



Bulletin

Februar 2010 – Février 2010

N° 112

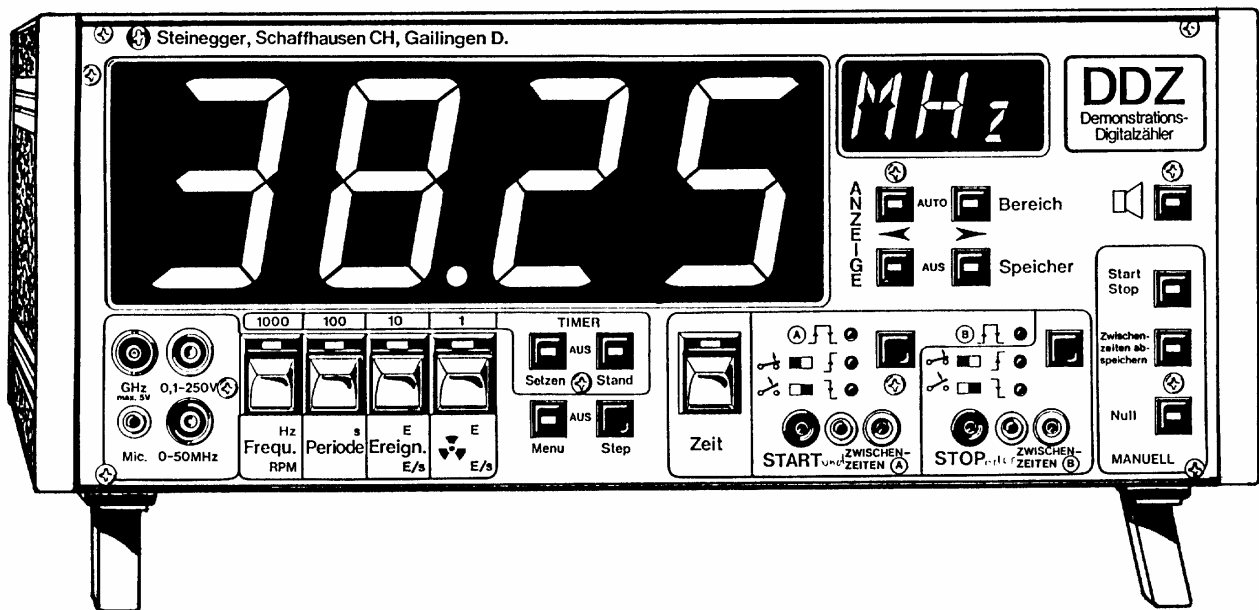


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalzähler DDZ

Art. Nr. 51



Preis inkl. MWSt nur SFr 2'300.-

Kompakt-Multifunktionszähler der Spitzenklasse!

- 56 mm hohe helle Ziffern- und 3-stellige Einheitenanzeige
- Breitestes Anwendungsspektrum und selbsterklärende Bedienung
- Misst Zeitintervalle, Frequenzen, Perioden, RPM usw.
- Timerfunktion, Ereigniszählung, Zählrohranschluss, akustische Rückmeldung, 50 Messwertspeicher, bidirektionale serielle Schnittstelle, Hilfsspeisungen für Zusatzgeräte
- Auflösung von bis zu 10 Ziffern durch Ziffernschiebung
- Automatische und manuelle Bereichsumschaltung, vollautomatische Signalanpassung dank Triggerautomatik
- Hervorragendes Preis-/Leistungsverhältnis

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Der neue Demonstrations-Digitalzähler DDZ" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.

Rosenbergstrasse 23

CH-8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90

Fax : 052-625 58 60

Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Claudio Palmy
Are we alone ? 3

Norbert Hungerbuehler
Bericht zur Maturaarbeit – Billard - Reflexionen 7

Deutscheschweizerische Physikkommission 9

Martin Lieberherr
Zielwurf 9

DPK

Stefan Walser
Rückblick: Atmosphären untersuchen und modellieren:
Empirische, analytische, numerische Methoden 11

Fachverband für Strahlenschutz e. V.
Förderung von Maturaarbeiten 12

Werner Durandi
Formeln, Tabellen, Begriffe statt Formel und Taffeln 13

Deutscheschweizerische Mathematikkommission 16

Hansjürg Stocker
Aufruf der DMK an ihre Fachkolleginnen und Kollegen 16



Hansjürg Stocker
Mathematik-Wettbewerbe 17

Peter Gallin
Eine pseudohistorische Herleitung der diatonischen Tonleiter 18

Armin P. Barth
Logik? – Logisch! (Teil 2) 21

Commission Romande de Mathématiques 33



Jean Piquerez
Un peu d'algèbre linéaire et d'analyse combinatoire 33

Un cours organisé par la CRM à Leysin (octobre 2009) 36

Kurse

Weiterbildung “Mathematik lernen – *do it yourself*”

37

Impressum

40

L'assemblée générale de la sspmp a eu lieu le 14 novembre 2009 à Lucerne au musée des transports dans le cadre du congrès annuel de l'académie des sciences naturelles SCNAT sur le thème *Are we alone*. Les conférences variées interdisciplinaires célébrant à la fois Darwin et l'Astronomie ont été vivement appréciées par un large public. Parmi les invités attentifs, Dr. Claudio Palmy qui nous livre ci-après (page 3) un résumé des conférences pour le bulletin afin d'en faire profiter les membres de notre société n'ayant pas pu se déplacer à Lucerne.

E. McGarrity, présidente sspmp

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Are we alone ?, siehe Artikel von Claudio Palmy, Seite 3.



Are we alone?

Das war das faszinierende Thema des 189. Jahreskongresses der Akademie der Naturwissenschaften SCNAT und der Schweizerischen Gesellschaft für Astrophysik und Astronomie SGAA am 13./14. November 2009 im Verkehrshaus in Luzern. Diese Tagung beschloss das Internationale Jahr der Astronomie (IYA2009) in einer eindrücklichen und feierlichen Atmosphäre. *Claudio Palmy, AGG*

Tom Millar, Queen's University Belfast, **The Origin of Prebiotic Molecules in the Interstellar Medium.**

In den 70er Jahren wurden mit Radioastronomischen-Mikrowellen-Messungen komplexe Moleküle wie Ammoniak (NH_3) und Formaldehyd (H_2CO) im interstellaren Staub entdeckt. Das war eine Sensation. Wie war das möglich? Was ist die Basis solcher organischer Moleküle? Könnten diese die Geschichte der interstellaren Staubwolken aufspüren?

Tatsächlich finden sich Mechanismen auf der Spur organischer Moleküle, die den Weg von der interstellaren Staubwolke zum werdenden Stern (Protostern) weisen. Zentral dabei ist das, kurz nach dem Urknall entstandene Verhältnis zwischen Deuterium und Wasserstoff, D/H. Diese D/H Relation betrug zunächst 10^{-5} , beobachtet wurden aber Verhältnisse von 10^{-3} . Aus quantenphysikalischen Gründen konnten aber solche D/H Häufungen bei 10K, der Temperatur interstellarer Wolken, theoretisch erklärt werden. Man verstand, weshalb mehr als 140 organische Moleküle in kalten und dunklen Nebeln entstehen können. Kometen bergen den Schlüssel zum Verständnis, sie enthalten schmutziges, gefrorenes Wasser. Das ALMA (Atacama Large Millimeter Array) Projekt kann uns möglicherweise in naher Zukunft die Spur aufzeigen, die organischer Molekülstaub aus interstellaren Wolken auf dem Weg zum Protostern einschlägt.

Stephan Udry, Universität Genf, **Extrasolar planets: Towards new Earth**

Die Ergebnisse der extrasolaren Planetenforschung seit 1995 sind verblüffend. Dieser junge astronomische Zweig nutzt

astrometrische Verfahren, wie den optischen Dopplereffekt von Spektren oder wertet Transit- und Bedeckungsbeobachtungen aus. Spektakulär war die Beobachtung eines Planeten um den Stern 51 Pegasi. Er zeigte periodisch wachsende Rot- und Blauverschiebungen, daraus errechnet sich eine Bahngeschwindigkeit von 57m/s.

Weil ein Stern und sein(e) Planet(en) um einen gemeinsamen Schwerpunkt kreist (en), kann mit der Radialengeschwindigkeitsmethode (RV-Methode) auf die Bahnparameter, Masse und Radius eines Planeten geschlossen werden. Aktuelle Verfahren detektieren die Geschwindigkeiten eines Sterns im Bereich 1m/s und das für Objekte, die in einer zweistelligen Licht-Jahr Distanz liegen. Ganz unglaublich!



4 Exoplaneten kreisen um den Stern Gliese 581

Beobachtungsmässig günstige Systeme zeigen nur einige Tage dauernde Umlaufperioden mit entsprechend kleinem Abstand des Planeten vom Zentralstern. Dies führt zu Oberflächentemperaturen um 1000K und mehr. Exoplaneten in einer zu definierenden, „bewohnbaren Zone“ haben Radien zwischen 1 und 1.75 Erdradien und Massen zwischen 1 und 8 Erdmassen.

Willy Benz, Universität Bern. **Planets and Earth formation**

Am Anfang steht die Drake Gleichung. Diese, hier vereinfacht, gibt eine Abschätzung an für die Anzahl N existierender Zivilisationen in der Milchstrasse, die möglicherweise an einer interstellaren Kommunikation teilnehmen könnten. Sie lautet:

$$N = N_{BP} \times f_{Leben} \times f_{Ziv} \times f_{heute} \times L$$

Dabei ist N_{BP} die Anzahl der Planeten, die zumindest prinzipiell Leben tragen könnten, f_{Leben} prozentualer Anteil der Planeten, auf denen es tatsächlich Leben gibt, f_{Ziv} der prozentuale Anteil auf denen es irgendwann eine Zivilisation gab sowie f_{heute} , der prozentuale Anteil, auf dem heute eine Zivilisation lebt und L , die erwartete Lebenszeit einer entsprechenden Zivilisation.

Natürlich kennen wir die einzelnen Faktoren nicht genau, aber die Beziehung gibt uns eine Vorstellung über die Wahrscheinlichkeit solcher Spekulationen.

Nach diesem Exkurs nun die Frage:

Wie entstanden Planeten und unsere Erde? Planeten entstanden, nachdem der solare Urnebel zu einer abgeflachten Scheibe kollabiert war. Dieser rotierende solare Urnebel hatte eine Ausdehnung, die in etwa dem Durchmesser der heutigen Pluto Umlaufbahn entspricht. Die Scheibe verlor an Drehimpuls. Wie dieser Drehimpulsverlust entsteht, ist heute teilweise noch unverstanden und in Diskussion. Warum entstanden kleine terrestrische Planeten wie Merkur und unsere Erde neben den Gasriesen Jupiter und Saturn? Nun, die steinigen Planeten haben sich in den heissen inneren Bereichen der rotierenden Scheibe gebildet, die jovianischen Planeten in den äusseren kalten Bereichen. In der Umgebung der bereits Wasserstoff fusionierenden Protosonne war die Restmaterie ausser den 98% Wasserstoff und Helium, fein verteilt. Sie begann sich, wahrscheinlich auf Grund elektrostatischer Anziehung, zu planetarischen Embrios zusammenzuklumpen. Aus diesen festen Keimen konnte die Schwerkraft schliess-

lich Planeten formen. Wasserstoff und Helium sammelten sich aber erst ausserhalb der Frostgrenze an, sie liegt jenseits der Marsbahn. Terrestrische Planeten konnten sich innerhalb dieser Grenze bilden, die gasförmigen, jovianischen aber ausserhalb.

Rainer Wieler, ETHZ, **The early evolution of the Earth**

Metalle und Silikate, SiC Körner, die sich in primitiven Meteoriten finden und in der Urzeit gebildet wurden, liefern uns Informationen aus dieser Zeit. Sie können, zusammen mit relativ kurzlebigen Radioisotopen, über ihre Tochter-Isotope manchen Schlüssel zum Verständnis des solaren Frühstadiums liefern. Wir kennen Indizien, wonach eine Supernovaexplosion als Grund für die Bildung unseres Sonnensystems und der Bildung der meisten kurzlebigen Isotopen angenommen wird.

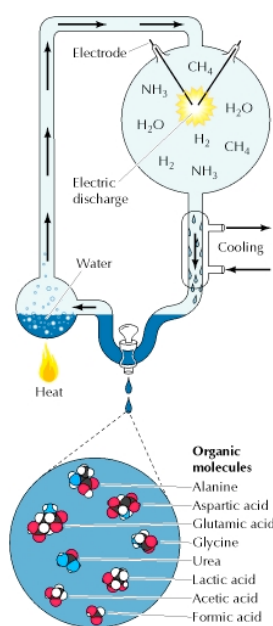
Um Ereignis-Sequenzen während der Bildung des Sonnensystems zu markieren, können radioaktive Isotope mit ähnlichen Zerfallszeiten als Uhren dienen. Al^{26} , mit einer Zerfallszeit von 0.7 Mio. Jahren kann als Uhr benutzt werden. Der Vergleich zweier Uhren, Al^{26} und der Zerfall von Uran Isotopen in Ca-Al reichen Einschlüssen deuten beide auf dasselbe Alter unseres Sonnensystems von 4.6 Mia Jahren hin. Ebenso kann der Hf^{182} Zerfall zu W^{182} mit einer Halbwertszeit von 8.9 Mio. Jahren als Chronometer für die solare Frühzeit genutzt werden.

Die Frage nach dem Ursprung des Wassers auf der Erde bleibt unbeantwortet. Unklar ist insbesondere, weshalb es bedeutend mehr Wasser auf der Erde als auf den anderen Planeten unseres Sonnensystems gibt.

Jeffrey L. Bada, University of California San Diego, **Origin of Life on Earth**

Theorien zum Ursprung des Lebens reichen ins Altertum zurück, von Aristoteles über Jean Baptiste Van Helmond (1580 - 1644), der sich fragte, ob Orga-

nisches aus Unorganischem entstehen könne. Die grundlegenden Experimente von Miller 1953 weckten die Hoffnung, die ursprünglichen Lebensmechanismen zumindest ansatzweise zu verstehen. Miller synthetisierte Aminosäuren, die in einer primitiven Erdatmosphäre simuliert wurden. Er zündete eine elektrische Entladung in einem Glaskolben, der CH_4 , NH_3 , H_2O und H_2 Moleküle enthielt. Sein Ergebnis war spektakulär, es entstanden biochemisch signifikante Verbindungen wie Aminosäuren, Hydroxylsäuren und Urea, einem stickstoffhaltigen organischen Molekül. Damit war die Ursuppe (Primordial soup) im Labor angerührt. Das Rezept zur Ursuppe stammt vom Biochemiker A. I. Oparin, der, ausgehend von Darwins Analyse, schon in der 30er Jahren erklärte, wie einfache organische und anorganische Moleküle sich zu komplexeren organischen Verbindungen wandeln.



Miller-Urey Experiment (1953)

Als treibende Kraft sah er das Sonnenlicht. In Millionen von Jahren erwerben diese Verbindungen die Fähigkeit, sich selbst zu kopieren und andere chemische Stoffe zu nutzen.

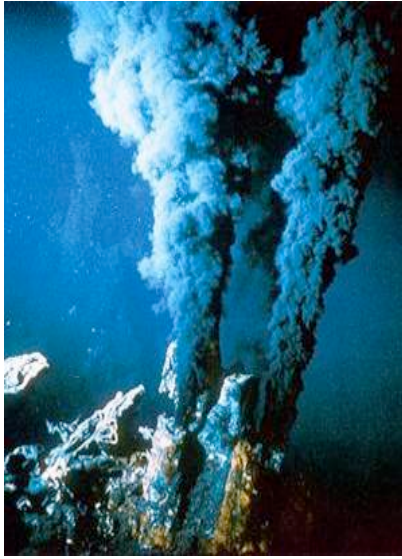
Der Weg einer Spontanzeugung (Abiogenese) über die Nukleinsäuren RNA und DNA wurde sichtbar. Das war der Beginn des Lebens auf Erden vor ca. 4 Mia Jahren. Notwendige Voraussetzungen sind Kohlenstoff - Wasserstoffverbindungen, gemässigte Temperaturen, keine zerstörerische elektromagnetische Strahlung sowie Wasser als Lösungsmittel. Wasser ist grundlegend, ohne H_2O gibt es kein Leben, so, wie wir es kennen.

William Martin, University of Düsseldorf, **From single- to multiple-cells organisms.**

In einem fulminanten Expose führt uns der Referent zu den schwarzen Rauchern auf dem Meeresgrund und damit direkt zur „Ursuppe der Ozeane“. Diese Ursuppe birgt andere Mechanismen als die Vorstellungen von A. Oparin, J.B. Haldane und die, welche das Miller-Urey Experiment zur Uratmosphäre suggeriert.

In kaminartigen Porensystemen am Meeresboden qualmen aus hydrothermalen Quellen bei Temperaturen von 300 bis 400°C wasserstoffhaltige Flüssigkeiten. Diese können, wenn sie mit CO_2 reichem ozeanischen Wasser in Berührung geraten, in Redox - Reaktionen Methan und andere organische Moleküle bilden. Die versprühte heisse und tödlich giftige Brühe besteht primär aus Schwefelwasserstoff, H_2S , dem Gas, das wir von faulen Eiern kennen.

Lokal entstehen hohe Konzentrationen von Biomolekülen. Dabei gedeihen in der Tiefsee Ökosysteme in völliger Finsternis. Interessanterweise leben verblüffende Lebewesen in den Schwarzen Raucheraminen am Meeresboden. Blinde Krabben, weisse Krebse, Röhrenwürmer sind nur einzelne von den über 300 von Biologen identifizierten Arten. Weder Pflanzen noch Photosynthese sind hier anzutreffen. Wie schaffen es denn diese Tierchen zu überleben? Chemiosmosis und Serpentinisation heissen die thermochemischen Mechanismen.



Schwarze Raucher in 2 bis 4km Tiefe

Kleine Mikroben oxidieren den Schwefelwasserstoff, der aus den Röhrenchen diffundiert. Diese Mikroorganismen sind das Futter für die Tierchen, die weiter oben in der Nahrungskette liegen. Interessant sind vor allem die von D. Kelley et. al. entdeckten Tiefsee-Hydrothermalquellen. Diese wurden „Lost City“ genannt und haben Austrittstemperaturen von nur 40 - 90°C, die damit „lebensfreundlicher“ sind. Sie enthalten vor allem H₂ und CH₄. Es gibt überzeugende Hinweise, wonach uns das Verständnis der submarinen Systeme auf Erden auf die Spuren des Lebens hier und ausserhalb führen.

Luis Bettencourt Los Alamos National Laboratory and Santa Fe Institute,
Lifetime of an advanced civilisation

Der Referent warnt zunächst seine Zuhörer: Die Aussagekraft seiner Überlegungen seien beschränkt, aber das Zureden seiner Frau hätte ihn zugunsten dieses Vortrags gestimmt.

Auf seine Frage woher wir kommen, zitiert er die Drake Gleichung (wie bei Willy Benz). Die biologischen Wurzeln der menschlichen Gesellschaften ähneln denen von

sozial organisierten Insekten. Biologische Systeme kooperieren. Dies gilt für verschiedene Ebenen biologischer Organisation. Sie reichen von einzelnen Zellverbänden bis zu Tieren, die in Gruppen leben. Menschliche Gesellschaften nutzen weitgehend Mechanismen, die Kooperation fördern.

Altruismus und Kooperation ist zwar ein Teil der menschlichen Natur, das System kann aber instabil werden. Das Ergebnis der Darwin'schen Evolutionsvorstellungen ist oft kein Gleichgewicht, das auf der Maximierung der Tüchtigsten basiert, es kann Oszillationen und Chaos einschliessen (Ohtsuki et al 2006, Nowak & Sigmund 1996). In unstrukturierten Populationen, begünstigt die natürliche Selektion egoistische Elemente gegenüber kooperierenden.

Weitere Gesichtspunkte sind Qualität und Quantität. Die Überlegungen skizziert der Referent anhand von Zusammenhängen in städtischen Bevölkerungen. So steht zum Beispiel einer Zunahme des Einkommens von 15% ein gleich grosser Prozentsatz der Kriminalität-Zunahme gegenüber.

Was sind die ökologischen Fussabdrücke der Menschheit? Zum Beispiel der CO₂ Anstieg gegenüber dem Bevölkerungswachstums. Die Zunahme ist linear, falls wir den Bevölkerungsmassstab logarithmisch auftragen.

Weiter interessiert die Frage, ob die kognitive Kraft einer sozialen Spezies sich möglicherweise gegen ihre Zivilisation richtet. Wissenschaft und Technik können nur in einer geeigneten, stabilen politischen Umgebung gedeihen (Derek de Solla Price). Die Organisation menschlicher Gesellschaften in überregionale Staaten verhindern grosse Konflikte, weil die Einsicht zur Selbsterhaltung und die Gefahr gegenseitiger Auslöschung überwiegt. Deshalb gilt für den Wert L in der Drake Gleichung möglicherweise

$$0 < L < \text{not alone}$$

Also sind wir vielleicht nicht alleine!

Bericht zur Maturaarbeit Billard - Reflexionen

Norbert Hungerbühler, Universität Fribourg

Vorbemerkung

Die hier besprochene Maturaarbeit kam unter einer Patenschaft zustande. Die Schülerin wurde dabei gemeinsam von ihrem Lehrer, Anton Perren (Kollegium Spiritus Sanctus in Brig), und mir betreut. Patenschaften zwischen Schulen und Universitäten sind sehr einfach über den Patenschaftsservice der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft zu installieren:

www.math.ch/mathematics-at-school

Solche Patenschaften werden ebenfalls von der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften vermittelt und zwar auch in anderen Fächern, insbesondere in der Physik:

www.scnat.ch/d/Fokus_Jugend

Problemstellung

Die Problemstellung wurde zu Beginn der Arbeit bewusst offen gehalten, um das Leistungsniveau und die Interessen der Schülerin auszuloten. Angefangen wurde mit einem einfachen Billardproblem im Quadrat: Eine Kugel soll so gestossen werden, dass sie die vier Banden je genau einmal berührt und dann zum Ausgangspunkt zurückkehrt. In welcher Reihenfolge werden die Banden berührt? Wieviele Lösungen gibt es?

Anschliessend wurde ein dreieckiger Billardtisch untersucht: Ist das Dreieck spitzwinklig, so ist das Höhenfusspunktdreieck eine geschlossene Billardbahn (siehe [4], [2]). Aber gibt es auch geschlossene Bahnen in stumpfwinkligen Dreiecken?

Danach betrachtete die Schülerin das Heronsche Prinzip (Licht läuft immer entlang kürzester¹ Bahnen) und leitete daraus die drei Euklidischen Reflexionsgesetze her (z.B. Einfallswinkel = Ausfallswinkel).

Im letzten Teil leitete die Schülerin aus dem Heronschen Prinzip einen Beweis einer Variante des Satzes von Birkhoff (siehe [3]) ab: Einer geschlossenen Raumkurve ist eine geschlossene Billardbahn einzubeschreiben. Ziel war dabei auch eine numerische Implementierung mit graphischer Ausgabe.

¹genauer sind es Bahnen stationärer Länge

Ergebnisse und Erfahrungen

Das Billardproblem im Quadrat konnte von der Schülerin recht selbständig erarbeitet werden. Den Beweis der angesprochenen Eigenschaft des Höhenfusspunktdreiecks rekonstruierte die Schülerin auf der Grundlage von vorgegebenen Hilfsfiguren. Für das stumpfwinklige Dreieck studierte die Schülerin einen aktuellen Artikel aus den *SIAM Reviews* (siehe [3]). Der Zusammenhang zwischen den Euklidischen Reflexionsgesetzen und dem Heronschen Prinzip stellte für die Schülerin anfänglich eine beträchtliche Hürde dar, da ein variationeller Zugang zu Problemen normalerweise ausserhalb der Schulmathematik liegt. Nach anfänglicher Mühe ging jedoch ein Ruck durch die Schülerin und schliesslich freute sie sich so über die Grundidee, dass sie aus eigenem Antrieb noch das Birkhoff-Problem gestellt haben wollte. Der Beweis gelang schliesslich unter Anleitung, ebenso die numerische Implementierung. Die Schülerin war schlussendlich zurecht stolz auf ihre Leistung und ihren Erkenntnisgewinn.

Bemerkungen

Billardprobleme eignen sich sehr gut für eine Maturaarbeit: Es gibt beliebig viele Varianten und unterschiedliche Fragestellungen auf allen Niveaus (siehe Literaturhinweise). Aufbauend auf einfachen Problemen kann man je nach Situation zu zu schwierigeren oder komplexeren Problemen übergehen. Ein weiteres Vorteil ist die Anschaulichkeit der Probleme. Bei numerischen Implementierungen ist eine gewisse Vorsicht am Platz: Längst nicht alle Maturanden bringen Programmierkenntnisse oder Freude am Arbeiten mit Computern mit.

Für weitere Informationen oder Auskünfte stehe ich jederzeit gern zur Verfügung.

Literaturhinweise

- [1] Marco Bettinaglio, Ferdinando Lehmann: Mathematisches Billard. Educ-ETH, Grüne Berichte 1998
<http://www.educ.ethz.ch/lehrpersonen/mathematik/gb/ber>
- [2] Richard Courant, Herbert Robbins: What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. Oxford Paperbacks, 2nd edition, 2007
- [3] Lorenz Halbeisen, Norbert Hungerbühler: On periodic billiard trajectories in obtuse triangles. *SIAM Rev.* 42/4, 657–670, 2000
- [4] Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen - Optimale Formen in Geometrie und Natur. Birkhäuser 1996, 2001
- [5] Norbert Hungerbühler: Geometrical Aspects of the Circular Billiard Problem. *Elemente der Mathematik*, 47, 114–117, 1992
- [6] George W. Tokarsky: Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point. *Amer. Math. Monthly* 102, 867–879, 1995

norbert.hungerbuehler@unifr.ch

Zielwurf

DPK

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

"So sprach er und warf, und das Geschoß lenkte Athene
 Auf die Nase neben dem Auge, und es durchbohrte die weißen Zähne
 Und ihm schnitt ab die Wurzel der Zunge das unaufreibbare Erz,
 Und die Spitze fuhr ihm heraus am untersten Kinn."

Homer "Ilias" 5. Gesang, Verse 290-293, Übers. W. Schadewaldt

Einleitung

Irgendwo hatte ich mal gelesen, der grosse Unterschied zwischen Mensch und Affe sei nicht die Sprache, sondern der einarmige Zielwurf. Während Affen ihren Feinden noch nachrennen müssen, schmeissen wir ihnen einen Stein an den Kopf (oder wie oben Diomedes eine Lanze, soviel zur griechischen Kultur). Wurfbewegungen sind ein klassisches Thema des Physikunterrichts. Ich will für einmal weg von der "mathematisch vollständigen" Analyse hin zur Visualisierung.

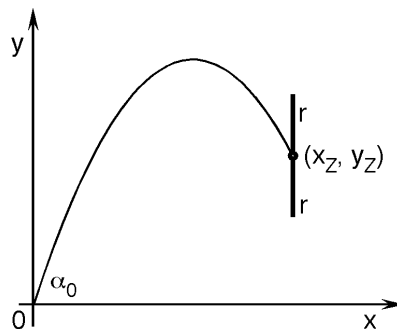
Modellierung

Ein Darts-Spieler möchte aus Distanz die Scheibe treffen. Er kann Abwurfwinkel α_0 und Abwurfschnelligkeit v_0 wählen. Geübte Werfer finden anscheinend eine Kombination aus Abwurfwinkel und Schnelligkeit, wo kleine Fehler sich kaum auswirken. Welche Kombination könnte das sein?

Der Abwurf liege im Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, siehe Abb. 1. Das Ziel ist die Dartscheibe. Das Zentrum der Scheibe habe die Koordinaten (x_Z, y_Z) . Die vertikale Scheibe mit Radius r muss von vorne getroffen werden, es kommen also Direkt- und Bogenschüsse in Frage. Das Ziel gelte als getroffen, wenn die Wurfparabel die Scheibe durchquert. Der Wurfpeil sei punktförmig. Wir betrachten nur die Bewegung in einer vertikalen Ebene. Der Luftwiderstand sei vernachlässigt.

Abbildung 1: Typische Wurfparabel mit Ziel (Dartscheibe von der Seite).

Der Abwurf erfolgt im Nullpunkt des Koordinatensystems, das Ziel hat Koordinaten (x_Z, y_Z) und vertikale Ausdehnung $\pm r$.



Simulation

Ob ein Wurf mit Startwinkel α_0 und Startgeschwindigkeit v_0 trifft, lässt sich ganz einfach mit der Wurfparabelgleichung herausfinden:

$$y = \tan \alpha_0 \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \cdot x^2$$

Auf der $(\alpha_0; v_0)$ - Parameterebene kann man für jeden Punkt berechnen, ob $y_Z - r \leq y(x_Z) \leq y_Z + r$ ist, d.h. ob die Scheibe getroffen wurde. Falls ja, wird das zugehörige Pixel im Bild schwarz gefärbt, siehe Abbildung 2. Für die Rechnung wurde $x_Z = 2.4$ m, $y_Z = 0$ und $r = 0.17$ m gesetzt, was etwa der Situation beim Dartwerfen entspricht. Die minimale Geschwindigkeit, mit der man das Scheibenzentrum treffen kann, gehört mit dieser Wahl der Parameter zum Abwurfwinkel $\alpha_0 = 45^\circ$ und beträgt $v_0 = \sqrt{x_Z g} = \sqrt{2.4 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 4.9 \text{ m/s}$.

Abb. 2: Anfangswerte aller Würfe, welche die Dartscheibe treffen. Bei kleinen Abwurfwinkeln α_0 (Direktschuss) muss mit hoher Geschwindigkeit v_0 geworfen werden, aber sowohl der Winkel als auch die Geschwindigkeit müssen nicht sehr genau bekannt sein. Bei grossen Abwurfwinkeln müsste die Geschwindigkeit sehr genau stimmen um zu treffen. In der Nähe des Abwurfwinkels 45° darf man sich einen grossen Winkelfehler erlauben, aber die Anfangsgeschwindigkeit muss in einem relativ engen Bereich liegen.

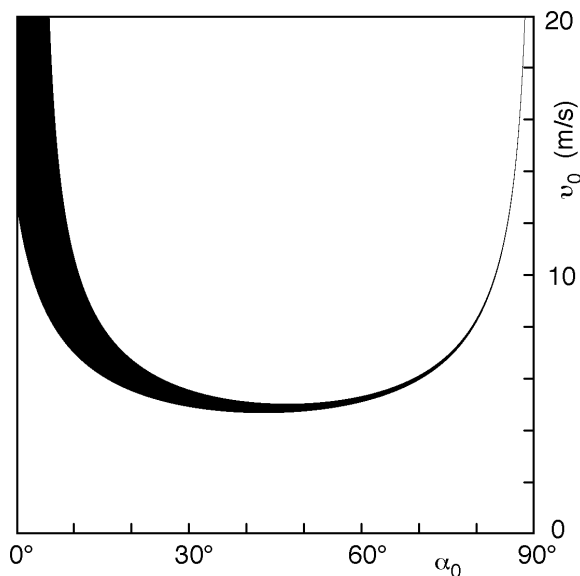


Abbildung 2 legt nahe, dass man einen flachen Direktschuss wählt. Genau das ist es ja auch, was in der Spielpraxis gemacht wird.

Nachlese

Hängt die Scheibe höher oder tiefer, so liegt der Abwurfwinkel, der zur minimalen Abwurfgeschwindigkeit gehört, natürlich nicht mehr bei 45° . Die Lösungsmenge (schwarzer Bereich in Abb. 2) sieht aber immer noch ähnlich aus, nur horizontal gedehnt oder komprimiert.

Wer wissen möchte, wie die Lösungsmenge aussieht, wenn das Ziel nicht vertikal sondern horizontal ausgerichtet ist, z.B. wie der Korb im Basketball, kann sich einen analogen Artikel unter www.dpk.ch/Material anschauen.

Rückblick:

Atmosphären untersuchen und modellieren: Empirische, analytische, numerische Methoden

Der Kurs fand vom 22. bis 24. Oktober 2009 im Seminarhotel Appenberg in Zäziwil unter der Leitung von Hans Kammer mit insgesamt 24 Teilnehmern statt.

Hauptreferenten waren die Mathematiker und CAS-Pioniere Hans Rudolf Schneebeli (Baden) und Alfred Vogelsanger (St. Gallen).

Lässt sich Atmosphärenphysik an Mittelschulen behandeln? Ja, wenn man sich auf eine Luftsäule beschränkt. Dann kann die Abhängigkeit zwischen Luftdruck, Höhe, Temperatur und evt. noch anderen Parametern untersucht werden.

Die Modellierung von Temperatur und Druckverläufen in der Atmosphäre kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen, *empirisch* mit einer *Datentabelle* oder *analytisch* mit einer *Differentialgleichung*, die das hydrostatische Gleichgewicht beschreibt.

Die Kursteilnehmer lernten beide Arten der Modellierung kennen und hatten Gelegenheit, die Modelldaten mit Hilfe der Statistikfunktionen eines CAS-Rechners oder von Excel zu analysieren und auszuwerten.

Für die erste Art wurde das ICAO-Modell der „International Civil Aviation Organisation“ verwendet. Das Datenmodell unterscheidet dabei die Troposphäre im Bereich von der Erdoberfläche bis zu einer Höhe von 11000 m und die Stratosphäre oberhalb von 11000 m.



| Höhe z [m ü M] | Temperatur $T(z)$ [K] | Luftdruck $p(z)$ [Pa] |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 288.15 | 101325 |
| 500 | 284.90 | 95462 |
| 1000 | 281.65 | 89876 |
| 1500 | 278.40 | 84559 |
| 2000 | 275.15 | 79498 |
| 2500 | 271.90 | 74686 |
| 3000 | 268.65 | 70113 |
| 3500 | 265.40 | 65769 |
| 4000 | 262.15 | 61645 |
| 4500 | 258.90 | 57734 |
| 5000 | 255.65 | 54026 |
| ... | ... | ... |

| Höhe z [m ü M] | Temperatur $T(z)$ [K] | Luftdruck $p(z)$ [Pa] |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| 11000 | 216.65 | 22637 |
| 12000 | 216.65 | 19334 |
| 13000 | 216.65 | 16513 |
| 14000 | 216.65 | 14104 |
| 15000 | 216.65 | 12046 |
| 16000 | 216.65 | 10289 |
| 17000 | 216.65 | 8787 |
| 18000 | 216.65 | 7505 |
| 19000 | 216.65 | 6410 |
| 20000 | 216.65 | 5475 |

Quelle: H:R:Schneebeli, A. Vogelsanger: Modellanalyse der ICAO-Atmosphäre

Hans Richner von IACETH berichtete über den Fallschirmsprung Michel Fourniers aus 40 km Höhe (!), den die Kursteilnehmer anschliessend mit numerischen Verfahren modellieren konnten. Gerhard Stolz von Texas Instruments stellte den TI NspireCAS vor.

Thomas Brossi, Meteolabor AG Wetzikon, referierte über die Methoden der Radiosondierung.

Höhepunkt war das Steigenlassen einer Ballonsonde und die Erfassung und Auswertung der von ihr gelieferten Messdaten.

Der Vortrag von Daniel Leuenberber von MeteoSchweiz zeigte auf, wie hoch komplex die Modelle der Atmosphäre tatsächlich sind.

Es war ein gut organisierter und gut gelungener Kurs. Dem Kursleiter Hans Kammer und allen Referenten sei herzlich gedankt.

Unterstützt wurde der Kurs von Meteolabor, Texas Instruments, Nagra Wettingen und der Fachschaft Physik der Berner Gymnasien.

Stefan Walser

Download auf: <http://www.swisseduc.ch/mathematik> (Schneebeli/Vogelsanger: Atmosphärenmodelle, ICAO-Modelle)

Fachverband für Strahlenschutz e.V. Förderung von Maturarbeiten

Was fördert der Fachverband?

(Vgl. auch www.fs-ev.de unter Aktuelles - Nachwuchsförderung)

Gefördert werden klar definierte und zeitlich begrenzte Vorhaben, z.B. Maturarbeiten im Themenkreis Strahlenschutz. Das Spektrum umfasst sowohl experimentelle als auch theoretische Fragen z.B. aus folgenden Bereichen:

- Bestimmung von Radionukliden in Umweltproben und in Lebensmitteln
- Strahlendosis in Wohnungen, Luft- oder Raumfahrt
- Radioaktivität im Alltag
- Strahlung in der Medizin
- Nicht-ionisierende Strahlung
- Aufbau von Strahlungsmessgeräten
- Darstellung von strahlenschutzrelevanten Themen im Internet
- Erstellung von Datenbanken für Anwendungen im Strahlenschutz

Wie fördert der Fachverband?

- Durch ein Gremium des Fachverbandes für Strahlenschutz wird entschieden, ob das Vorhaben förderungswürdig ist.
- Die Fördersumme für die Durchführung des Projektes beträgt 500,-- € pro Einrichtung. Die besten 10 Einrichtungen werden gefördert.
- Nach der Laufzeit des Projektes von maximal 8 Monaten wird das Ergebnis des Projekts beim Fachverband für Strahlenschutz eingereicht.
- Es wird eine Auswahl von 5 Projekten vorgenommen, die prämiert werden sollen.
- Die Schüler und Betreuer werden zur Vorstellung ihres Projektes und zur Diskussion beim Fachverband für Strahlenschutz eingeladen.
- Das beste Projekt soll auf der Jahrestagung des Fachverbandes vorgestellt werden.

Zeitplan für die Schweiz

- Einreichung der Themen bis Ende April 2010
- Entscheid über Förderung durch den Fachverband bis spätestens Ende Juni 2010
- Einreichung der Arbeit zur Prämierung durch den Fachverband bis Mitte Januar 2011.

Wie kann man sich bewerben?

Interessierte richten eine Bewerbung mit unten stehendem Formular an den Fachverband für Strahlenschutz unter folgender Adresse:

Deutsch-Schweizerischer Fachverband für Strahlenschutz e. V.
Postfach 1205
D 85740 Garching

fs-sek@fs-ev.de, sowie als Kopie an
Swen-Gunnar.Jahn@ensi.ch und Christian.Wernli@psi.ch

**FORMELN, TABELLEN, BEGRIFFE
statt
FORMELN und TAFELN**

Im Juli 2009 ist die bekannte gelbe Formelsammlung im Orell Füssli Verlag neu erschienen. Die DMK hatte vor ein paar Jahren entschieden, dass dieses Werk überarbeitet werden muss. Einerseits lagen ganz elementare verlagstechnische Gründe vor, nämlich dass die Seiten nicht in elektronischer Form existierten, so dass bei jeder Änderung Einzelteile in die Filme hinein geschnitten werden mussten. Ausserdem gab es Änderungswünsche, die deutlich weiter gingen als nur eine Stelle zu korrigieren bzw. zu ergänzen. Schliesslich schienen uns viele der Zahlentafeln angesichts der Omnipräsenz verschiedenster Taschenrechner obsolet geworden zu sein. Die DPK hat unter der Leitung von Samuel Byland, zusammen mit Martin Lieberherr, Christian Stulz und Manfred Sigrist, den Physikteil ebenfalls überarbeitet, obwohl dieser schon während der vergangenen Jahre laufend verbessert worden war. Die Astronomie hat Hans Roth, ein früheres DMK-Mitglied, durchgesehen und verbessert. Schliesslich wurde der Chemieteil durch die DCK unter der Leitung von Klemens Koch völlig neu erstellt. Die Rückmeldungen zur Neuerscheinung der gelben Formelsammlung, die bisher zu uns durchgedrungen sind, zeugen von einer grösstenteils positiven Aufnahme. Natürlich hat eine Neuauflage immer auch noch kleinere oder grössere Fehler. Auf der Homepage der DMK findet man unter www.vsmf.ch/dmk eine Korrigenda zu den bisher bekannten Fehlern. Die betroffenen Stellen können ausgedruckt und in der Formelsammlung überklebt werden. Meldungen zu weiteren Fehlern nehmen wir natürlich gerne entgegen (w-dur@gmx.ch).

Als Farbe für die Graphiken haben wir einen Rotton gewählt. Von den Beispielen der bedingten Wahrscheinlichkeit hätten wir wissen müssen, dass etwa 8% der männlichen Leser rotgrünblind sind und somit Probleme haben, die rote von der grauen Farbe zu unterscheiden, was bei einigen Graphiken zu schlechter Lesbarkeit führt. Wir beabsichtigen deshalb, in der zweiten Auflage eine andere Zweitfarbe zu wählen. In der Korrigenda gibt es Vorschläge dazu.

Auch zu Dicke und Gewicht des Werks haben wir Rückmeldungen bekommen. Beides scheint an der oberen Grenze zu sein. Abklärungen mit dem Verlag haben gezeigt, dass es mit anderem Papier möglich ist, die weiteren Auflagen dünner und evtl. sogar leichter zu machen.

Ich möchte an dieser Stelle allen Mitarbeitern nochmals herzlich danken, vor allem auch den bisher noch nicht erwähnten Mitgliedern der Projektgruppe Mathematik: Baoswan Dzung Wong, Markus Kriener, Alfred Vogelsanger sowie Hansruedi Künsch und Joerg Waldvogel von der ETH und Wolfgang Gehrig für die wunderschönen Graphiken.

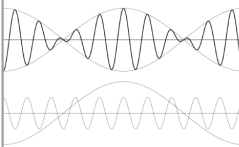
Werner Durandi, Projektleiter

swisseduc.ch

- » SwissEduc wird von **Freiwilligen** getragen
- » zwei **Stiftungen** und zahlreiche **Schulen** unterstützen SwissEduc
- » der Provider **Metanet** sorgt für eine tadellose Infrastruktur

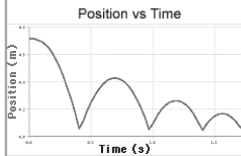
SwissEduc - kostenlose, erprobte Unterrichtsmaterialien von Lehrpersonen für Lehrpersonen

Mathematik-Buch online



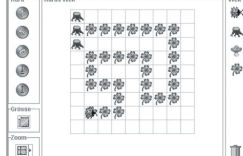
„Skalarprodukte – Schwingungen – Signale“ als PDF-Buch online

Vernier LabPro



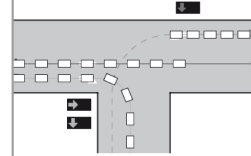
Verschiedene Experimente zum Umgang mit Diagrammen und Koordinatensystem

Spielerisch programmieren



Kara-Lernumgebungen für einen spielerischen Zugang zum Programmieren

Warteschlangen simuliert



Lernumgebungen InfoTraffic und LogicTraffic zu Logik und Warteschlangentheorie

Scratch Programmieren



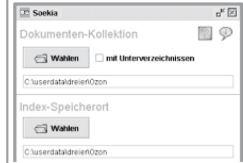
Lernparcour durch die kreative Programmierumgebung Scratch des MediaLabs MIT

Digital-Elektronik lernen



Entdeckendes Lernen von elektrischen Schaltungen in Computer und Alltagsgeräten

Suchmaschinen interaktiv



Soekia – eine interaktive Lernumgebung zu Suchmaschinen und Informationsbeschaffung

www.swisseduc.ch

- » Aufgabensammlungen, Leitprogramme, interaktive Lernumgebungen, ...
- » alle Materialien unterrichts-erprobt
- » fix-fertige Lehrer- und Schülervorlagen
- » viele weitere Fächer, wie Englisch, Chemie, Geografie, ...



AUFRUF DER DMK

an ihre Fachkolleginnen und Fachkollegen !

- *Haben Sie Zeit ?*
- *Möchten Sie an einem neuen Unterrichtswerk mitwirken oder haben Sie Ideen oder Unterlagen für neue Unterrichtsmaterialien ?*
Bei uns steht die vollständige Überarbeitung der Aufgabensammlungen ALGEBRA 1, 2 & 3 an und wir wollen eine Sammlung von Unterrichtshilfen aufbauen, speziell fürs Schwerpunktfach AM.
- *Verfolgen Sie mit Interesse die schulinternen und öffentlichen Diskussionen zu EvaMAR II, HsGym, HarmoS, 'Standards', 'Lehrplan 21', ... ?*
Die DMK setzt sich in vielfältiger Weise mit der «Zukunft der gymnasialen Schulmathematik» auseinander und versucht, ihren bildungspolitischen Einfluss bei den entsprechenden Gremien und Instanzen wirksam zur Geltung zu bringen. Netzwerke sind hier wichtig.

Kurzum: Die DMK sucht Kolleginnen und Kollegen, die über zeitliche Ressourcen verfügen (quartalsweise auch an einem Samstagnachmittag), Interesse sowie Ideen für Projektarbeiten mitbringen, Artikel schreiben oder lektorieren können und auch eine gewisse Freude an Kommissionsarbeiten haben (Stichworte: Weiterbildung, Wettbewerb «Känguru der Mathematik», Teilnahme an Vernehmlassungen, Mitarbeit im VSMP-Vorstand).

Weitere Informationen finden Sie auf unserer Homepage www.vsmf.ch/dmk, wo Sie unter 'PORTRAIT' ergänzende Hinweise zur Kommissionsarbeit finden.

Leisten Sie gerne so genannte Freiwilligenarbeit? Schätzen Sie auch Teamarbeit? Fühlen Sie sich immer noch angesprochen?! – Dann nehmen Sie Kontakt auf mit dem Präsidenten der DMK. – Wir sind bemüht, eine ausgewogene und gut durchmischte Kommission zu haben, nehmen etwa Rücksicht auf die Landesteile der Deutschschweiz, das Geschlecht, das Alter und die unterschiedlichen Vorstellungen zum Mathematikunterricht. Eventuell kennen Sie auch eine Kollegin oder einen Kollegen, die respektive den Sie sich gut als Mitglied der DMK vorstellen können.

Hansjürg Stocker
Präsident der DMK
hjstocker@bluewin.ch

Mathematik-Wettbewerbe

Neben der wohlbekannten Internationalen Mathematik Olympiade, die seit 1959 mit jährlich wachsender Zahl von Teilnehmenden durchgeführt wird, gibt's eine Vielzahl von Mathematik-Wettbewerben. Seit der Zeitepoche, als Euler, Leibniz oder die Bernoullis die mathematische Öffentlichkeit mit Aufgaben oder Problemstellungen bewusst herausforderten, fanden und finden ganz verschiedene "Wettkämpfe" mathematischen Inhalts statt, in jüngerer Zeit meist in organisierter Form. Ich erwähne zwei konkrete Beispiele aus dem vorletzten und letzten Jahrhundert: Zwischen 1894 und 1928 gab's etwa den nach dem Physiker LORÁND EÖTVÖS (1848 - 1919) benannten Mathematik-Wettbewerb in Ungarn und seit 1938 die "Putnam Mathematical Competitions", die auf den amerikanischen Juristen und Banker WILLIAM LOWELL PUTNAM (1861 - 1923) zurückgehen. Seit längerem oder kurzem werden in verschiedenen Ländern nationale Mathematik Olympiaden veranstaltet. Auch die «Quartalsaufgaben» oder «Aufgaben des Monats», die an diversen Gymnasien Tradition haben, können zu den Wettbewerben gerechnet werden. Ein mehr regionaler Wettstreit war jener in den Siebzigerjahren von der Uni Bern für die Berner Gymnasien lancierte Mathematikwettbewerb. Auch in unserem BULLETIN wurden über mehrere Jahre hinweg mathematische Wettbewerbsaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade für Schülerinnen und Schüler publiziert — leider mit sehr geringem Echo.

Mit Blick auf heute wird an dieser Stelle auf einige spannende Wettbewerbe hingewiesen, die auf ganz unterschiedliche Weise unsere Schülerinnen und Schüler ansprechen wollen.

- Für die besonders Begabten und hoch Motivierten sind's die **Mathematik Olympiaden**, die internationale und die schweizerische, die von der Sache her stets als Einzelwettkämpfe bestritten werden und intensiv vorzubereiten sind. → www.imosuisse.ch
- Wenn eine ganze Klasse als Team eine Herausforderung sucht und gegen andere Klassen antreten möchte, so ist dies bei **Mathematik ohne Grenzen** möglich. Für die jeweils erfolgreichsten Klassen gibt's einen Preis. → www.mathematik-ohne-grenzen.de oder auch maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr

[Auch mit dem Stichwort 'Mathematik ohne Grenzen' können via Suchmaschinen oder bei Wikipedia schnell zusätzliche Informationen gefunden werden.]

Von Kollege Andreas Werder (Gymnasium Münchenstein) erschien übrigens im BULLETIN N°107 (Juni 2008) ein ausführlicher und lesenswerter Bericht über diesen Team-Wettbewerb.

- Das Spezielle am **Känguruwettbewerb der Mathematik** ist der Umstand, dass es sich erstens um einen Multiple-Choice-Wettbewerb handelt, der zweitens ausgesprochen auch die weniger talentierten Schülerinnen und Schüler von der 3. Klasse Primarschule bis hinauf zur Maturität anspricht. Auch wenn jeder Teilnehmende für sich arbeitet, ist schliesslich nicht der Rang entscheidend, sondern die spielerische Freude beim Lösen der gestellten Aufgaben in der vorgegebenen Zeit. Eine spezielle Vorbereitung ist in diesem Fall nicht erforderlich. → www.mathe-kaenguru.ch
- Die **Mathematik- und Logikspielemeisterschaften** schliesslich sind ein Ausscheidungswettkampf für eine breitere Öffentlichkeit, sowohl für Jung wie Alt. In der Romandie ist dieser Wettbewerb schon länger bekannt; 2008 wurde er erstmals auch in der Deutschschweiz an der ETH in Zürich durchgeführt. Im Gegensatz zu den vorher erwähnten Wettbewerben fanden diese Spiele-Meisterschaften ein erstaunlich lebhaftes Echo in der NZZ; dort wurden sogar die Aufgaben publiziert. → www.smasv.ethz.ch

Liebe Kollegin und lieber Kollege, weisen Sie doch bitte Ihre Klassen auf diese vielfältigen und unterschiedlich herausfordernden Wettbewerbe hin und ermuntern Sie Ihre Klassen oder einzelne Schülerinnen und Schüler, sich daran zu beteiligen!

Weitere 'links': www.vsmv.ch/dmk und www.math.ch/mathematics-at-school/fr/node/11

Hansjürg Stocker, Wädenswil

Eine pseudohistorische Herleitung der diatonischen Tonleiter

Peter Gallin, Universität Zürich

Die diatonische Tonleiter ist durch die folgenden Schwingungszahlen (Frequenzen) festgelegt, welche in willkürlichen Einheiten den Oktavumfang von 24 bis 48 abdecken:

| | | | | | | | | |
|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Ton der diatonischen Tonleiter | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> | <i>G</i> | <i>A</i> | <i>H</i> | <i>c</i> |
| Schwingungszahl oder Frequenz | 24 | 27 | 30 | 32 | 36 | 40 | 45 | 48 |

Wenn überhaupt eine Begründung geliefert wird, so beruft man sich meistens auf die Reihe der Obertöne eines Grundtones *C*. Wir verwenden hier anstelle der Bezeichnung „Oberton“ den Begriff „Teilton“, damit die Nummerierung einen direkteren Zusammenhang mit der Frequenz hat: Der 1. Oberton entspricht dem 2. Teilton, welcher die doppelte Frequenz des Grundtones hat. Der 3. Teilton hat die dreifache Frequenz des Grundtones und der 1. Teilton ist der Grundton selbst. Die Teiltonreihe sieht dann folgendermassen aus:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-------------|------------|------------|------------|---------------|------------|--------------|--------------|------------|-------------|
| Teilton mit Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Ton | <i>C</i> | <i>c</i> | <i>g</i> | <i>c'</i> | <i>e'</i> | <i>g'</i> | <i>(i')</i> | <i>c''</i> | <i>d''</i> | <i>e''</i> | <i>(fa'')</i> | <i>g''</i> | <i>(a'')</i> | <i>(i'')</i> | <i>h''</i> | <i>c'''</i> |

Dabei treten unerwünschte Töne auf, welche nicht in der diatonischen Tonleiter enthalten sind. Der 7. Teilton wird auch die natürliche Septime oder der Ton *i'* genannt. Er hat die Frequenz $7 \cdot 24$ in unseren willkürlichen Einheiten. Nun führen wir die „Oktavierung“ ein: Eine Frequenz darf beliebig mit einer beliebigen Zweierpotenz 2, 4, 8, 16 usw. multipliziert oder dividiert werden, ohne dass sich der Name des Tones verändert. Die Tonnamen erhalten dann einfach mehr oder weniger Striche oder wechseln in der Tiefe zu Grossbuchstaben oder Grossbuchstaben mit einer Ziffer als Index. So ergibt sich die Oktavreihe: $C_2, C_1, C, c, c', c'', c''', \dots$ mit den Frequenzen 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, ... in unseren willkürlichen Einheiten. Zwei Oktaven tiefer als *i'* heisst der Ton dann *I* und hat die durch 4 geteilte Frequenz des 7. Teiltöne: $7 \cdot 24/4 = 42$. Er liegt also ziemlich genau in der Mitte zwischen *A* und *H* und ist bei den Bassisten offenbar gefürchtet, weil er wegen der langen Saiten einer Bassgeige leicht zum Schwingen gebracht werden kann. Der 11. Teilton wird auch Alphorn-*fa* genannt und wird als Naturton im Alphorn erzeugt. Drei Oktaven tiefer als *fa''* liegt der Ton *Fa*, der die Frequenz $11 \cdot 24/8 = 33$ hat. Er liegt also höher als das diatonische *F* mit der Frequenz 32.

Nun merkt man sofort, dass die Töne *F* und *A* und ihre höheren Oktavierungen in der Teiltonreihe gar nie auftreten können, denn sie sind die einzigen, deren Frequenz in unseren willkürlichen Einheiten keinen Faktor 3 enthalten. Alle Vielfachen von 24 — die Frequenzen der Teiltöne von *C* — enthalten aber diesen Faktor 3, den man mit der Oktavierung nicht mehr los wird. So muss man denn zur Herleitung der diatonischen Tonleiter bei einem unschönen Kunstgriff Zuflucht nehmen: Man lässt die störenden Teiltöne (7., 11., 13. und 14.) einfach weg oder biegt sie zu den Tönen *b'* (als 4. Ton in der diatonischen Tonleiter von *F* aus), *f''*, *a''* und *b''* zurecht.

Vor diesem ästhetisch unbefriedigenden Hintergrund habe ich nach einer anderen Möglichkeit gesucht, die exakten Frequenzen plausibel herzuleiten. Dazu habe ich folgende drei Axiome gesetzt:

1. Axiom: **Aller guten Dinge sind drei.** Wir wollen mit drei über die Teiltonreihe möglichst nahe verwandten, aber doch verschiedenen Tönen als Grundtönen beginnen.
2. Axiom: **Oktavierung.** Töne, deren Saitenlängen oder Frequenzen durch Division oder Multiplikation mit einer Zweierpotenz auseinander hervorgehen, erachten wir als gleich und erhalten den gleichen Buchstaben als Namen.
3. Axiom: **Senarius.** Nur jene Teiltöne sind hörbar, die innerhalb des Senarius liegen, was bedeutet, dass wir nur die ersten 6 Teiltöne als hörbar akzeptieren.

Wir starten mit einer Saite die dem Grundton *c'* entsprechen soll. Durch Halbieren der Saite erhalten wir wegen

dem 2. Axiom keinen neuen Ton, obgleich es sich natürlich um den Ton c'' handelt. Also dritteln wir die Saite und erhalten so den ersten neuen Ton, unseren zweiten Ton g'' . Nun wollen wir einen dritten, tieferen Ton konstruieren und müssen daher die Saitenlänge vervielfachen (man begibt sich also in die primär physikalisch nicht beobachtbare Untertonreihe); gewitzigt durch die soeben gemachte Erfahrung werden wir die ursprüngliche Saite nicht verdoppeln sondern verdreifachen. So erhalten wir den Ton F . Damit ist der ursprüngliche Ton c' natürlich der 3. Teilton von F , was physikalisch wiederum beobachtbar ist. Durch Oktavierung wollen wir nun alle Töne in den Bereich einer einzigen Oktave zwischen c' und c'' legen. Der ursprüngliche Ton c' soll also die (erneut willkürliche) Frequenz 1 besitzen, dann hat der zweite Ton g'' die Frequenz 3 und der reduzierte Ton g' die halbe Frequenz $3/2$. Der dritte Ton F hat die Frequenz $1/3$, woraus sich für den zwei Oktaven höher liegenden Ton f' die vierfache Frequenz $4/3$ ergibt.

Über den nun erhaltenen drei Grundtönen c' , f' und g' konstruieren wir jetzt je den Senarius und berechnen die zugehörigen oktavierten Frequenzen. Vom Senarius sind nur der 3. Teilton (die Quinte) und der 5. Teilton (die grosse Terz) relevant, weil die übrigen Töne mit ihren geraden Nummern bereits bekannte Töne liefern. Mit anderen Worten: Wir errichten über den drei Grundtönen c' , f' und g' je den Durdreiklang. Von c' mit der Frequenz 1 ergeben sich zunächst der Ton g'' , den wir bereits kennen, und der Ton e''' , dessen Frequenz also 5 beträgt. Damit erhalten wir zwei Oktaven tiefer den Ton e' mit der Frequenz $5/4$. Der Dreiklang über f' mit Frequenz $4/3$ ergibt zuerst den Ton mit der dreifachen Frequenz 4, was wieder einen bekannten Ton — nämlich den Ton c''' — bedeutet, und den Ton a''' mit der fünffachen Frequenz $5 \cdot 4/3 = 20/3$. Durch Vierteln dieser Frequenz erhalten wir a' mit der Frequenz $5/3$. Schliesslich errichten wir den Durdreiklang über dem Ton g' mit der Frequenz $3/2$ und erhalten mit der dreifachen Frequenz $9/2$ den Ton d''' mit der fünffachen Frequenz $15/2$ den Ton h''' . Daraus erhalten wir je zwei Oktaven tiefer die Töne d' mit der Frequenz $9/8$ und h' mit der Frequenz $15/8$. Tragen wir alles in der folgenden Tabelle zusammen. Dabei ist auch der Kehrwert der Frequenz angegeben, der einer relativen Saitenlänge entspricht. Die mit 180 multiplizierten relativen Saitenlängen kann man also also Orte für die Stege einer „Gitarre“ interpretiert werden, deren Saiten 180 Einheiten lang sind.

| Ton | c' | d' | e' | f' | g' | a' | h' | c'' |
|--|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| Relative Frequenz | 1 | $9/8$ | $5/4$ | $4/3$ | $3/2$ | $5/3$ | $15/8$ | 2 |
| Mit 24 multiplizierte Frequenz | 24 | 27 | 30 | 32 | 36 | 40 | 45 | 48 |
| Relative Saitenlänge als Kehrwert der Frequenz | 1 | $8/9$ | $4/5$ | $3/4$ | $2/3$ | $3/5$ | $8/15$ | $1/2$ |
| Mit 180 erweiterte Saitenlänge | 180 | 160 | 144 | 135 | 120 | 108 | 96 | 90 |

Nebenbei bemerkt hat uns das 1. Axiom auf die drei wichtigen Grundtöne c' , f' und g' geführt, welche zusammen mit dem je darauf aufgebauten Durdreiklang den drei Stufen Tonika, Subdominante und Dominante entsprechen, die in der abendländischen Musik als Kadenz bezeichnet werden.

Durch Bilden von Quotienten aufeinander folgender Frequenzen ergeben sich die bekannten Intervalle der diatonischen Durtonleiter:

| Intervall | $c' - d'$ | $d' - e'$ | $e' - f'$ | $f' - g'$ | $g' - a'$ | $a' - h'$ | $h' - c''$ |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Frequenzverhältnis | $9/8$ | $10/9$ | $16/15$ | $9/8$ | $10/9$ | $9/8$ | $16/15$ |

Man erkennt hier die überraschende Tatsache, dass es nur drei verschiedene Intervalle gibt: Den grossen Ganzton mit dem Frequenzverhältnis $9/8$, den kleinen Ganzton mit dem Frequenzverhältnis $10/9$ und den Halbton mit dem Frequenzverhältnis $16/15$. Daraus können nun zwei interessante Tatsachen abgeleitet werden, die hier nicht vertieft werden sollen:

1. Dem Aneinanderhängen (Addition) von benachbarten Intervallen entspricht die Multiplikation der zugehörigen Frequenzverhältnisse. Untersucht man nun, was das Aneinanderhängen von zwei Halbtönen ergibt, stellt man fest, dass sie zusammen etwas mehr als einen grossen Ganzton ausmachen:

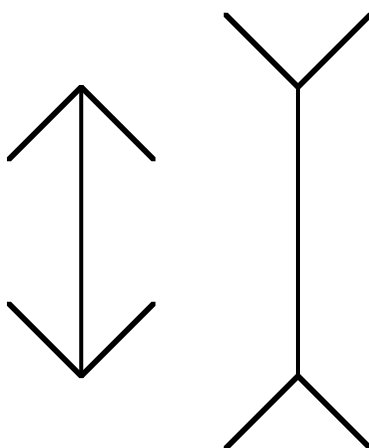
$$(16/15)^2 \gtrsim 9/8$$

So kommt man auf die Idee, den Umfang einer ganzen Oktave mit ihren 5 Ganzton- und 2 Halbtonschritten in insgesamt 12 gleiche Intervalle mit dem Frequenzverhältnis x zu unterteilen. Daher erhält man die Bedingung $x^{12} = 2$ und daraus das berühmte Frequenzverhältnis $x = \sqrt[12]{2}$ für den sogenannten wohltemperierten Halbton. Es gleicht einem Wunder, dass die Tonleiter bestehend aus 12 wohltemperierten Halbtönen die 7 Töne der diatonischen Tonleiter recht genau trifft. (Man hat einfach fünf neue Töne eingefügt, die den schwarzen Tasten auf dem Klavier entsprechen.) Jedenfalls kann das Ohr die wohltemperiert gespielten Töne durchaus als diatonische zurechthören. Ohne diese Tatsache gäbe es nicht die 12 verschiedenen Dur-Tonleitern, welche von jeder der 12 Stufen $c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b, h$ aus gespielt werden können.

2. Das Zurechthören unserer Ohren und unseres Gehirns funktioniert in überraschender Art so, dass wir sogar in der Lage sind, den grossen Ganztonschritt vom kleinen Ganztonschritt zu unterscheiden, selbst wenn dieselben Töne auf einem wohltemperiert gestimmten Klavier gespielt werden. Das folgende Notenbeispiel zeigt in der obersten Melodiestimme jeweils den Schritt vom Ton c'' zum Ton d'' . Nun sind aber die begleitenden Akkorde so gelegt, dass im ersten Takt, dieser Schritt als Schritt vom Grundton zum zweiten Ton der diatonischen Tonleiter und damit als Frequenzverhältnis $9/8$ interpretiert werden muss. Im zweiten Takt dagegen bewegen wir uns in F -dur und machen dort den Schritt von der Tonika zur Subdominanten. Damit interpretieren wir den Schritt von c'' nach d'' als Schritt vom 5. zum 6. Ton der diatonischen Tonleiter, welcher — gemäss obiger Tabelle — einem kleinen Ganzton mit dem Verhältnis $10/9$ entspricht. Ein geschultes Ohr hört also verschiedene Intervalle, obwohl die gleichen Töne c'' und d'' gespielt werden.



Dass die Wahrnehmung durchaus von der physikalischen Realität verschieden sein kann, ist ein Phänomen, das wir aus der Geometrie und der Wahrnehmung durch das Auge bereits kennen: In der folgenden Figur sind die beiden vertikalen Strecken gleich lang, erscheinen aber als verschieden lang.



Logik? – Logisch! (Teil 2)

Armin P. Barth

3 Prädikatenlogik. Aufbau einer formalen Sprache

Abraham Lincoln sagte einmal: *It is true that you may fool all the people some of the time; you can even fool some of the people all the time; but you can't fool all of the people all the time.*¹

Es lässt sich leicht einsehen, dass die Aussagenlogik nicht stark genug ist, um diese Aussage zu formalisieren. Sie stellt nur plumpe Aussagen zur Verfügung, die dann mittels der fünf oben besprochenen Junktoren verknüpft werden dürfen. Damit lässt sich aber nicht ausdrücken, dass es *einige* Menschen gibt, die zu *allen* Zeitpunkten für dumm verkauft werden können. Wir brauchen, wollen wir anspruchsvollere Aussagen formalisieren, eine bessere Logik. Wir benötigen zum Beispiel Variablen x und t , die aus der Menge aller Menschen respektive aus der Menge aller Zeiten schöpfen. Und wir benötigen ein Prädikat (eine Relation) $P(x)$, das erfüllt ist, wenn x eine Person bedeutet, und weiter ein Prädikat $Z(t)$, das erfüllt ist, wenn t eine Zeit bedeutet, und schliesslich ein zweistelliges Prädikat $D(x,t)$, das erfüllt ist, wenn Person x zur Zeit t für dumm verkauft wird. Dann kann der erste Satz des Lincoln-Zitates so formalisiert werden:

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists t(Z(t) \wedge D(x,t)))$$

Dabei steht \forall für „für alle“ und \exists für „es existiert ein“. Erst mit diesen zusätzlichen Elementen wird die logische Sprache stark genug, um die meisten Aussagen ausdrücken zu können, denen Mathematiker bei ihrem alltäglichen Tun begegnen. Wir sehen uns daher veranlasst, im Folgenden den syntaktischen Aufbau der viel reichhaltigeren Sprache der *Prädikatenlogik* aufzubauen. Ist das einmal geschehen, fügen wir auch noch eine Semantik bei, die klären wird, was es bedeuten soll, dass eine Aussagen „gilt“. Danach loten wir die Möglichkeiten und Beschränkungen dieser neuen Sprache aus und widmen uns den faszinierenden Entdeckungen von Kurt Gödel aus dem Jahr 1931.

3.1 formale Sprache

Gegenüber der Aussagenlogik muss hier der Zeichensatz natürlich erweitert werden. Wir beschränken uns wiederum auf ein Minimum an Symbolen:

| | | | | | | |
|-----------------|--------|----------|-----------|--------|----------|-----------|
| Der Zeichensatz | \neg | \wedge | \forall | $=$ | $()$ | ' |
| | nicht | und | für alle | gleich | Klammern | Apostroph |

Wiederum benutzen wir auch andere Zeichen gerne und zwar als Abkürzungen:

| | | |
|-----------------------------|-------------------|--|
| $\Phi \vee \Psi$ | als Abkürzung für | $\neg(\neg\Phi \wedge \neg\Psi)$ |
| $\Phi \rightarrow \Psi$ | als Abkürzung für | $\neg\Phi \vee \Psi$ |
| $\Phi \leftrightarrow \Psi$ | als Abkürzung für | $(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$ |
| $\exists xP(x)$ | als Abkürzung für | $\neg\forall x(\neg P(x))$ |
| $x \neq y$ | als Abkürzung für | $\neg(x = y)$ |

¹ zitiert aus: P. K. Stockmeyer, „What did Lincoln really mean?“, in: The College Mathematics Journal, Vol. 35, No. 2, 2004, p. 103

Zudem benötigen wir Variablen als Platzhalter für Individuen, Prädikate als Eigenschaften von Individuen und Funktionen, die Individuen neue Individuen zuweisen. Genauer:

- Wir führen eine Menge *Var* von *Variablen* ein, die wir mit x, x', x'', \dots oder – im Sinne einer Abkürzung – mit x, y, z, \dots (oder auch indiziert) bezeichnen.
- Wir führen eine endliche Menge *Präd* von *Prädikaten* ein. *Präd* enthält also Prädikate $P_i(\dots)$, wobei i eine endliche Indexmenge I durchläuft und eine Stellenzahlfunktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{N}$ jedem Prädikat seine Stellenzahl $\lambda(i)$ zuordnet.
- Wir führen weiter eine endliche Menge *Funk* von *Funktionen* ein. *Funk* enthält also Funktionen $f_j(\dots)$, wobei j eine endliche Indexmenge J durchläuft und eine Stellenzahlfunktion $\mu : J \rightarrow \mathbb{N}$ jeder Funktion ihre Stellenzahl $\mu(j)$ zuordnet.
- 0-stellige Funktionen wollen wir *Konstanten* nennen, und wir notieren sie so: c_k , wobei k eine Indexmenge K durchläuft.

Bei obigem Lincoln-Zitat etwa hatten wir keine Funktion, aber drei Prädikate benutzt, zwei einstellige und ein zweistelliges. Zum Aufbau einer formalen Sprache gehört es, dass man ganz präzise festlegt, was korrekt gebildete Terme, Formeln und Aussagen sind. Das wollen wir als nächstes in Angriff nehmen:

Definition: Alle Variablen und Konstanten sind *Terme*. Sind $\tau_1, \dots, \tau_{\mu(j)}$ schon Terme, so ist auch $f_j(\tau_1, \dots, \tau_{\mu(j)})$ ein Term. Nichts sonst ist ein Term. Mit *TM* bezeichnen wir die Menge aller Terme.

Es ist klar, dass wir damit genau unsere alltägliche Vorstellung von Termen realisiert haben. Immer neue Terme entstehen ja aus Variablen und Konstanten dadurch, dass man diese irgendwelchen Funktionen unterwirft und so neue Terme erzeugt. Auch bei der Definition von Formeln lassen wir uns wieder vom Alltag leiten:

Definition:

- Sind σ und τ Terme, so ist $\sigma = \tau$ eine *Formel*.
- Sind $\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)}$ Terme, so ist $P_i(\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)})$ eine *Formel*.
Formeln vom Typ i. und ii. heissen *Primformeln*.
- Sind Φ und Ψ Formeln, so sind auch $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$, $\exists x\Phi$ und $\forall x\Phi$ Formeln.
- Nichts sonst ist eine Formel.

Mit *FML* bezeichnen wir die Menge aller Formeln.

Zur Vereinfachung erlauben wir uns immer wieder Abkürzungen wie zum Beispiel $\forall x, y, z$ statt $\forall x \forall y \forall z$ oder $\exists x, y, z$ statt $\exists x \exists y \exists z$ oder $\tau_1 P_i \tau_2$ statt $P_i(\tau_1, \tau_2)$ usw. Wenn wir uns noch einmal das Lincoln-Zitat vor Augen führen, so fällt auf, dass sich das auch anders verstehen lässt. Unsere erste Formalisierung war ja

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists t (Z(t) \wedge D(x, t)))$$

Der erste Satz des Zitates könnte aber – obwohl wenig wahrscheinlich – auch so verstanden werden, dass es einen speziellen Zeitpunkt gibt, an dem alle Menschen gleichzeitig für dumm verkauft werden können. Dann allerdings lautet die Formalisierung so:

$$\exists t (Z(t) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow D(x, t)))$$

Was immer Lincoln sagen wollte, beides sind Beispiele korrekt gebildeter Formeln der Prädikatenlogik.

Unser nächstes Ziel ist es, *Aussagen* zu definieren. Dazu lohnt sich ein Vorüberlegung: Die Formel (1) $x^2 + 7x + 5 = 0$ entspricht nicht unserer intuitiven Vorstellung einer Aussage, da sie nicht entweder wahr oder falsch ist. Der Wahrheitswert hängt von der Zahl ab, die wir in die Variable einzusetzen gedenken. Hingegen sind die Formeln (2) $\forall x, y (x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y))$ und (3) $\forall x, y (x^2 + y^2 = (x + y)^2)$ Aussagen im intuitiven Sinn, (2) eine wahr und (3) eine falsche, falls wir an den Individuenbereich \mathbb{R} denken. Der Unterschied zwischen (1) und (2)&(3) liegt darin, dass in (1) die Variable x „frei“ (nämlich nicht an einen Quantor gebunden) vorkommt, während die Variablen in (2)&(3) „gebunden“ sind. Das macht die nächste Definition verständlich:

Definition: In den Formeln $\forall x(\Phi)$ und $\exists x(\Phi)$ heisst Φ *Wirkungsbereich* des Quantors \forall bzw. \exists . Eine Variable x in der Formel Φ heisst *gebunden*, wenn sie sich im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ befindet, sonst *frei*.

Eine *Aussage* ist eine Formel ohne freie Variablen. Mit *AUS* bezeichnen wir die Menge aller Aussagen.

In der Formel $\forall x(x < 0 \rightarrow x < y) \wedge \exists z((0 < z) \wedge (z < x))$ beispielsweise ist x in der linken Klammer gebunden und in der rechten frei, während y in der ganzen Formel frei und z in der ganze Formel gebunden ist. Insbesondere ist die Formel also keine Aussage.

Als nächstes führen wir noch zwei Konzepte ein, die wichtig sein werden: die *Substitution* und die *Sprache*.

Im mathematischen Alltag ist es überaus häufig, dass man für Variablen in Formeln irgendwelche Terme einsetzt; selbstredend ersetzt man dann jedes Vorkommen der Variablen durch denselben Term. Dieses Konzept wollen wir hier abbilden. Der Punkt ist, dass wir nur in eine freie Variable einsetzen sollten. Wir sollten unser Augenmerk überdies auf die Tatsache richten, dass bei der Substitution einer freien Variablen durch einen Term es durchaus passieren kann, dass eine im Term enthaltene Variable neu in den Wirkungsbereich eines Quantors gelangt. Ersetzen wir zum Beispiel in $\exists y(x < y)$ die freie Variable x durch einen Term, der y enthält, so gerät y in den Wirkungsbereich des Quantors. In der folgenden Definition tragen wir diesem Fall Rechnung:

Definition: Mit $\Phi(x|\tau)$ bezeichnen wir diejenige Formel, die man aus der Formel Φ erhält, wenn man jedes freie Vorkommen der Variablen x durch den Term τ ersetzt. Der Term τ heisst *frei für x in Φ* , falls durch diese Ersetzung keine Variable von τ in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät.

Die oben eingeführten Begriffe der formalen Sprache hängen ganz wesentlich ab von den beiden Stellenzahlfunktionen $\lambda : I \rightarrow \mathbb{N}$ und $\mu : J \rightarrow \mathbb{N}$ sowie der Indexmenge K der Konstanten. In diesen „Dingen“ bündelt sich gewissermassen der reale Weltausschnitt, der durch die formale Sprache abgebildet werden soll. Da der gesamte Sprachaufbau vom Tripel (y, μ, K) abhängt, wollen wir dieses Tripel eine *Sprache* nennen:

Definition: Das Tripel $L := (\lambda, \mu, K)$ nennen wir *Sprache*. Wir schreiben $TM(L)$, $FML(L)$ und $AUS(L)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.

3.2 formale Beweise

Die Beschäftigung mit Logik ist darum so wichtig, weil sie jeglichem mathematischen Tun zu Grunde liegt. Wenn wir in irgendeiner mathematischen Theorie arbeiten, befolgen wir nebst den theoriespezifischen Sätzen und Axiomen immer auch die Regeln der Logik; die Logik ist die Begleiterin jeder anderen mathematischen Theorie. Die nun folgende Definition eines formalen Beweises muss dem Rechnung tragen, das heisst, unsere formale Sprache muss nebst den logischen Axiomen immer auch eine Menge von theoriespezifischen Formeln (das zu diesem Zeitpunkt bereits gesicherte Wissen der Theorie) bereitstellen. Formale Beweise basieren also letztlich auf logischen Axiomen, logischen Schlussregeln sowie dem Fundament der Theorie. Um die Axiome und Schlussregeln der Prädikatenlogik wollen wir uns nun zuerst kümmern.

Die logischen Axiome enthalten einerseits Axiome der Aussagenlogik und andererseits quantorenlogische Axiome. Bei der Aussagenlogik könnten wir uns für das Axiomensystem aus Kapitel 2.3 entscheiden, wir können uns das Leben aber auch erleichtern, wenn wir gleich alle Tautologien als Axiome zulassen. Dies wird ja durch die semantische Vollständigkeit der Aussagenlogik gerechtfertigt. Sollten wir bei irgendeinem Beweis eine aussagenlogische Tautologie verwenden, ist es praktisch, diese als Axiom zur Verfügung zu haben, anstatt sie erst aus den Axiomen der Aussagenlogik herleiten zu müssen. Als Axiome unserer formalen Sprache wählen wir diese:

| Logische Axiome | |
|--------------------------|--|
| Axiome der Aussagenlogik | Alle Tautologien |
| Quantorenlogische Axiome | (Q1) $\forall x\Phi(x) \rightarrow \Phi(\tau)$, falls τ frei für x in Φ ist. (Q2) $\forall x(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \forall x\Psi)$, falls x nicht frei in Φ . (Q3) $\Phi(\tau) \rightarrow \exists x\Phi(x)$ (Q4) $\exists x\Phi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\Phi(x)$ |

| | |
|---------------------------|--|
| Identitätslogische Axiome | (I1) $x = x$ (Reflexivität) (I2) $(x = y) \rightarrow (y = x)$ (Symmetrie) (I3) $(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$ (Transitivität) (I4) $(x = y) \rightarrow (P_i(\dots, x, \dots) \rightarrow P_i(\dots, y, \dots))$ (I5) $(x = y) \rightarrow f_j(\dots, x, \dots) = f_j(\dots, y, \dots)$ |
|---------------------------|--|

Je ein Beispiel soll die ersten beiden quantorenlogischen Axiome illustrieren: Eine Anwendung von (Q1) ist etwa $\forall x(x^2 \geq 0) \rightarrow (t^2 \geq 0)$. Wenn ja für *alle* Individuen x die Ungleichung $x^2 \geq 0$ gilt, so sicher auch für ein spezielles. Bei (Q2) ist es wichtig, dass x nicht frei in Φ vorkommt. Es darf entweder gar nicht oder nur gebunden erscheinen, da es sonst in der Konklusion plötzlich des Quantors entrissen ist. Die Formel $\forall y(\forall x(y > 0 \rightarrow x + y > x)) \rightarrow \forall y(y > 0 \rightarrow \forall x(x + y > x))$ ist ein Beispiel einer Anwendung von (Q2).

All dies sind die logischen Axiome. Hat man irgendeine spezielle mathematische Theorie im Auge (Gruppentheorie, Arithmetik, Geometrie,...), die man mit Hilfe der Prädikatenlogik untersuchen will, so benötigt man natürlich weitere theoriespezifische Axiome und Sätze; die Menge dieser bezeichnen wir im Folgenden mit Σ .

Als Schlussregeln wollen wir hier wiederum die „Einsetzregel“ und den „modus ponens“ (wie schon in der Aussagenlogik) sowie die „Generalisierungsregel“ (GN) verwenden:

| | | |
|-----------------------------------|--|-------------------------------------|
| Einsetzregel | Φ $\Phi \rightarrow \Psi$ -----(MP) Ψ | Φ --(GN) $\forall x\Phi$ |
| Schlussregeln der Prädikatenlogik | | |

Nun sind wir endlich in der Lage, ganz klar zu sagen, was ein Beweis ist:

Definition: Sei $\Psi \in FML(L)$. Ein *Beweis* von Ψ ist eine Folge $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Psi$ von Formeln, wobei jede Formel entweder ein logisches Axiom ist, aus Σ stammt oder aus einer bzw. zwei früheren Formeln durch Anwendung einer der Schlussregeln entstanden ist. Und wir schreiben: $\boxed{\Sigma \vdash \Psi}$.

Wenn beispielsweise $\Phi \wedge \Psi$ schon zu unseren gesicherten Erkenntnissen aus Σ gehört, dann ist diese Folge ein Beweis von Φ :

$$\Phi \wedge \Psi, (\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi, \Phi$$

Die erste Formel stammt ja aus Σ , die zweite ist eine Tautologie, und die dritte entsteht aus den beiden ersten durch MP. Wenn beispielsweise $\Phi \rightarrow \Psi$ und $\Psi \rightarrow \Xi$ schon zu unseren gesicherten Erkenntnissen aus Σ gehören, so ist diese Folge ein Beweis von $\Phi \rightarrow \Xi$:

$$\Phi \rightarrow \Psi, (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Xi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Xi)), (\Psi \rightarrow \Xi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Xi), \Psi \rightarrow \Xi, \Phi \rightarrow \Xi$$

Die erste Formel entstammt Σ , die zweite ist eine Tautologie, die dritte entsteht durch MP, die vierte entstammt Σ , und die letzte entsteht wiederum durch MP.

Als eine weitere Illustration des formalen Beweisens betrachten wir noch den folgenden Satz:

| | |
|---------------------------|--|
| Satz (Deduktionstheorem): | Sei $\Sigma \subset FML(L)$ und seien $\Phi, \Psi \in FML(L)$ Dann gilt: $\Sigma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi) \Rightarrow \Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ Die Umkehrung gilt auch, falls Φ eine Aussage ist. |
|---------------------------|--|

Der Beweis von " \Rightarrow " ist elementar: Angenommen, wir verfügen schon über einen Beweis von $\Phi \rightarrow \Psi$ aus Σ . Wir haben also eine Formelfolge vor uns, deren letztes Element $\Phi \rightarrow \Psi$ ist. Wir verlängern diesen Beweis einfach um Φ , Ψ (wobei wir den MP einsetzen), und schon haben wir einen Beweis von Ψ aus $\Sigma \cup \{\Phi\}$. Der Beweis der Umkehrung ist sehr viel trickreicher und kann etwa mit vollständiger Induktion nach der Länge des Beweises von Ψ aus $\Sigma \cup \{\Phi\}$ bewiesen werden.

3.3 Semantische Vollständigkeit des Beweisbegriffs

Bisher ist unsere formale Logik eine funktionstüchtige Maschine, die aber völlig losgelöst von realer Mathematik läuft. Es wurde kein Wort darüber gesagt, was unsere Formeln in realen Weltausschnitten bedeuten und ob sie gelten – und was das überhaupt heissen soll. G. I. Ruzavin schreibt: *Die Frage der Wahrheit eines formalen Systems ist ohne eine entsprechende Interpretation nicht zu lösen. Solche Interpretationen sind (...) für die Mathematik von Lebensinteresse, denn wenn sich ein System nicht für ernsthafte Zwecke eignet, wird sich kein Mathematiker dafür interessieren. Um eine Interpretation eines Axiomensystems oder Kalküls zu erhalten, müssen wir den Grundbegriffe oder primitiven Termen eine bestimmte Bedeutung zuordnen. Innerhalb des Axiomensystems selbst bleibt diese Bedeutung, wie wir bereits wissen, völlig unbestimmt.*²

Das Bindeglied zwischen einem abstrakten Logikkalkül und einer konkreten mathematischen Struktur ist die sog. *Interpretation*. Durch sie wird ein konkreter Bereich (sog. Individuenbereich) von Dingen (Zahlen, Mengen, Punkte, Gruppen,...) festgelegt, auf den sich die Variablen des Kalküls beziehen. Ferner werden den Kalkülkonstanten „reale“ Konstanten aus diesem Bereich, den abstrakten Kalkülprädikaten und -funktionen „reale“ Prädikate zwischen und Funktionen mit den Individuen zugewiesen. Und den Formeln werden bestimmte Wahrheitswerte zugeordnet, so dass es sinnvoll wird zu sagen, dass etwas „gilt“. Wir geben sofort ein Beispiel:

Angenommen, wir spezifizieren die Sprache L wie folgt: $L = (\lambda, \mu, K)$ mit $\lambda : I = \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\lambda(1) = 2$, ferner $\mu : J = \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = 2$ und schliesslich $K = \{1, 2\}$. Einfacher gesagt: Wir haben also ein zweistelliges Prädikat, drei zweistellige Funktionen sowie zwei Konstanten. Diese Sprache kann leicht in einem realen Weltausschnitt interpretiert werden, indem wir zum Beispiel den Individuenbereich \mathbb{R} betrachten und darin die beiden Konstanten 0 und 1, die Relation $<$ und die drei Funktionen $+$, $-$, \cdot . Diese Interpretation liefert somit die konkrete Struktur $\langle \mathbb{R}; <, +, -, \cdot; 0, 1 \rangle$ des *angeordneten Körpers der reellen Zahlen*. Wenn wir (nebst den Axiomen der Prädikatenlogik) nun noch die strukturspezifischen Axiome über Anordnung und die Körperaxiome in Σ versammeln, so ist die Interpretation abgeschlossen.

Nach erfolgter Interpretation der Sprache in einer konkreten Struktur können wir sagen, was es heissen soll, dass eine Aussage „gilt“. Es bedeutet nämlich, dass die in der Aussage behauptete formale Eigenschaft für die Individuen der realen Struktur tatsächlich zutrifft. Das soll in den nächsten Abschnitten präzisiert werden, indem wir näher auf Interpretationen, Strukturen, Modelle und Gültigkeit eingehen. Belohnt werden wir hinterher durch einen berühmten Satz von Gödel.

Definition: Unter einer *Interpretation* einer Sprache $L = (\lambda, \mu, K)$ der Prädikatenlogik versteht man

- die Zuordnung eines konkreten Individuenbereichs $|\Omega|$
- zu jeder Konstanten c_k die Zuordnung einer „realen“ Konstanten $c_k^\Omega \in |\Omega|$
- zu jedem Prädikat P_i die Zuordnung eines $\lambda(i)$ -stelligen „realen“ Prädikates P_i^Ω über $|\Omega|$
- zu jeder Funktion f_j die Zuordnung einer $\mu(j)$ -stelligen „realen“ Funktion f_j^Ω über $|\Omega|$
- zu jeder Formel die Zuordnung eines Wahrheitswertes nach bestimmten Regeln (siehe unten).

Das Quadrupel $\Omega := \left(|\Omega|; (P_i^\Omega)_{i \in I}; (f_j^\Omega)_{j \in J}; (c_k^\Omega)_{k \in K} \right)$ heisst *L-Struktur*.

Bei der Aussagenlogik schmilzt diese Liste natürlich auf den ersten und letzten Punkt zusammen, da dort nur interpretierbare Aussagen und ihre Wahrheitswerte eine Rolle spielen. Durch die Interpretation wird nun jedem prädikatenlogischen Term τ und jeder Formel Φ ein „realer“ (interpretierter) Term τ^Ω und eine „reale“ Formel Φ^Ω zugeordnet. Die Definition der Gültigkeit einer Formel wird natürlich vom intuitiven Verständnis von Gültigkeit geleitet. Eine Formel ist doch dann gültig, wenn man alle möglichen Elemente des Individuenbe-

²G. I. Ruzavin, „Die Natur der mathematischen Erkenntnis“, Akademie-Verlag, Berlin, 1977, p.147

reichs einsetzen kann und „es stimmt“ jedes Mal. Genau das sollte unsere nächste Definition leisten:

Definition: Eine Abbildung b , die jeder prädikatenlogischen Variablen ein Element des Individuenbereichs $|\Omega|$ zuordnet, heisst *Belegung*. Die *Belegung eines Terms* kann rekursiv definiert werden:

$$c_k^\Omega [b] := c_k^\Omega \quad (\text{Eine Konstante bleibt natürlich unverändert.})$$

$$x^\Omega [b] := b(x) \quad (\text{für alle Variablen})$$

$$f_j^\Omega (\tau_1^\Omega, \dots, \tau_{\mu(j)}^\Omega) [b] := f_j^\Omega (\tau_1^\Omega [b], \dots, \tau_{\mu(j)}^\Omega [b]) \quad (\text{für alle Funktionen})$$

Speziell meinen wir mit $b \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$ die Belegung, die für alle Variablen ausser x genau so wirkt, wie b , aber der Variablen x das Individuum a zuordnet.

Nun lässt sich ganz präzise sagen, was es heissen soll, dass eine Formel in einer Struktur gilt. Sie gilt, wenn sie bei jeder möglichen Belegung gilt, und dies wiederum kann rekursiv erklärt werden. Alle Details sind in folgender Definition zusammengefasst:

Definition: Eine prädikatenlogische Formel Φ *gilt* in der Struktur Ω , in Zeichen: $\boxed{\Omega \models \Phi}$, wenn sie in Ω bei jeder möglichen Belegung b gilt, in Zeichen: $\Omega \models \Phi [b]$. Die *Gültigkeit der Formel bei einer Belegung b* wiederum kann rekursiv über den Aufbau einer Formel definiert werden:

$$\Omega \models (\sigma = \tau) [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \sigma^\Omega [b] = \tau^\Omega [b]$$

$$\Omega \models P_i (\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)}) [b] \quad :\Leftrightarrow \quad P_i^\Omega (\tau_1^\Omega [b], \dots, \tau_{\lambda(i)}^\Omega [b])$$

$$\Omega \models \neg \Phi [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \Omega \not\models \Phi [b]$$

$$\Omega \models \forall x \Phi [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \Omega \models \Phi \left[b \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right] \quad \text{für alle } a \in |\Omega|$$

usw. über den ganzen Aufbau einer Formel.

Eine prädikatenlogische Formel heisst *allgemeingültig*, wenn sie unter jeder möglichen Interpretation gilt.

Wir interpretieren unsere formale Sprache noch einmal in der Struktur $R := \langle \mathbb{R}; <; +, -, \cdot; 0, 1 \rangle$ mit einem zweistelligen Prädikat $P_1(\dots, \dots)$, drei zweistelligen Funktionen f_1, f_2, f_3 und zwei Konstanten c_1 und c_2 . Eine Formel in der formalen Sprache könnte etwa so lauten: $\Phi := \forall x (P_1(c_1, x) \wedge P_1(x, c_2))$. Zu prüfen, ob diese Formel gilt, heisst nun, sie innerhalb der Struktur zu interpretieren. Dabei gehen die Konstanten über in $c_1^R = 0$ und $c_2^R = 1$, und das Prädikat geht über in $P_1^R = "<"$. Die Formel gilt, wenn sie unter jeder Belegung b gilt, wenn also für jede reelle Zahl a , mit der man die Variable x belegt, gilt, dass $(0 < a) \wedge (a < 1)$. Das trifft nicht zu, also gilt die Formel in dieser Struktur nicht. Insbesondere ist sie nicht allgemeingültig.

Ein weiterer wichtiger Begriff in der Semantik ist der des Modells:

Definition: Eine L -Struktur $\Omega := \left\langle |\Omega|; (P_i^\Omega)_{i \in I}; (f_j^\Omega)_{j \in J}; (c_k^\Omega)_{k \in K} \right\rangle$ heisst ein *Modell* von $\Sigma \subset \text{AUS}(L)$, falls $\Omega \models \Phi$ für alle Aussagen $\Phi \in \Sigma$, wenn also alle Aussagen von Σ in dieser Struktur gelten.

Modelle werden unter anderem dazu benutzt, die *Widerspruchsfreiheit* und *Unabhängigkeit* von Axiomensystemen einzusehen. Um die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems Σ aufzuzeigen, muss ein Modell für Σ gefunden werden, ein „Stück Wirklichkeit“, das genau nach den Regeln von Σ funktioniert. Dieses ist aus den Objekten einer Theorie aufgebaut, an deren Widerspruchsfreiheit eigentlich niemand zweifelt. Trotzdem ist ein solcher Beweis immer nur relativ, da man sich jetzt ja fragen muss, ob diese Theorie wirklich widerspruchsfrei ist. Letztlich lassen sich alle mathematischen Theorien auf die Mengenlehre zurückführen. Die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre lässt sich aber nicht durch Aufzeigen einer noch grundlegenderen Struktur als Modell nachweisen; ein Beweis der Widerspruchsfreiheit müsste direkt geschehen.

Um die Unabhängigkeit eines bestimmten Axioms von anderen zu zeigen, müssen zwei Strukturen Ω_1, Ω_2 angegeben werden, wobei Ω_1 ein Modell dieses Axioms sowie der anderen Axiome und Ω_2 ebenfalls ein Modell

der anderen Axiome sowie der Negation des in Frage stehenden Axioms ist. Nachdem zahlreiche Mathematiker Euklids Axiomensystem der Geometrie „berichtigen“ wollten, indem sie versuchten, das Parallelenaxiom aus den restlichen Axiomen herzuleiten, konnte man schliesslich die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen zeigen, als N. J. Lobačevskij und J. Bolyai ein Modell der nicht-Euklidischen Geometrie (alle Axiome der Euklidischen Geometrie ausser dem Parallelenaxiom plus die Negation des Parallelenaxioms) fanden. Gerade beim Parallelenaxiom war Euklid also im Recht.

Wir kennen nun also den Logikapparat der Prädikatenlogik und wissen, was unter einem formalen Beweis und was unter Gültigkeit zu verstehen ist. Die Frage drängt sich natürlich auf, wie gut denn unser formales System ist, das heisst ob

- (1) jede Aussage, die aus Σ innerhalb des Kalküls bewiesen werden kann, auch in jedem Modell von Σ gilt? Trifft das zu, so nennt man den Kalkül *korrekt*. Es muss betont werden, dass die ganze bisherige Arbeit vergeblich gewesen wäre, würde dies nicht zutreffen.
- (2) jede in jedem Modell von Σ gültige Aussage auch innerhalb des Kalküls bewiesen werden kann? Trifft das zu, so nennt man den Kalkül (*semantisch*) *vollständig*.

Es könnte ja immerhin sein, dass unser Beweisverfahren zu schwach ist, um alles, was gilt, zu beweisen. Es könnte ja eine ganz grundlegende Schlussregel fehlen, ohne die sich einfach nicht auskommen lässt. 1930 hat Kurt Gödel gezeigt, dass diese Sorge unbegründet ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz (Vollständigkeitssatz von Gödel, 1930):

1. Die Prädikatenlogik ist korrekt. Falls also $\Sigma \vdash \Phi$ für eine Aussage Φ , so gilt sie auch in jedem Modell von Σ .
2. Die Prädikatenlogik ist semantisch vollständig, d.h. ist $\Sigma \subset AUS(L)$ und $\Omega \models \Phi$ für alle Modelle Ω von Σ , so folgt: $\Sigma \vdash \Phi$.
M.a.W.: Aus $\Sigma \not\vdash \Phi$ folgt zwingend die Existenz eines Modells Ω von Σ mit $\Omega \not\models \Phi$.

Ein Beweis würde an dieser Stelle viel zu viel Platz rauben. Einer der berühmtesten Beweise geht auf L. Henkin zurück und benutzt die nach ihm benannte „Henkin-Erweiterung“. Wir können hier nur eine Umformulierung des Satzes vorschlagen, die den Beweis erleichtert. Zunächst definieren wir:

Definition: Eine Aussagenmenge $\Sigma \subset AUS(L)$ heisst (*syntaktisch*) *widerspruchsvoll*, falls es eine Aussage Φ gibt, so dass $\Sigma \vdash \Phi$ und $\Sigma \vdash \neg\Phi$. Anderenfalls heisst sie (*syntaktisch*) *widerspruchsfrei*.

Nun gilt:

- Lemma:
- (i) $\Sigma \subset AUS(L)$ (*syntaktisch*) widerspruchsvoll \Leftrightarrow Jede Aussage Ψ ist aus Σ beweisbar.
 - (ii) $\Sigma \vdash \Phi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ ist (*syntaktisch*) widerspruchsvoll
 - (iii) $\Sigma \not\vdash \Phi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ ist (*syntaktisch*) widerspruchsfrei

Das lässt sich ganz leicht einsehen:

Zu (i): Die Richtung " \Leftarrow " ist trivial. Sei also Σ (*syntaktisch*) widerspruchsvoll. Es gibt folglich eine Aussage Φ , so dass $\Sigma \vdash \Phi$ und auch $\Sigma \vdash \neg\Phi$. Wir hängen diese Beweise einfach zusammen und ergänzen die Formel-folge um die Tautologie $\Phi \rightarrow (\neg\Phi \rightarrow \Phi \wedge \neg\Phi)$, woraus sich dann mit doppeltem MP $\Phi \wedge \neg\Phi$ beweisen lässt. Mit der Tautologie $(\Phi \wedge \neg\Phi) \rightarrow \Psi$ und MP erhalten wir schliesslich Ψ .

Zu (ii) und (iii): In (ii) ist die Richtung " \Rightarrow " klar. Sei also $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ syntaktisch widerspruchsvoll. Nach (i) können wir dann alles beweisen, insbesondere Φ . Folglich haben wir $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \vdash \Phi$. Nach dem Deduktions-theorem folgt hieraus $\Sigma \vdash (\neg\Phi \rightarrow \Phi)$. Den Beweis von $\neg\Phi \rightarrow \Phi$ verlängern wir nun einfach um die Tautolo-gie $(\neg\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi$ und benutzen MP, um Φ zu erhalten. (iii) ist äquivalent zu (ii). \square

Damit erreichen wir nun folgende Umformulierung des Vollständigkeitssatzes: Wir wollen ja zeigen, dass aus $\Sigma \not\vdash \Phi$ zwingen die Existenz eines Modells von $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ folgt. Wegen Lemma (iii) können wir stattdessen zeigen, dass aus der (*syntaktischen*) Widerspruchsfreiheit von $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ die Existenz eines Modells von

$\Sigma \cup \{\neg, \Phi\}$ folgt. Noch einfacher müssen wir also „nur“ zeigen, dass die (syntaktische) Widerspruchsfreiheit *irgendeiner* Aussagenmenge zwingend die Existenz eines Modells dieser Aussagemenge nach sich zieht. Und eben dazu eignet sich zum Beispiel die „Henkin-Erweiterung“...

4. Die Unvollständigkeitssätze von Gödel

Die Jahre 1931 und 1936 brachten bedeutende Rückschläge für das Hilbert-Programm; es erwies sich danach als utopisch und unrealisierbar. 1931 bewies Gödel seine berühmten Unvollständigkeitssätze, die A. Fraenkel und Y. Bar-Hillel als die grössten Leistungen des abstrakten menschlichen Denkens unserer Zeit einstufte³. Henkin sagte, Gödels Sätze hätten einen Schock in der mathematischen Welt ausgelöst und die Positionen hinsichtlich des endgültigen Wertes der formaldeduktiven Methode grundlegend verändert⁴. Was war geschehen? Gödel hatte eine besonders wichtige und in der Mathematik grundlegende Interpretation der formalen Sprache betrachtet: die formale Zahlentheorie. Und er hatte bewiesen, dass diese Theorie unter gewissen harmlosen Voraussetzungen (*syntaktisch*) *unvollständig* ist, das heisst, dass es formal unentscheidbare Sätze geben muss, Sätze mit der Eigenschaft, dass weder die Sätze selbst noch ihre Negationen innerhalb des Systems beweisbar sind. Also: Nicht jeder wahre Satz der intuitiven Zahlentheorie kann innerhalb des Kalküls gewonnen werden. Das machte schmerzlich bewusst, dass „Beweisbarkeit“ und „Wahrheit“ nicht dasselbe ist, dass wir nicht erwarten können, dass durch rein formale Prozesse innerhalb eines Kalküls sich exakt das abbilden lässt, was wir inhaltlich mit „wahr“ oder „gültig“ meinen. Jeder Versuch, inhaltliche Kriterien auszuklammern und durch einen rein formalen Umgang mit Symbolen zu ersetzen, ist zum Scheitern verurteilt.

Zudem entzog Gödel der Grundlagenmathematik den Boden, indem er nachwies, dass die (natürlich stark erhoffte) Widerspruchsfreiheit der formalen Zahlentheorie niemals beweisbar sein wird mit Methoden, die innerhalb des Kalküls zur Verfügung stehen. Will man die Widerspruchsfreiheit der formalen Zahlentheorie beweisen, so muss man zwingend Methoden heranziehen, die sich nur in einem stärkeren Kalkül formalisieren lassen. So hat Gentzen 1936 die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie mit Hilfe des in der Mengenlehre formalisierbaren Prinzips der *transfiniten Induktion* bewiesen. Will man also ein System absichern, so muss man stets ein zweites, stärkeres System hinzuziehen, das das erste an Formalisierungsmitteln übertrifft. Eine Selbstgarantie eines Kalküls ist nicht möglich.

Um das alles besser zu verstehen, müssen wir jetzt präziser und detaillierter werden. Gödel untersuchte also die formale Zahlentheorie. Wovon sprechen wir genau? Er betrachtete die Struktur $Z := \langle \mathbb{N}; ', +, \cdot; 0 \rangle$ als Interpretation unserer formalen Sprache, ohne Prädikate, aber mit drei Funktionen, der einstelligen Nachfolgerfunktion $'$, der Addition und Multiplikation und der Konstanten 0. Die natürlichen Zahlen werden darin als $0, 0', 0'', 0''', \dots$ dargestellt, aber wir leisten uns immer wieder die einfacheren Notationen $0, 1, 2, 3, \dots$. In Σ versammelte er die strukturspezifischen Axiome, nämlich diese:

| | |
|----------|--|
| Σ | Peano-Axiome: (P1) $\forall x (\neg(x' = 0))$ (P2) $\forall x, y (x' = y' \rightarrow x = y)$ (P3) $\forall x, y, z (x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z))$ (P4) $\Phi(x 0) \wedge \forall x (\Phi(x x) \rightarrow \Phi(x x+1)) \rightarrow \forall x \Phi(x x)$ |
| | Axiome der Addition: (A1) $\forall x (x + 0 = x)$ (A2) $\forall x (x + y' = (x + y)')$ |
| | Axiome der Multiplikation: (M1) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$ (M2) $\forall x (x \cdot y' = x \cdot y + x)$ |

Die Struktur Z zusammen mit diesem Axiomensystem nennen wir nun die *formale Zahlentheorie*.

³ A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, „Foundations of Set Theory“, Amsterdam, 1952, p. 302

⁴ L. Henkin, „Completeness“, Philosophy of Science Today, Ed. Morgenbesser New York – London, 1967, p. 30

Wir müssen uns noch konsequenter als bisher bemühen, die Objektsprache und die Metasprache sauber zu trennen. Beispielsweise ist ein Ausdruck wie $\Phi \vee \Psi$ innerhalb der Objektsprache nicht bildbar, da die Symbole Φ, Ψ nicht zur Verfügung stehen. Wir meinen mit $\Phi \vee \Psi$ ja eigentlich, dass man zuerst diejenige Formel hinschreibt, die wir hier Φ nennen (und die natürlich allein mit den Symbolen der formalen Sprache auskommen muss), dann das Symbol \vee anfügt und zum Schluss noch diejenige Formel anhängt, die wir hier Ψ nennen. Quine hat ein nützliches Symbol eingeführt, das wir hier gerne benutzen wollen: $\boxed{\Phi \vee \Psi}$ meint genau das, was wir eben umständlich beschreiben mussten; dieser Ausdruck kennzeichnet nun also eine Formel der Objektsprache.

Von zentraler Bedeutung für den Beweis der Unvollständigkeitssätze ist die Tatsache, dass man jeder Formel Φ aus Z eine natürliche Zahl, die sog. *Gödelnummer*, $GN(\Phi)$, zuordnen kann und zwar so, dass auch umgekehrt aus der Nummer die Formel eindeutig rekonstruierbar ist. Dies geschieht durch folgende Codierung:

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|----------|---------------|--------|-----------|-----------|----|----|----|----|----|----|----|
| Symbol | \wedge | \rightarrow | \neg | \forall | \exists | 0 | = | ' | + | . | (|) |
| GN | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 |

Den Variablen x, \dots ordnet man der Reihe nach die Codes $2, 2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 6, \dots$ zu. Um die Eindeutigkeit der Codierung garantieren zu können, benutzt man Primzahlen. Die GN einer Formel entsteht als Produkt von potenzierten Primzahlen, wobei die Exponenten gerade die Codes der Symbole der Formel sind. Die Formel $\forall x(x = x)$ erhält so zum Beispiel die GN

$$2^{GN(\forall)} \cdot 3^{GN(x)} \cdot 5^{GN(=)} \cdot 7^{GN(x)} \cdot 11^{GN(=)} \cdot 13^{GN(x)} \cdot 17^{GN(=)} = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^{23} \cdot 7^2 \cdot 11^{15} \cdot 13^2 \cdot 17^{25}$$

Damit kann auch ein ganzer Beweis codiert werden. Ein formaler Beweis ist ja bloss eine Folge von Formeln. Man kann also wiederum mit Primzahlen arbeiten und einen Beweis durch ein Produkt aufeinander folgender potenziert Primzahlen codieren, deren Exponenten gerade die Gödelnummern der einzelnen Formeln sind. Natürlich drängt sich hier aber noch die Verwendung eines Trennzeichens auf. Wir führen noch die Bezeichnung Γ_n ein für diejenige Formel der formalen Zahlentheorie, deren GN n ist. Manchmal notieren wir auch $\Gamma_n(x)$, um anzudeuten, dass diese Formel die freie Variable x hat.

Warum ist diese sog. „Gödelisierung“ von zentraler Bedeutung? Unser Ziel ist es letztlich, innerhalb der formalen Zahlentheorie eine Formel zu konstruieren, die ihre eigene Unbeweisbarkeit aussagt, die also – metasprachlich interpretiert – über sich selber aussagt, sie könne nicht bewiesen werden. Dabei lehnen wir uns an die Epimenides-Paradoxie an, in der die Aussage „Alles, was ein Kreter äussert, ist eine Lüge“ ja auch von sich selber behauptet, sie sei eine Lüge, weil es ein Kreter ist, der sie äussert. Während dort aber eine Vermischung von Sprachen passiert (und gewollt ist), müssen wir hier tunlichst darauf achten, die Sprachen nicht zu vermischen. Das heisst, die Formel wird eine „leblose“ Verkettung von Symbolen des Kalküls sein, und erst durch Interpretation in der intuitiven Zahlentheorie wird sie ihre eigene Unbeweisbarkeit ausdrücken. Von genau dieser Formel (und nicht der metasprachlichen Deutung) lässt sich dann beweisen, dass sie innerhalb der formalen Zahlentheorie nicht entscheidbar ist, so dass die formale Zahlentheorie also (syntaktisch) unvollständig ist. Der entscheidende Trick aber, um metasprachliche Prädikate in Prädikate der formalen Zahlentheorie übersetzen zu können, ist die „Gödelisierung“!

Beispielsweise lässt sich das metasprachliche Prädikat „Die natürliche Zahl y ist GN von 0 oder von einer Variablen“ dank obiger Codierung übersetzen in $(y = 13) \vee \exists x(y = 0 \cdot x)$. Dies ist jetzt eine Formel des Kalküls und gänzlich unabhängig von einer Bedeutung, die wir ihr allenfalls geben können, indem wir sie metasprachlich interpretieren. Wir sollten bei der Trennung der Sprachen noch sorgfältiger sein und niemals in der Metasprache und der Objektsprache dasselbe Symbol benutzen. Hier haben wir ja y sowohl als natürliche Zahl (also metasprachlich), als auch als Variable innerhalb des Kalküls verwendet. Das wollen wir künftig vermeiden, indem wir weiterhin x, y, \dots für die Variablen innerhalb des Kalküls schreiben und \bar{x}, \bar{y}, \dots wenn wir diese Variablen als natürliche Zahlen interpretieren. Wir brauchen noch folgende Definition:

Definition: Sei $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ein n -stelliges Prädikat der intuitiven Zahlentheorie. Wir nennen dieses Prädikat *in der formalen Zahlentheorie ausdrückbar*, genau dann wenn es im Kalkül eine Formel Φ mit genau n freien Variablen x_1, \dots, x_n gibt, so dass

- wenn $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, dann $Z \vdash \Phi(x_1, \dots, x_n)$ und
- wenn nicht $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, dann $Z \vdash \neg \Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Es steckt unglaublich viel Arbeit darin, von wirklich anspruchsvollen Prädikaten der intuitiven Zahlentheorie zu zeigen, dass sie innerhalb des Kalküls formal ausdrückbar sind. Aus Platzgründen müssen wir hier sehr viel überspringen und können nur ohne Beweis festhalten:

Das folgende Prädikat der intuitiven Zahlentheorie ist im Kalkül formal ausdrückbar:
 $R(\bar{n}, \bar{y}) \Leftrightarrow \bar{n}$ ist GN einer Formel, die die erste Variable der Objektsprache (also x) als einzige freie Variable hat (also von $\Gamma_n(x)$), und \bar{y} ist GN eines Beweises von $\Gamma_n(n)$; das ist diejenige Formel, die aus der Formel mit GN \bar{n} entsteht, indem man für die freie Variable die Ziffer einsetzt, die der intuitiven natürlichen Zahl \bar{n} entspricht.

Lemma:

Salopp ausgedrückt ist das Prädikat $R(\bar{n}, \bar{y})$ also genau dann erfüllt, wenn die natürliche Zahl \bar{y} die GN eines Beweises derjenigen Formel ist, die aus der Formel mit GN \bar{n} hervorgeht, indem man in sie ihre eigene GN einsetzt. Da dieses Prädikat im Kalkül formal ausdrückbar ist, existiert also im Kalkül eine Formel Φ mit zwei freien Variablen n, y , so dass

- wenn $R(\bar{n}, \bar{y})$, dann $Z \vdash \Phi(n, y)$ und
- wenn nicht $R(\bar{n}, \bar{y})$, dann $Z \vdash \neg \Phi(n, y)$.

Jetzt treiben wir die Sache auf die Spitze, indem wir die Formel $\neg \forall y \neg \Phi(n, y)$ betrachten. Ihre GN sei \bar{p} . Es handelt sich also einfach um die Formel $\Gamma_{\bar{p}}(n)$. Setzen wir in diese Formel (genauer: in ihre freie Variable) nun den formalen Repräsentanten p der GN \bar{p} ein, so gelangen wir zur Formel

$$\Gamma_{\bar{p}}(p): \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$$

die – metasprachlich interpretiert – ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Sie „sagt“ ja, dass es keinen Beweis gibt für diejenige Formel, die aus der Formel mit GN \bar{p} (das ist $\Gamma_{\bar{p}}(n)$) hervorgeht, indem man ihr ihre eigene GN einsetzt (das ist $\Gamma_{\bar{p}}(p)$, also die Formel selbst). In die Fänge einer Paradoxie geraten wir hierbei nicht, weil wir tunlichst darauf geachtet haben, Metasprache und Objektsprache zu trennen.

Mit $\Gamma_{\bar{p}}(p)$ haben wir nun diejenige Formel gewonnen, die die Hauptrolle im 1. Gödelschen Unvollständigkeitssatz spielt. Dieser lautet nämlich:

1. Unvollständigkeitssatz von K. Gödel (1931):

Z ω -widerspruchsfrei⁵ \Rightarrow (i) $Z \not\vdash \Gamma_{\bar{p}}(p)$
 (ii) $Z \not\vdash \neg \Gamma_{\bar{p}}(p)$
 Die formale Zahlentheorie ist also (syntaktisch) unvollständig;
 $\Gamma_{\bar{p}}(p)$ ist ein Beispiel einer formal unentscheidbaren Formel.

Wir müssen noch erklären, was man unter ω -Widerspruchsfreiheit versteht. Dann beweisen wir diesen Satz und geben noch den 2. Unvollständigkeitssatz an.

Definition: Ein Axiomensystem Σ heisst ω -widerspruchsfrei, genau dann wenn für keine Formel $\Psi(x)$ gleichzeitig zutreffen: $\Sigma \vdash \Psi(0)$, $\Sigma \vdash \Psi(1)$, $\Sigma \vdash \Psi(2)$,... und $\Sigma \vdash \neg \forall x \Psi(x)$. (Es ist klar, dass daraus die gewöhnliche syntaktische Widerspruchsfreiheit folgt.)

⁵ 1936 hat Rosser gezeigt, dass man schon aus der geringeren Voraussetzung der gewöhnlichen syntaktischen Widerspruchsfreiheit zum gleichen Resultat gelangen kann, wenn man eine etwas kompliziertere Formel als die von Gödel betrachtete benutzt.

Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes:

(i) Angenommen, es wäre $Z \vdash \Gamma_p^-(p)$, dann müsste es also einen Beweis für diese Formel geben; dieser Beweis habe etwa die GN \bar{k} . Dann wäre also $R(\bar{p}, \bar{k})$ erfüllt. Wegen der formalen Ausdrückbarkeit dieses Prädikates würde folgen, dass $Z \vdash \Phi(p, k)$. Mit (Q3) und MP hätte das $Z \vdash \exists y \Phi(p, y)$ zur Konsequenz. Mit (Q4) und MP hätte dies $Z \vdash \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$ zur Folge. Dies ist gleichbedeutend mit $Z \vdash \neg \Gamma_p^-(p)$. Insgesamt würde also die Annahme $Z \vdash \Gamma_p^-(p)$ auf $Z \vdash \neg \Gamma_p^-(p)$ führen im Widerspruch zur angenommenen (syntaktischen) Widerspruchsfreiheit des Kalküls (welche ja aus der ω -Widerspruchsfreiheit folgt). Daher ist die Annahme falsch, und es ist also $Z \not\vdash \Gamma_p^-(p)$.

(ii) Nach (i) ist $\Gamma_p^-(p)$ innerhalb des Kalküls nicht beweisbar, das heisst keine der natürlichen Zahlen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$ ist GN eines Beweises dieser Formel. Insbesondere erfüllt also keines der Paare $(\bar{p}, \bar{0}), (\bar{p}, \bar{1}), (\bar{p}, \bar{2}), \dots$ das Prädikat R . Wegen der formalen Ausdrückbarkeit bedeutet dies: $Z \vdash \neg \Phi(p, 0)$ und $Z \vdash \neg \Phi(p, 1)$ und $Z \vdash \neg \Phi(p, 2)$ und so weiter. Wegen der Definition der ω -Widerspruchsfreiheit hat dies zur Folge, dass $Z \not\vdash \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$, das heisst $Z \not\vdash \neg \Gamma_p^-(p)$. Genau das galt es zu zeigen. □

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz birgt mindestens gleich viel Zündstoff in sich:

| | |
|--|---|
| <p><u>2. Unvollständigkeitssatz von K. Gödel (1931):</u></p> | <p>Z widerspruchsfrei \Rightarrow Die Widerspruchsfreiheit von Z kann nicht innerhalb des Kalküls bewiesen werden.</p> |
|--|---|

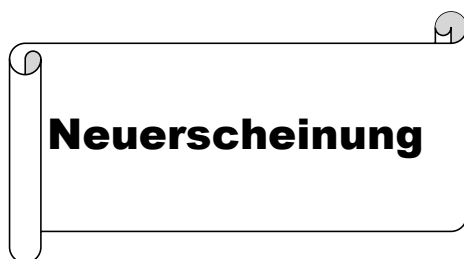
Wie gesagt, hat dieser Satz einen wesentlichen Teil des Hilbert-Programms zunichte gemacht. Eine Selbstgarantie unseres formalen Systems ist nicht zu erbringen. Schlimmer noch, es gibt aus der unangenehmen Situation keinen Ausweg, dass unser Kalkül entweder widerspruchsfrei ist und dies nicht bewiesen werden kann, oder dass er widerspruchsvoll ist und damit alles bewiesen werden kann, sogar – paradoxerweise – seine eigene Widerspruchsfreiheit.

Beweisidee:

Der Kalkül ist widerspruchsfrei, sobald wir irgendeine in Z beweisbare Formel Υ finden, für die nicht gleichzeitig $\neg \Upsilon$ beweisbar ist. Die Aussage, dass $\neg \Upsilon$ in Z unbeweisbar ist, wird bekanntlich durch $\neg \exists y \Phi(k, y)$ formal ausgedrückt, wobei \bar{k} die GN von $\neg \Upsilon$ sei. Diese Aussage wollen wir hier kurz *WID* nennen, weil sie ja in gewissem Sinne die Widerspruchsfreiheit des Kalküls ausdrückt.

Im Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes wurde ein metasprachlicher Beweis erbracht für die Aussage „Wenn der Kalkül widerspruchsfrei ist, dann ist $\Gamma_p^-(p)$ im Kalkül unbeweisbar“. Durch unseren Übersetzungsprozess können wir nun diese Aussage innerhalb der formalen Zahlentheorie selber darstellen: Die Prämisse „Der Kalkül ist widerspruchsfrei“ wird dabei ersetzt durch die Formel *WID*, das „wenn...dann“ wird ersetzt durch \rightarrow und die Konklusion „ $\Gamma_p^-(p)$ ist im Kalkül unbeweisbar“ wird ersetzt durch die Formel $\Gamma_p^-(p)$ selbst, da sie ja bei inhaltlicher Deutung gerade ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Die Übersetzung in die formale Zahlentheorie liefert also die Formel $\neg \text{WID} \rightarrow \Gamma_p^-(p)$.

Es kann nun gezeigt werden, dass $\neg \text{WID} \rightarrow \Gamma_p^-(p)$ ein innerhalb des Kalküls beweisbarer Satz ist. Angenommen, man könnte jetzt die Widerspruchsfreiheit innerhalb des Kalküls beweisen, so gäbe es also einen formalen Beweis für *WID*. Durch Anwendung des MP würde daraus ein formaler Beweis von $\Gamma_p^-(p)$ folgen im Widerspruch zum 1. Unvollständigkeitssatz. Daher kann die Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb des Kalküls nachgewiesen werden.



Lehrmittel für den Mathematik-Unterricht



Diskussion von Funktionen an Gymnasien

**Welche Funktionskategorien gehören zum
Grundstoff des Gymnasiums?**

**Wie erfasse ich den Verlauf des Graphen mit
wenig Aufwand ohne Verwendung eines
graphikfähigen Taschenrechners?**

- Zusammenstellung der gymnasialen Analysis
- Gleiche Diskussionssystematik für alle Funktionsgruppen
- zielgerichtete Denkarbeit statt Wertetabellen
- Ideales Repetitorium vor Prüfungen
- Vorgelöste Beispiele
- 100 Aufgaben
- 100 Seiten A4, Fr. 25.-
- Autor: René Moser
- Einführungsaktion: Probeexemplar Fr. 10.-

Bestelladresse:

FO-Publishing, Gewerbestrasse 18, CH-8132 Egg/ZH,

Telefon: 044 986 35 00, Fax: 044 986 35 36, E-Mail: info@fo-publishing.ch



Un peu d'algèbre linéaire et d'analyse combinatoire

Jean Piquerez

Collège et École de Commerce Madame de Staël

Dans le livre de Sheldon Ross « Initiation aux probabilités » aux Presses polytechniques et universitaires romandes, édition 2002, on peut lire en page 15 l'énoncé suivant :

Vérifier que, pour $n \geq 4$, $\binom{n+1}{4} = \frac{1}{3} \binom{n}{2}$.

Présenter ensuite un argument d'analyse combinatoire en faveur de cette équation.

On vérifie sans peine que

$$\frac{1}{3} \binom{n}{2} = \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)-1}{n(n-1)-1} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \binom{n+1}{4}.$$

D'une part, $\binom{n+1}{4}$ est le nombre de sous-ensembles de taille 4 d'un ensemble à $(n+1)$ éléments noté E' . Imaginons ensuite un élément noté a de cet ensemble et notons x_1, x_2, \dots, x_n les n autres. Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; par conséquent $E' = E \cup \{a\}$.

D'autre part, $\binom{n}{2}$ est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments de E . Notons $P_2(E)$, l'ensemble de ces sous-ensembles. Alors $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments de $P_2(E)$.

Montrons qu'il correspond au nombre de sous-ensembles de taille 4 de E' , en distinguant ceux qui contiennent a de ceux qui ne le contiennent pas.

En effet, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ provient de la réunion disjointe de deux sous-ensembles de taille 2 d'un ensemble à n éléments de 3 façons distinctes :

$$\{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\} = \{x_1, x_4\} \cup \{x_2, x_3\}$$

Les sous-ensembles du type $\{x_1, x_2, x_3, a\}$ quant à eux, se construisent aussi de 3 façons distinctes par l'adjonction de a à $\{x_1, x_2, x_3\}$ car

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\} = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2\} = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_3\}.$$

Donc, $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ compte trois fois les sous-ensembles de taille 4 de E' , ce qui termine la démonstration.

Remarque : Le raisonnement précédent n'est pas généralisable à l'exercice qui va suivre.

Quelques années plus tard, je tombe sur l'exercice suivant :

Exprimer $\binom{n}{m}$ comme combinaison linéaire de certains $\binom{n}{i}$

Vu son libellé, je l'ai d'abord traité sous l'angle de l'algèbre linéaire. Puis l'exercice du Sheldon Ross me revenant en mémoire, j'ai décidé de l'aborder par l'analyse combinatoire. Voici le fruit de mes réflexions.

a) par l'algèbre linéaire

Remarquons tout d'abord que $\binom{n}{m}$ est un polynôme en n de degré m ; il est de l'ordre de n^m .

Donc $\binom{\binom{n}{m}}{k}$ est un polynôme en n de degré mk , car il est de l'ordre de $(n^m)^k = n^{mk}$. Ainsi, il

peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq mk$ dont la dimension est $mk + 1$ et dont la base canonique est $[1; n; n^2; \dots; n^{mk}]$.

D'une manière générale envisageons l'espace vectoriel \mathbf{P}_k des polynômes en n de degré k de base canonique $[1; n; n^2; \dots; n^k]$ et montrons que la famille $\left\{ \binom{n}{i} \mid i = 0, 1, 2, \dots, k \right\}$ en constitue également

une base. Or, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$, et, d'une façon générale,

$$\binom{n}{i} = \sum_{j=0}^i \alpha_j n^j \text{ où } \alpha_i = \frac{1}{i!}, \text{ d'où la matrice suivante } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1/i! & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k! \end{pmatrix} \text{ dans la base}$$

canonique qui est triangulaire et dont le déterminant est le produit des termes diagonaux $\prod_{i=0}^k \frac{1}{i!}$ et est, par conséquent, non nul.

Ainsi, $\left\{ \binom{n}{i} \mid i = 0, 1, 2, \dots, k \right\}$ est une base de $\langle \mathbf{P}_k; +; \cdot \rangle$.

Par conséquent, $\binom{\binom{n}{m}}{k}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $\binom{n}{i}$, i allant de 0 à mk .

Envisageons des exemples numériques et donnons leur une interprétation combinatoire.

b) par l'analyse combinatoire

$$\binom{n}{2} = 3 \binom{n+1}{4} = 3 \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4} \text{ au vu de l'exercice précédent.}$$

$$\binom{n}{3} \text{ dénombre les sous-ensembles d'au plus 6 éléments d'un ensemble de } n \text{ éléments } (n \geq 6),$$

constitués par la réunion de 3 sous-ensembles à 2 éléments. On obtient ainsi :

$\{a; b; c; d; e; f\} = \{a; b\} \cup \{c; d\} \cup \{e; f\}$, par exemple, qui peut s'obtenir de 15 façons distinctes,

$\{a; b; c; d; e\} = \{a; b\} \cup \{a; c\} \cup \{d; e\}$, par exemple, qui peut s'obtenir de 30 façons distinctes,

$\{a; b; c; d\} = \begin{cases} \{a; b\} \cup \{a; c\} \cup \{b; d\} & 12 \text{ possibilités} \\ \{a; b\} \cup \{a; c\} \cup \{a; d\} & 4 \text{ possibilités} \end{cases}$, et enfin

$\{a; b; c\} = \{a; b\} \cup \{b; c\} \cup \{a; c\}$ qui s'obtient d'une seule façon.

$$\text{On a donc } \binom{n}{3} = 15 \binom{n}{6} + 30 \binom{n}{5} + 16 \binom{n}{4} + \binom{n}{3}.$$

Bien entendu, $\binom{n}{3} \neq \binom{n}{2}$; d'ailleurs, par un raisonnement similaire, on trouve :

$$\binom{n}{2} = 10 \binom{n}{6} + 15 \binom{n}{5} + 6 \binom{n}{4}$$

Au vu des exemples précédents, on remarque donc que $\binom{n}{k}$ compte plusieurs fois des sous-ensembles d'au plus mk éléments constitués par la réunion de k sous-ensembles à m éléments.

On a alors une combinaison linéaire des $\binom{n}{i}$ allant de $\binom{n}{m+p}$ à $\binom{n}{km}$, p étant déterminé par le plus petit entier pour lequel on a $\binom{m+p}{m} \geq k$.

Donc, si $m = 2$ et $k = 3$, $\binom{2+p}{2} \geq 3$ à partir de $p = 1$ et la combinaison linéaire va de $\binom{n}{3}$ à $\binom{n}{6}$.

Si $m = 3$ et $k = 2$, $\binom{3+p}{2} \geq 2$ à partir de $p = 1$ aussi et la combinaison linéaire va de $\binom{n}{4}$ à $\binom{n}{6}$.

Applications des mathématiques à la finance et à l'assurance

Un cours organisé par la CRM à Leysin
du 29 septembre au 2 octobre 2009

Quarante-trois enseignants de Suisse romande et un collègue de Suisse alémanique ont suivi ce cours organisé par la Commission Romande de Mathématique et présenté par des membres de la Faculté des HEC de l'Université de Lausanne.

Dans une première partie, M. Sébastien Viquerat, assistant diplômé et chargé de cours, nous a présenté et expliqué les formules qui permettent de calculer la valeur actualisée d'une série de paiements (rentes prae- ou postnumerando, temporaires ou perpétuelles). Nous avons également appris à calculer l'amortissement d'un prêt. M. Viquerat a ensuite défini une obligation et déterminé son prix (à une date de coupon ou entre deux dates de coupons) ainsi que son taux de rendement avec réinvestissement. Exemples et exercices nous ont permis de comprendre ces notions de mathématiques financières.

Ensuite, M. André Dubey, professeur ordinaire, nous a expliqué comment construire un modèle pour calculer la valeur future d'une unité d'un actif (action) en temps discret et continu. Ceci l'a conduit à introduire les processus de Wiener (mouvements browniens standards) et le lemme de Itô afin de montrer comment F. Black, M. Scholes et R. Merton ont établi la formule qui leur a valu le prix Nobel d'économie en 1997. M. Hans-Ulrich Gerber, professeur honoraire, est revenu sur les processus de Wiener $W(t)$ qui permettent par exemple de modéliser le cours d'une action. Il a insisté sur les propriétés géométriques « fascinantes » de $W(t)$: fonction continue, nulle part dérivable, de variation absolue infinie quelle que soit la période, mais dont variation quadratique sur une période h est finie et égale à la variance de la variable aléatoire normale $W(t+h)-W(t)$.

Pour terminer, M. François Dufresne, professeur ordinaire, nous a introduit aux mathématiques d'assurance sur la vie. Il a présenté six produits d'assurance-vie (avec des exercices), des tables de mortalité (approches déterministe et stochastique), le calcul des primes nettes nivelées (avec exemples) et les réserves mathématiques d'une compagnie d'assurance (elles constituent la majeure partie de son passif).

La matière présentée était intéressante. Plusieurs notions peuvent être traitées dans un cours de mathématiques au degré secondaire II. En revanche, le modèle stochastique en temps continu (processus de Wiener, intégrale de Itô) était destiné à notre culture générale.

Chantal Arlettaz, octobre 2009

Deutschschweizerische Mathematik-
kommission (DMK) des Vereins
Schweizerischer Mathematik- und
Physiklehrkräfte



wbz cps **EDUQUA** zertifiziert

In Zusammenarbeit mit dem ETH-Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht

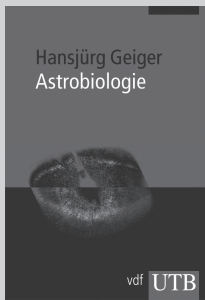
Weiterbildungskurs "Mathematik lernen - do it yourself"

Im Kurs wird das neue Lehrmittel „Integrieren – do it yourself“ der DMK und insbesondere das dahinter stehende didaktische Konzept vorgestellt. Die Basis für dieses Lehrmittel bildet Material vom niederländischen Freudenthal Institut, an welchem laufend Unterrichtsmaterialien entworfen werden, welche den neusten Erkenntnissen der Bildungsforschung gerecht werden.

Gleich wie im Unterrichtswerk „Differenzieren – do it yourself“, welches im Jahr 2003 erschienen ist, steht auch im neuen Lehrmittel die Eigenaktivität und Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler im Zentrum. Beim Erwerb von Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnissen im Bereich der Integralrechnung stehen die Lehrperson den Lernenden in beratender Funktion zur Seite. Den Rollenwechsel vom Dozenten zum Coach sollen die Teilnehmenden des Weiterbildungskurses selbst erleben und erproben. Sie werden dabei von einem der Urheber des Lehrmittels, Prof. Dr. Martin Kindt, und den Autor/-innen des DMK Lehrmittels betreut.

Die Teilnehmenden erhalten vor dem Kurs das neue Lehrmittel und entwickeln im Kurs konkrete Ideen, Konzepte und Materialien für den Einsatz desselben im Unterricht (Anleitung für die neue Arbeitsweise, Lernkontrollen, aussermathematische Anwendungen der Integralrechnung, Einsatz des Taschenrechners, usw.)

- Zielpublikum:** Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik Grundlagen-, Ergänzungs- und Schwerpunktfach in deutscher und englischer Sprache
- Kursleitung:** Meike Akveld, ETH Zürich und MNG Rämibühl, Zürich
Baoswan Dzung Wong, KS Wettingen
Ursula Eisler, KS Freudenberg, Zürich
Daniel Zogg, Zürich
- Referent:** Prof. Dr. Martin Kindt, Freudenthal Institut, Utrecht (Niederlande)
- Datum und Zeit:** Mittwoch, 9. Juni 2010, 9.00 – 17.00 Uhr
- Kursort:** ETH Zürich, Hauptgebäude G19.1
- Kurskosten:** CHF 130.- (inkl. Buch)
- Anmeldung:** www.webpalette.ch Kursnummer: 10.04.91
- Anmeldeschluss:** Freitag, 16.04.2010

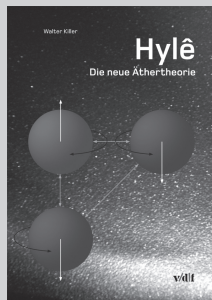


Hansjürg Geiger
Astrobiologie
 2009, UTB Band 3275
 244 Seiten, zahlr. Abb. und Fotos,
 z.T. farbig, Format 15 x 21,5 cm, brosch.
 CHF 36.– / EUR 24,90 (D)
 ISBN 978-3-8252-3275-7

Die Astrobiologie ist ein noch junger
 Zweig der Naturwissenschaften. Sie un-
 tersucht mögliche Wege, wie Leben auf
 der Erde entstanden sein könnte, und
 entwickelt darauf aufbauend Strategien
 für die Suche nach fremden Lebens-
 formen in unserem Sonnensystem und
 auf fernen Galaxien.

vdf

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, VOB D, Voltastrasse 24, CH-8092 Zürich
 Tel. +41 (0)44 632 42 42, Fax +41 (0)44 632 12 32, verlag@vdf.ethz.ch
 Besuchen Sie uns auf unserer Website www.vdf.ethz.ch!



Walter Killer
Hylê – Die neue Äthertheorie
 2009, 312 Seiten,
 Format 16 x 23 cm, brosch.
 CHF 68.– / EUR 48.– (D)
 ISBN 978-3-7281-3245-1

Ausgehend von einem einzigen Teil-
 chen, einem Kreisel, und einer ein-
 zigen Kraft, der Kontaktkraft, die aus
 einem Impulsübertrag resultiert, wird
 die neue mechanistische Theorie
 für alle Phänomene der Physik wi-
 derspruchsfrei aufgebaut. Das Buch
 regt zu neuen Fragestellungen in der
 fundamentalen Physik an.

Weitere Publikationen

Karl Frey, Angela Frey-Eiling
Ausgewählte Methoden der Didaktik
 UTB Band 8428, 2009, 456 Seiten,
 zahlr. Darst., 17 x 24 cm, brosch.
 CHF 58.– / EUR 38,90 (D)
 ISBN 978-3-8252-8428-2

Harry Nussbaumer
Das Weltbild der Astronomie
 2., erweit. und aktual. Auflage 2007
 328 Seiten, zahlr. farbige Abb.,
 17 x 24 cm, gebunden
 CHF 59.– / EUR 39,90 (D)
 ISBN 978-3-7281-3106-5

Claude Amsler
Kern- und Teilchenphysik
 UTB Band 2885, 2007, 376 Seiten, zahlr.
 Abb. und Tab., 15 x 21,5 cm, brosch.
 CHF 52.– / EUR 34,90 (D)
 ISBN 978-3-8252-2885-9

Jürgen Freund
**Spezielle Relativitätstheorie
 für Studienanfänger**
 UTB Band 2884, 2007, 272 Seiten, zahlr.
 grafische Darst., 15 x 21,5 cm, brosch.
 CHF 30.– / EUR 19,90 (D)
 ISBN 978-3-8252-2884-2

Reinhart Frosch
**Four-Tensors, the Mother Tongue
 of Classical Physics**
 2006, 300 Seiten, 12 x 18,5 cm, brosch.
 CHF 48.– / EUR 32,50 (D)
 ISBN 978-3-7281-3069-3

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*

Deutschweiz:

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Suisse romande :

Philippe Beney philippe.beney@bluewin.ch
Av. Pratifori 10 Tel. 027 321 11 94
1950 Sion

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– Délais de rédaction (de parution)

Nr. 113 30.04.2010 (20.06.2010)
Nr. 114 31.08.2010 (20.10.2010)
Nr. 115 31.12.2010 (20.02.2011)

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Physikkommission

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique

Jean-Daniel Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– Tarifs pour les annonces et les annexes

Ganzseitige Inserate Fr. 500.–
Halbseitige Inserate Fr. 300.–
Beilagen bis 20 g Fr. 500.–
Beilagen über 20 g Nach Vereinbarung

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>