.



Das schraffierte Volumen beträgt

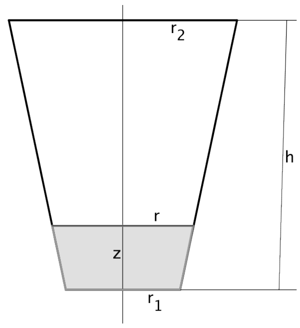
$$v = v(z) = r_1^2 \pi z$$

und somit ist die Füllfunktion gegeben durch

$$\boxed{z = z(v) = \frac{v}{\pi r_1^2}}$$

2.2 Kegel und Kegelstumpfe

Wir fassen Kegel und Kegelstumpf als Rotationsköper auf und berechnen das schraffierte Volumen mit der allseits bekannten Formel.



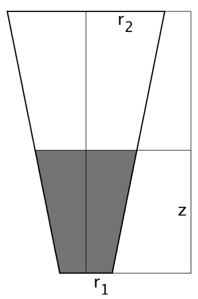
$$v = v(z) = \pi \int_0^z \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1 \right)^2 dx = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1 \right)^3 \Bigg|_0^z$$

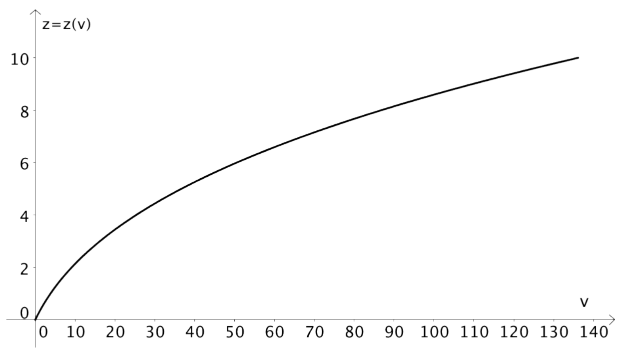
$$\text{also} \quad v = \frac{\pi h}{3(r_2 - r_1)} \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{h} \cdot z + r_1 \right)^3 - r_1^3 \right]$$

Diese kubische Gleichung lässt sich einfach nach z auflösen.

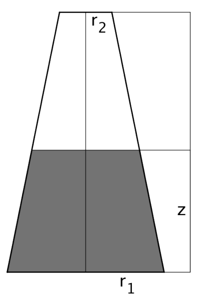
$$\boxed{z = z(v) = \frac{h}{r_2 - r_1} \left(\sqrt[3]{\frac{3(r_2 - r_1)v}{\pi h} + r_1^3} - r_1 \right)}$$

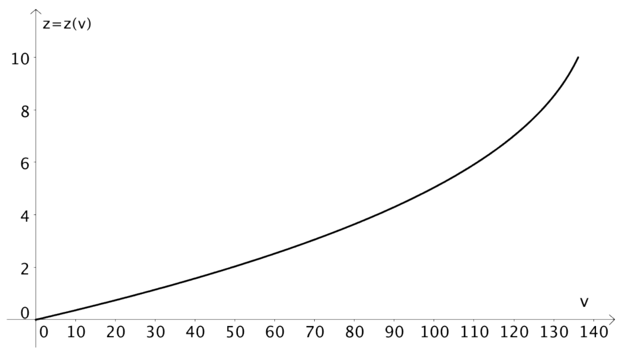
Beispiele:





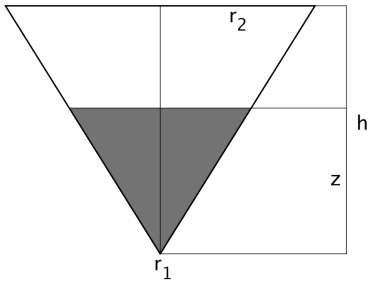
$r_1 = 1, \;\; r_2 = 3, \;\; h = 10$

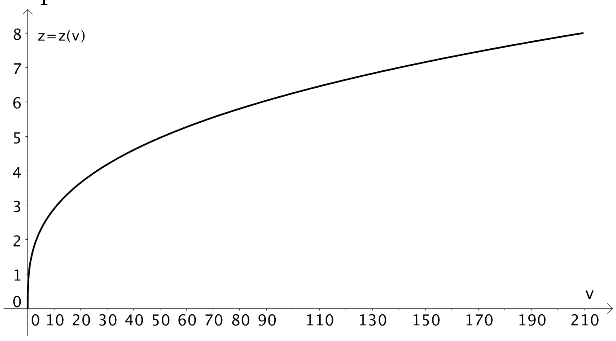




$r_1 = 3, \;\; r_2 = 1, \;\; h = 10$

Für einen Kegel (Sektglas) sieht der Graph so aus:



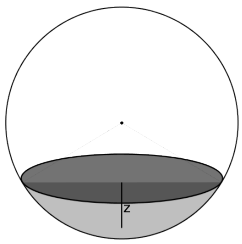


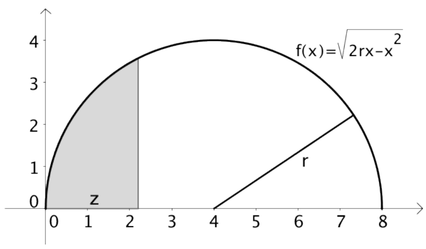
$r_1 = 0, \;\; r_2 = 5, \;\; h = 8$

Damit können wir die Eingangsfrage beantworten: Hat ein kegelstumpfförmiger Becher unten einen Durchmesser von 2 cm ($r_1 = 1$), einen oberen Durchmesser von 6 cm ($r_2 = 3$) und eine Höhe von 10 cm, dann steht 1 dl $= 100\text{cm}^3$ Flüssigkeit im Gefäss $z(100) = 8.59$ cm hoch.

In einem Sektglas mit oberem Durchmesser 10 cm ($r_2 = 5$) und Höhe $h = 8$ cm steht 1 dl Flüssigkeit 6.25 cm hoch.

2.3 Kugeln





In eine (Hohl-)Kugel mit Radius r ist eine Flüssigkeit mit Volumen v eingefüllt. Die Füllhöhe ist z. Mit der Formel für das Volumen von Rotationskörpern (siehe Zeichnung rechts) gilt:

$$v \;=\; v(z) \;=\; \pi \cdot \int_0^z f^2(x)\;dx \;=\; \pi \cdot \int_0^z (2rx - x^2)\;dx \;=\; \pi \cdot \left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3\right)$$

Wie suchen die Füllhöhe z in Abhängigkeit vom Volumen v der eingefüllten Flüssigkeit:

$$v \;=\; \pi \cdot \left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3\right) \;\Longrightarrow\; z^3 - 3rz^2 + \frac{3v}{\pi} = 0 \qquad (1)$$

Nun gilt es, die kubische Gleichung nach z aufzulösen.

Wir folgen dem Vorgehen in [2]: Eine Lösung der Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$ ist gegeben durch

$$y = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2}}$$

Mit der Substitution $y = z - r$ wird $z^3 - 3rz^2 + \frac{3v}{\pi} = 0$ zu

$$y^3 - 3r^2 y + \left(\frac{3v}{\pi} - 2r^3\right) = 0$$

Wir setzen also $P = -3r^2$ und $Q = \frac{3v}{\pi} - 2r^3$.

Eine kurze Rechnung zeigt:

$$D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{9v}{4\pi^2}\left(v - \frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Wegen $v < \frac{4}{3}\pi r^3$ ist $D < 0$ und $\sqrt{D}$ rein imaginär. In diesem Fall hat unsere Gleichung drei reelle Lösungen (siehe [2]).

Mit $w = \frac{4}{3}\pi r^3$ für das Volumen der vorgegebenen Kugel bekommen wir

$$\sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{v(w-v)}i \quad \text{und} \quad \frac{Q}{2} = \frac{3}{2\pi}\left(v - \frac{w}{2}\right)$$

Nun gilt es, die dritten Wurzeln der komplexen Zahl

$$\omega_{1,2} = \pm a + ib = \pm\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2} = \pm\frac{3}{2\pi}\left(v - \frac{w}{2}\right) + \frac{3}{2\pi}\sqrt{v(w-v)}i$$

zu bestimmen.

Wegen $w = \frac{4}{3}\pi r^3$ wird

$$a = \frac{3}{2\pi}\left(v - \frac{w}{2}\right) = 2r^3\left(\frac{v}{w} - \frac{1}{2}\right)$$

und

$$b = \frac{3}{2\pi}\sqrt{v(w-v)} = 2r^3\sqrt{\frac{v}{w}\left(1 - \frac{v}{w}\right)}$$

Damit ist jetzt $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = r^3$.

Wir können nun $\frac{a}{\rho} = 2\left(\frac{v}{w} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2v}{w} - 1 = \cos\varphi$ oder $\frac{b}{\rho} = 2\sqrt{\frac{v}{w}\left(1 - \frac{v}{w}\right)} = \sin\varphi$ setzen und so φ bestimmen.

Aus $\omega_1 = a + ib = r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ folgt dann $\sqrt[3]{\omega_1} = r\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)$ mit $k = 0, 1, 2$.

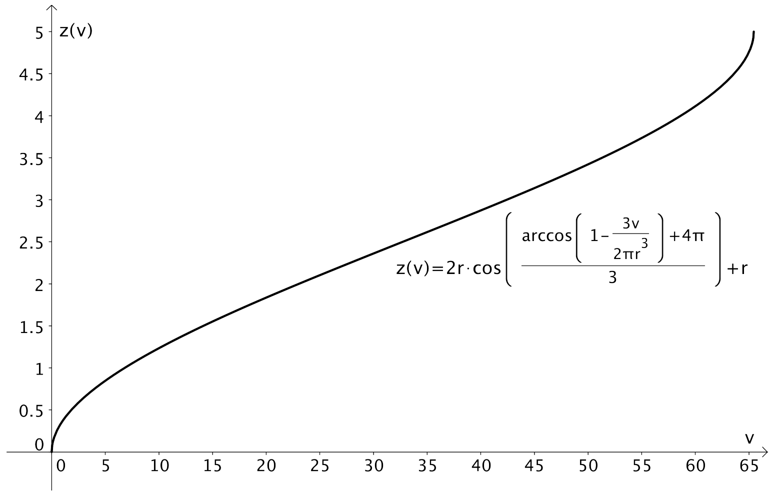
Versuche mit einem Computerprogramm wie *maple* zeigen, dass $\varphi = \arccos\left(-\frac{a}{\rho}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2v}{w}\right)$ und $k = 2$ die vernünftige Lösung für y liefert.

Erinnern wir uns an die Substitution $y = z - r$ und setzen $w = \frac{4}{3}\pi r^3$, so ist schliesslich

$$\boxed{z = z(v) = 2r \cdot \cos\left(\frac{\arccos\left(1 - \frac{3v}{2\pi r^3}\right) + 4\pi}{3}\right) + r}$$

Die Imaginärteile fallen jeweils tatsächlich weg, die Gleichung hat ja, wie oben erwähnt, drei reelle Lösungen.

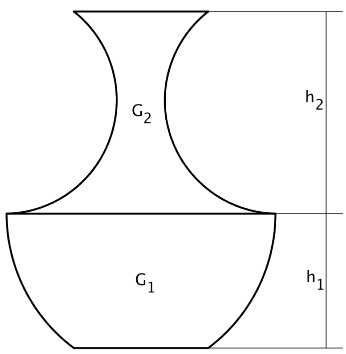
Für $r = 2.5$ ergibt sich der folgende Graph:



Ist der Kugelradius $r = 2.5$ cm, dann steht 0.5 dl $= 50\text{cm}^3$ Flüssigkeit $z(50) \approx 3.42$ cm hoch.

3 Übergänge zwischen verschiedenen Gefässformen

Viele Gefässe sind aus einfachen Formen zusammengesetzt.

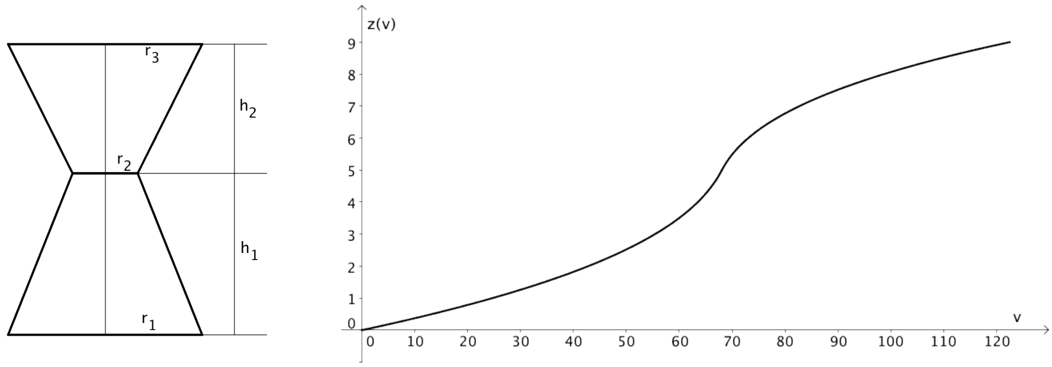


Sind zwei Gefässformen G_1 und G_2 mit Volumen V_1 resp. V_2 gegeben, so ist die Füllfunktion $z(v)$ des ganzen Gefässes gleich

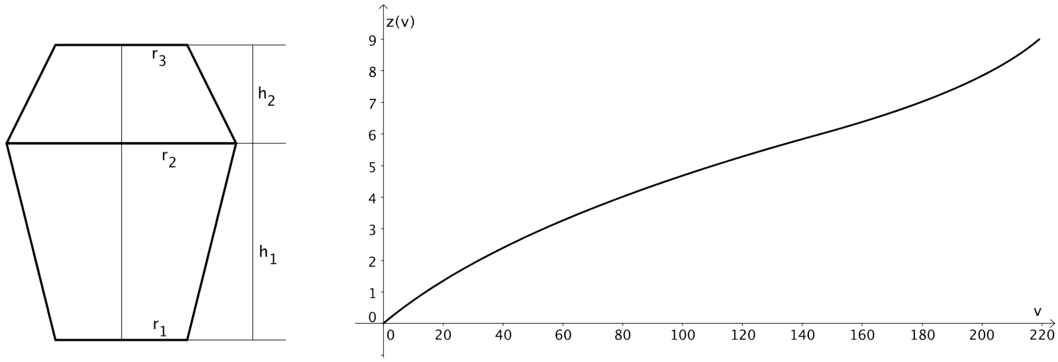
$$z(v) = \begin{cases} z_1(v) & ; \ 0 \leq v \leq V_1 \\ z_2(v - V_1) + h_1 & ; \ V_1 \leq v \leq V_1 + V_2 \end{cases}$$

wo $z_1(v)$ und $z_2(v)$ die Füllfunktionen der einzelnen Gefässe sind.

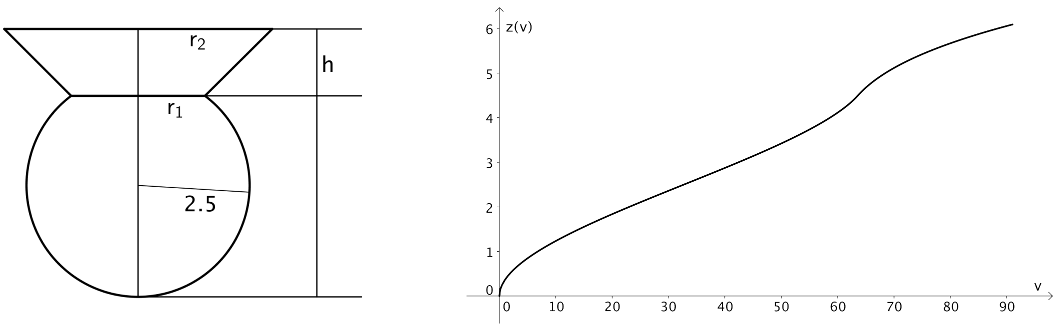
Wir betrachten Beispiele:



$r_1 = 3, \;\; r_2 = 1, \;\; r_3 = 3, \;\; h_1 = 5, \;\; h_2 = 4.$



$r_1 = 2, \;\; r_2 = 3.5, \;\; r_3 = 2, \;\; h_1 = 6, \;\; h_2 = 3.$



$r_1 = 1.5, \;\; r_2 = 3, \;\; h = 1.5.$

Festzuhalten ist, dass die Graphen glatt sind, also auch beim Übergang von der einen Form zur zweiten keine Knicke aufweisen. Um dieses Phänomen allgemein zu verstehen, betrachten wir die Volumenfunktionen, die ja die Umkehrfunktionen der Füllfunktionen sind.

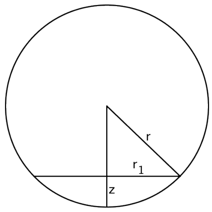
Zylinder: $v(z) = r_1^2\pi z \implies v'(z) = \pi r_1^2$. v' ist konstant.

Kegelstumpf: $v(z) = \frac{\pi h}{3(r_2-r_1)}\left[\left(\frac{r_2-r_1}{h}\cdot z + r_1\right)^3 - r_1^3\right]$

$\implies v'(z) = \frac{\pi h}{3(r_2-r_1)}\left[3\left(\frac{r_2-r_1}{h}\cdot z + r_1\right)^2\cdot\left(\frac{r_2-r_1}{h}\right)\right] = \pi\left(\frac{r_2-r_1}{h}\cdot z + r_1\right)^2$

Insbesondere ist $v'(0) = \pi r_1^2$ und $v'(h) = \pi r_2^2$

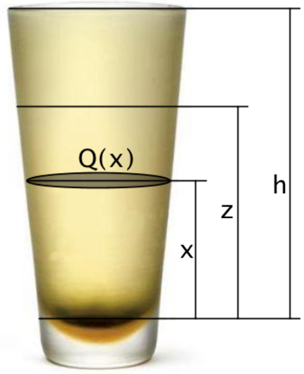
Kugel: $v(z) \; = \pi\cdot\left(rz^2 - \frac{1}{3}z^3\right) \implies v'(z) = \pi\left(2rz - z^2\right)$



Ein Blick auf die obige Zeichnung zeigt, dass $r_1^2 + (r-z)^2 = r^2 \implies 2rz - z^2 = r_1^2$, also auch hier $v'(z) = \pi r_1^2$ gilt.

Fazit: Die Ableitung der Volumenfunktion ist stets gleich der Querschnittflächenfunktion!

Das gilt allgemein:



Ist bei einem Gefäss die Querschnittfläche als Funktion $Q(x)$ gegeben, dann ist das Volumen der bis zur Höhe z eingefüllten Flüssigkeit gleich

$$v(z) = \int_0^z Q(x)\ dx = \tilde{Q}(z) - \tilde{Q}(0)$$

wo $\tilde{Q}$ eine Stammfunktion von Q ist.

Damit ist aber $v'(z) = Q(z)$.

Literatur

[1] Affolter, W. et al., *mathbu.ch 7*, Lernumgebung 2, "Wasserstand", Klett & blmv, 2003

[2] Lüneburg, H. , *Von Zahlen und Grössen*, Band 1, Birkhäuser, 2008

Walser, Hans. Geometrische Miniaturen, Figuren – Muster – Symmetrien, 98 Seiten, EUR 14.50, Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2011, EAGLE 042, ISBN 978-3-937219-42-4

Die Geometrischen Miniaturen umfassen vier thematisch gegliederte Abschnitte mit etwas mehr als 40 Fragen. Das sind die Kristallisationskeime für geometrische Überlegungen. Der fünfte Abschnitt enthält knapp kommentierte Lösungen und Literaturhinweise.

Mit spielerischer Leichtigkeit wird Neugierde angeregt, indem in einem elementargeometrischen Umfeld experimentiert wird, mit verblüffenden Ergebnissen, die Fragen provozieren. Warum erzeugen gewisse Konstruktionen oder Faltexperimente jeweils mehr als zwei Punkte auf derselben Geraden oder mehr als drei Punkte auf demselben Kreis? Die Eulergerade im Dreieck oder der Neunpunktekreis von Feuerbach sind bekannte Beispiele.
Das umfangreichste Kapitel behandelt Schliessungsfiguren. Das sind geometrische Konstruktionen, die nach einigen Schritten wieder zur Ausgangskonfiguration führen. Ein bekanntes Beispiel ist die Konstruktion des regulären Sechsecks durch wiederholtes Abtragen des Radius als Sehnen auf einem Kreis. Dass hier Gelegenheit zur Anwendung komplexer Zahlen und zyklischer Gruppen auftritt, überrascht kaum.
An die Schwellen zur Kristallographie und zur Zahlentheorie führt das Schlusskapitel über ebene Punktraster.

Der Reiz der Fragen liegt darin, dass sie gerade nicht als Übungen auf eine vorgängig aufgebaute Theorie erfunden wurden. Vertrautheit mit übergeordneten und fundamentalen Denkweisen und Begriffen aus Geometrie und Algebra ist ein Vorteil, könnte aber auch ein Ziel beim Durcharbeiten dieses Textes sein. Symmetrien und Gruppen, zwei Seiten derselben Münze, liefern oft einen Schlüssel zum Verständnis. Damit begegnen Leser in Walsers Buch einer hintergründigen Elementarmathematik, mit der sich gut zeigen lässt, das der Erfolg beim mathematischen Problemlösen oder Entdecken nicht nur durch spielerische Neugierde und Zufall herbeigeführt wird. Walser betont die Anwendung von Begriffen und allgemeinen Methoden auch in Einzelfällen. Darum scheint mir das angebotene Material auch besonders für die Begabtenförderung oder als Ausgangspunkt für explorative Schülerarbeiten, etwa mathematische Maturaarbeiten geeignet, die von einem konkreten Einzelfall ausgehen und dessen Umfeld erkunden. Walser zeigt uns, wie Mathematik entstehen kann. Dass sich vorhandene Geometrie nach Euklids Vorbild in einem logischen Konzept mit axiomatischem Aufbau konservieren lässt, ist kein Thema.

Ganz selbstverständlich zeigt Walser, wie der Einsatz eines dynamischen Geometrieprogrammes das geometrische Experimentieren erleichtert. Damit weist er einen Weg zu einem computergestützten Geometrieunterricht mit computergestütztem Experimentieren und Beweisen. Weitere Anregungen und Informationen werden auf der Webpage des Autors www.math.unibas.ch/$\sim$ walser angeboten.

Die Sprache des Autors beeindruckt durch ihre Schlichtheit und Präzision.

Lieber Hans, wie danken Dir, dass wir an Deiner langjährigen Erfahrung und

Deinen originellen und didaktisch produktiven Ideen mit dieser Publikation teilhaben dürfen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Der Katalog Grundkenntnisse in Mathematik 2014

Der Katalog Grundkenntnisse in Mathematik wurde letztmals 1997 überarbeitet. Er gibt Auskunft darüber, was eine Maturandin oder ein Maturand beim Übertritt an eine Universität im Grundlagenfach Mathematik wissen und können sollte. Damit ist er eine wichtige Orientierungshilfe für die Gymnasien und für die tertiäre Stufe: Die Gymnasien können ihre Lehrpläne am Katalog eichen und die Dozierenden der universitären Hochschulen sehen, welche Kenntnisse sie in den Anfängervorlesungen erwarten dürfen.
Seit Inkrafttreten des Katalogs hat sich jedoch die Bildungslandschaft verändert: Das MAR wurde 2007 einer kleinen Revision unterzogen, vielerorts wurde die gymnasiale Schulzeit verkürzt, und neue Technologien (CAS) haben im Schulzimmer und im Hörsaal Einzug gehalten. An der Konferenz Übergang Gymnasium-Universität im Herbst 2010 auf dem Monte Verità wurde daher empfohlen, den Katalog zu überarbeiten. Die Kommission Gymnasium-Universität hat daraufhin die DMK gebeten, eine breit abgestützte Arbeitsgruppe mit dieser Aufgabe zu betrauen. Diese Arbeitsgruppe, bestehend aus Vertreterinnen und Vertretern der Gymnasien und der Universitäten aus allen Landesteilen hat nun in gut zweijähriger Arbeit einen Vorschlag vorgelegt. Der Arbeitsgruppe war es dabei von Anfang an ein Anliegen, den Prozess möglichst transparent und interaktiv zu gestalten. Daher wurden alle Informationen und der Fortgang der Arbeit jederzeit öffentlich auf der Web-Site http://math.ch/kanon dargestellt.
Der nun präsentierte Vorschlag mit dem Arbeitstitel KANON bezieht sich auf das Grundlagenfach Mathematik und besteht (wie der alte Katalog) aus einer Präambel und einem inhaltlichen Teil. Er geht dabei von einer Stundendotation von insgesamt 16 Jahreswochenlektionen über vier Jahre Kurzzeitgymnasium aus. Die tatsächlichen Dotationen liegen teilweise weit auseinander; die Spanne reicht derzeit, je nach Gymnasium und belegtem Profil oder Niveau, von 11.5 bis 25 Jahreswochenlektionen.
Da in der Romandie die Mathematik in zwei Niveaus angeboten wird, entstand beim inhaltlichen Teil des Katalogs eine separate Version für diesen Landesteil.

Wesentliche Neuerungen im vorgestellten KANON sind:

- *Die inhaltliche Tabelle gliedert sich in die drei Spalten Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik), Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax) und Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration).*
- *Die Stochastik wird (nebst Algebra, Analysis und Geometrie) separat rubriziert.*
- *CAS und andere Hilfsmittel werden berücksichtigt.*
- *Das Thema einfache Modellbildung mit Differentialgleichungen wird verankert.*
- *Zusätzlich aufgelistet sind Anregungen und Vorschläge für weitere explorative Vertiefungsthemen, innermathematische Querverbindungen sowie Anwendungen und Querverbindungen zu andern Fächern.*

Der Vorschlag soll in diesem Frühjahr in den Monaten März bis Mai in eine breite Vernehmlassung geschickt werden. Geplant sind zudem lokale Informationsveranstaltungen in Basel, Bern, Luzern, Sargans und Zürich, wo ergänzend auf von uns geplante Einführungs- und Weiterbildungskurse hingewiesen wird. Die genauen Zeiten und Orte werden auf der oben genannten Web-Site bekannt gegeben und laufend aktualisiert.

Wädenswil, Ende November 2013 Für die Arbeitsgruppe: Hj. Stocker

DPK

Kepler-Auge

Martin Lieberherr, MNG-Rämibühl, 8001 Zürich
13. Oktober 13

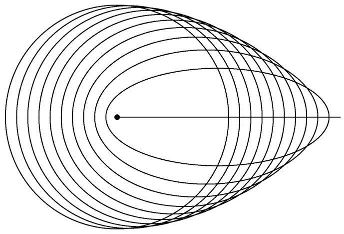
Einleitung

Für eine Folie wollte ich eine Auswahl an Keplerschen Ellipsen zeichnen. Die Ellipsen sollten alle zum gleichen Gravitationszentrum und zur gleichen Gesamtenergie respektive Umlaufzeit T gehören. Ein Kleinkörper der Masse m auf einer Ellipse mit grosser Halbachse a um ein Zentrum der Masse M hat die Energie

$$E_{total} = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r} + \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} \quad \text{3. Kepler-Gesetz}$$

Gibt man die grosse Halbachse a und die Apheldistanz r vor, so kann man leicht die Geschwindigkeit v im Aphel bestimmen und damit eine numerische Simulation starten, siehe Abbildung 1.

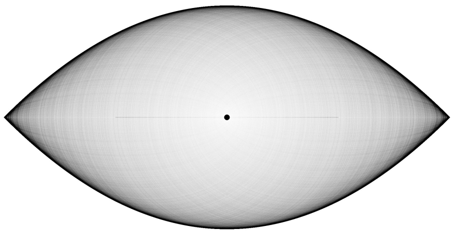
Abbildung 1: Eine Auswahl an Bahnen mit gleicher grosser Halbachse und gleichem Brennpunkt. Die Exzentrizität variiert von $\epsilon = 0$ (Kreis) bis $\epsilon = 1$ (Strecke). Die Bahnen wurden mit dem Euler-Cromer Verfahren numerisch integriert. Das (feste) Gravitationszentrum ist mit einem fetten Punkt markiert.



Einhüllende

In Abbildung 1 fiel mir auf, dass die Ellipsen auf der rechten Seite eine Hüllkurve zu haben scheinen. Um diese deutlicher hervorzuheben, überlagerte ich sehr viele Ellipsen, siehe Abbildung 2. Ausserdem habe ich noch die Ellipsenschar auf der linken Seite ergänzt, weil sich dann ein hübsches 'Auge' ergibt.

Abbildung 2: Alle Ellipsen gleicher Energie mit Perihel auf einer Geraden durchs Gravitationszentrum bilden eine Art Auge. Mit welcher Gleichung wird die Einhüllende beschrieben?



Legt man eine Parabel über das Auge in Abbildung 2, so passt sie perfekt. Ich benötigte einen Abend, um zu beweisen, dass folgende Gleichung die obere Hüllkurve beschreibt:

$$y = a \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)$$

Kann man das brauchen? Wohl eher nicht, aber ich hatte meinen Spass daran und immerhin eine neue Folie.

Quantum Spin-Off Projekt – Schulen mit Nano-Forschung vernetzen

Kennen Sie eine Naturwissenschafts-Lehrperson, die Interesse hat, am Quantum Spin-Off Projekt teilzunehmen? Oder haben Sie selber Interesse an den Nanowissenschaften?
Es gibt die Möglichkeit, als Lehrperson an zwei Weiterbildungsveranstaltungen (24. Mai 2014, zweites Datum noch offen) teilzunehmen. Ein zusätzliches Angebot ermöglicht ausgewählten Klassen in Kontakt mit Nano-Forschenden zu treten. Für die Pilotklassen werden drei bis vier Anlässe, verteilt über das Schuljahr 14/15, angeboten. Es sind 14 Lektionen oder weniger plus Hausaufgaben für die Unterrichtsplanung einzuberechnen.

Projektbeschrieb: www.fhnw.ch/ppt/content/prj/T999-0445

Kontakt
Miriam Herrmann
Zentrum für Naturwissenschafts- und Technikdidaktik
Pädagogische Hochschule der FHNW
miriam.herrmann@fhnw.ch
T: 061 228 50 13

Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Schwyz, im Januar 2014

19-Punkte-Regel zur Stärkung der allgemeinen Hochschulreife

Sehr geehrte Damen und Herren,

beim Abschluss des Gymnasiums verfügen unsere Maturandinnen und Maturanden über ein breites Fachwissen und verschiedene Fähigkeiten, welche die Voraussetzungen für ein erfolgreiches Studium an einer Hochschule bilden. Auf diese allgemeine Hochschulreife dürfen wir in der Schweiz stolz sein, und es gilt, alles zu unternehmen, dass sie uns erhalten bleibt.

Das jetzige Maturitätsanerkennungsreglement lässt es allerdings zu, dass die Maturität auch dann erlangt werden kann, wenn die Leistungen in einzelnen Fächern desolat sind. Prof. Dr. Jürg Schmid, Vorsitzender der bernischen Maturitätskommission formuliert dieses Problem folgendermassen: „Wenn die Maturaprüfung aber allgemeine Studierfähigkeit messen soll, kann ein 20%-Anteil von GROB ungenügenden Leistungen in Mathematik nicht einfach hingenommen werden.“ Einzelne sehr tiefe Noten können mit dem bestehenden Reglement zu leicht mit guten Noten aus anderen Fachbereichen kompensiert werden. Grosse Defizite in Fächern wie Mathematik sind an der Hochschule kaum mehr aufzuholen, weshalb Studentinnen und Studenten unter anderem in naturwissenschaftlicher, technischer oder wirtschaftswissenschaftlicher Richtung oft schon an den ersten Prüfungen scheitern.

Die Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) ist überzeugt, dass der Bereich Mathematik nicht allein mit diesem Problem zu kämpfen hat. Deshalb streben wir eine Regelung an, mit der die Schülerinnen und Schüler am Gymnasium angehalten werden, vermehrt an ihren Schwächen zu arbeiten, um möglichst in allen Fächern über grundlegende Kenntnisse zu verfügen.

Zusätzlich zu den jetzigen Bedingungen zum Bestehen der Maturitätsprüfung

- Die Maturität ist bestanden, wenn in den Maturitätsfächern:
  a) die doppelte Summe aller Notenabweichungen von 4 nach unten nicht grösser ist als die Summe aller Notenabweichungen von 4 nach oben;
  b) nicht mehr als vier Noten unter 4 erteilt wurden.

fordern wir deshalb die **„19-Punkte-Regel“**:

- Die Summe der 5 tiefsten Noten muss mindestens 19 Punkte betragen.

Begründung:

Mit dieser Regel werden sehr tiefe Noten in einzelnen Fächern verhindert, muss doch der Durchschnitt der fünf tiefsten Noten bei 3.8 liegen. Leicht ungenügende Noten wie mehrere Noten 3.5 sollen nach wie vor kompensierbar sein.

Zwei Zahlenbeispiele:

- Ist die tiefste Note eine 2, dann müssten die vier nächsttiefsten Noten mindestens einen Schnitt von 4.25 aufweisen.
- Enthält das Maturazeugnis als tiefste Noten zweimal die Note 3.5, dann müssen die drei nächsttiefsten Noten mindestens einen Schnitt von 4 aufweisen.

Mit dieser Regel werden keine einzelnen Fächer bevorzugt behandelt. Tiefe Noten sollen bei der Maturität als solche ins Gewicht fallen, unabhängig davon, ob sie in Mathematik oder in einem anderen Fach geschrieben werden.

Sehr positive Erfahrungen mit diesem Modell wurden seit mehreren Jahren im Kanton Solothurn gemacht, in dem die 19-Punkte-Regel als Bedingung ins Promotionsreglement aufgenommen worden ist. Im Kanton Waadt ist eine ähnliche Regelung eingeführt und im Kanton Neuenburg sind zusätzliche Promotionsbedingungen bereits im Gespräch.

Aus diesen Gründen hat die DMK an die Schweizerische Maturitätskommission den Antrag gestellt, die 19-Punkte-Regel ins Maturitätsanerkennungsreglement aufzunehmen. Wir sind überzeugt, dass mit dieser Regelung die gymnasiale Ausbildung und damit auch die Voraussetzungen für ein erfolgreiches Studium deutlich verbessert werden können, und fordern Sie auf, unser Anliegen sowohl auf nationaler als auch auf kantonaler Ebene zu unterstützen.

Mit freundlichen Grüssen

D. Grawehr

Daniela Grawehr
Präsidentin DMK

Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Weiterbildungskurs

„Mädchen und Mathematik“

Mädchen – imaginäre Grössen im Mathematikunterricht?

Im einführenden Teil der Weiterbildungsveranstaltung stehen Information über den aktuellen Forschungsstand zum Thema „Mädchen und Mathematik“ und Sensibilisierung zu dieser Thematik im Fokus.

Der dann folgende Hauptteil zeigt vielfältige Möglichkeiten, die der Mathematikunterricht bietet, die Schüler ***und*** Schülerinnen durch Eigentätigkeit zu kompetentem Arbeiten zu befähigen.

Die Jugendlichen sollen sich dabei ganzheitlich angesprochen fühlen und Mathematik positiv erleben; dies kann durch aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen, die gerade auch die Wünsche von Schüler*innen* bezüglich der Arbeitsmethoden und der Fachinhalte berücksichtigen, gelingen.

Für die Gebiete Analysis, Geometrie und Stochastik werden spezielle Themen vorgestellt und ihre effektive und motivierende Umsetzung im Unterricht aufgezeigt. Auch werden unmitttelbar im Unterricht einsetzbare Arbeitsmaterialien vorgestellt, in Gruppenarbeit bearbeitet und weiterentwickelt, die ebenfalls dabei unterstützen sollen, die fachlichen und pädagogischen Ziele des Unterrichts durch Methodenvielfalt und durch Förderung des selbstständigen Arbeitens zu erreichen.

Zielpublikum: Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik

Referentin: StD. Ulrike Schätz

Studium in Mathematik und Physik, Pädagogik und Psychologie sowie Geschichte der Naturwissenschaften

Langjährige Tätigkeit als Studiendirektorin an einem Münchner Gymnasium und als Lehrbeauftragte für Fachdidaktik Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München

Mitherausgeberin der Lehrbuchreihe *delta* Mathematik für Gymnasien

Autorin von Arbeitsmaterialien für den Mathematikunterricht

Leiterin zahlreicher Seminare und Workshops

Gast: Prof. Dr. Renate Schubert,
Delegierte für Chancengleichheit an der ETH Zürich

Datum und Zeit: Mittwoch, den 19. März 2014, 9.30 – 16.30 Uhr

Kursort: ETH Zürich Raum HG G19.1

Kurskosten: CHF 120.-

Anmeldung: http://www.math.ch/DMK2014M/

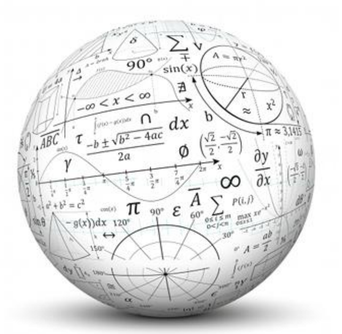
Anmeldeschluss: 19.2.2014

Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Weiterbildungskurs

„Realitätsbezüge im gymnasialen Mathematikunterricht“

Für viele Schüler ist Mathematik abstrakt und lebensfern, doch das muss nicht so sein. Mathematik braucht man im Leben und das kann man im Unterricht auch deutlich machen. In der Fortbildung lernen Sie, welche Arten von realitätsbezogenen Aufgaben es gibt, wie man sie findet und welche Kompetenzen die Schüler beim Arbeiten mit solchen Aufgaben entwickeln. Wir erarbeiten, wie man den Unterricht gestalten kann, um die Schüler entsprechend zu fördern.



http://partielleintegration.de/wp-content/uploads/2013/03/Wie-kann-man-am-besten-Mathematik-lernen.jpg

1. Was bedeutet es, Mathematik auf die Realität anzuwenden? Was ist Modellieren?
2. Warum Realitätsbezüge?
3. Wie im Unterricht umsetzbar?
4. Wie können bei den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen im Anwenden von Mathematik gefördert werden?
   a) Hilfestellungen
   b) Metakognition
   c) Fördern von Teilkompetenzen
5. Aufgaben im Vergleich
6. Leistungsmessung

Zielpublikum:	Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik
Referentin:	Prof. Dr. Katja Maaβ (Pädagogische Hochschule Freiburg i.Br.)
Datum und Zeit:	Mittwoch, den 21. Mai 2014, 9.30 – 16.30 Uhr
Kursort:	ETH Zürich Raum HG G19.1
Kurskosten:	CHF 120.-
Anmeldung:	http://www.math.ch/DMK2014/
Anmeldeschluss:	21.4.2014

PH Zürich

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Vom Kindergarten bis zur Hochschule – Mathematik im Unterricht heute

Zentrale Aspekte des Mathematiklernens gelten vom Kindergarten bis zur Hochschule. In dieser neuen Vortragsreihe der Fachbereiche Mathematik der PH Zürich und der ETH Zürich soll vorgestellt werden, was für den Mathematikunterricht aller Stufen wesentlich ist – theoretisch fundiert und praktisch illustriert. Diese Veranstaltung richtet sich an Lehrpersonen aller Stufen sowie an Mathematikunterricht Interessierte.

Donnerstag, 30. Januar 2014 in Zürich

17:15 bis 18:45 Uhr Vortrag mit anschliessendem Apéro (Eintritt frei)

Esther Brunner (PH Thurgau)

„Warum ist das so?" – Mathematisches Begründen und Beweisen in der Schule

Im heutigen Mathematikunterricht geht es nicht allein ums Rechnen und Lösen von Problemen. Auch das Begründen von Zusammenhängen ist wesentlich. Dies ist für Schülerinnen und Schüler eine anspruchsvolle Tätigkeit. Die Lehrperson ist darin gefordert, die Begründungskompetenzen der Schülerinnen und Schüler aufzubauen, diese also fachlich korrekt und didaktisch geschickt zu fördern.
Im Vortrag wird ausgehend von der „Warum-Frage" die Kompetenz Begründen genauer ausgeleuchtet, indem verschiedene Phasen dieses Prozesses deutlich gemacht werden. Jede dieser einzelnen Phasen kann von der Lehrperson unterstützt werden.
Anhand von Aufgaben und Beispielen aus verschiedenen Schulstufen wird aufgezeigt, was beim Begründen und Beweisen wichtig ist, welche Anforderungen damit an die Schülerinnen und Schüler gestellt werden und wie ihren spezifischen Schwierigkeiten begegnet werden kann.
Verschiedene Begründungsarten und Beweistypen werden vorgestellt und verglichen. Mithilfe von diesen können Schulbuchaufgaben unterschiedlich gelöst werden. Gleichzeitig bieten diese auch Möglichkeiten, die gezeigten Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern genauer einschätzen zu können. Es wird gezeigt, wann welche Beweistypen verwendet werden können und wie Aufgaben mit entsprechendem Potenzial gestaltet sein müssen, damit die Begründungskompetenz gefördert werden kann.

Prof. Dr. Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau PHTG, Kreuzlingen, ist Fachbereichsleiterin Mathematik und Dozentin für Mathematikdidaktik, Pädagogik und Sonderpädagogik an der PHTG.
Nach rund zwanzig Jahren Berufstätigkeit in der Primarschule absolvierte sie das Nachdiplomstudium Mathematikdidaktik an der Universität Bern und studierte Pädagogik, Soziologie und Sonderpädagogik an der Universität Zürich. 2012 schloss sie mit dem Doktorat bei Prof. Dr. Kurt Reusser an der Universität Zürich zum Thema „Innermathematisches Beweisen auf der Sekundarstufe I" ab.

Herzlich laden ein

Norbert Hungerbühler (ETH Zürich) und
René Schelldorfer (PH Zürich)

Veranstaltungsort

ETH Zürich, Hauptgebäude
Rämistr. 101, 8092 Zürich
Hörsaal F3

Tram Linie 6 oder 10 ab HB bis «ETH/Unispital»,
Linie 9 ab Bellevue bis «ETH/Unispital»,
Polybahn ab Central

Ja - Oui - Sì ☐

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/ Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG - SSPES - SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra ☐ Herr/M./Sig. ☐ Prof. ☐ Dr. ☐

Name/Nom/Cognome: ....

Vorname/Prenom/Nome: ....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): ....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo: ....

(Land/Pays/Paese): ....

Email: .... (Tel): ....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): ....

Sprache/Langue/Lingua: D ☐ F ☐ I. ☐

Schule/école/scuola: .... Kanton/canton/cantone: ....

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo ☐ passive/passif/passivo ☐
Student/-in, étudiant(e), studente/ssa. ☐

Einsenden an/envoyer à/inviare a:
VSG - SSPES - SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern
oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*
VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*
Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*
Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen
– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:	
Ganzseitige	Fr. 500.–
Halbseitige	Fr. 300.–
Beilagen:	
bis 20 g	Fr. 500.–
über 20 g	Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*
VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04
E-Mail: information@vsg-sspes.ch

Abonnenten, die nicht Mitglieder des VSG sind:
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage – *Tirage*
900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsident VSMP – SSPMP – SSIMF
Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathematikkommission
Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission
Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique
José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique
Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10
6513 Monte Carasso Tél. 091 825 76 69

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)
– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 125	31.03.2014 (20.05.2014)
Nr. 126	31.07.2014 (20.09.2014)
Nr. 127	30.11.2014 (20.01.2015)

Druck und Versand – *Imprimerie*
Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch