



Bulletin

Juni 2009 – Juin 2009

N° 110

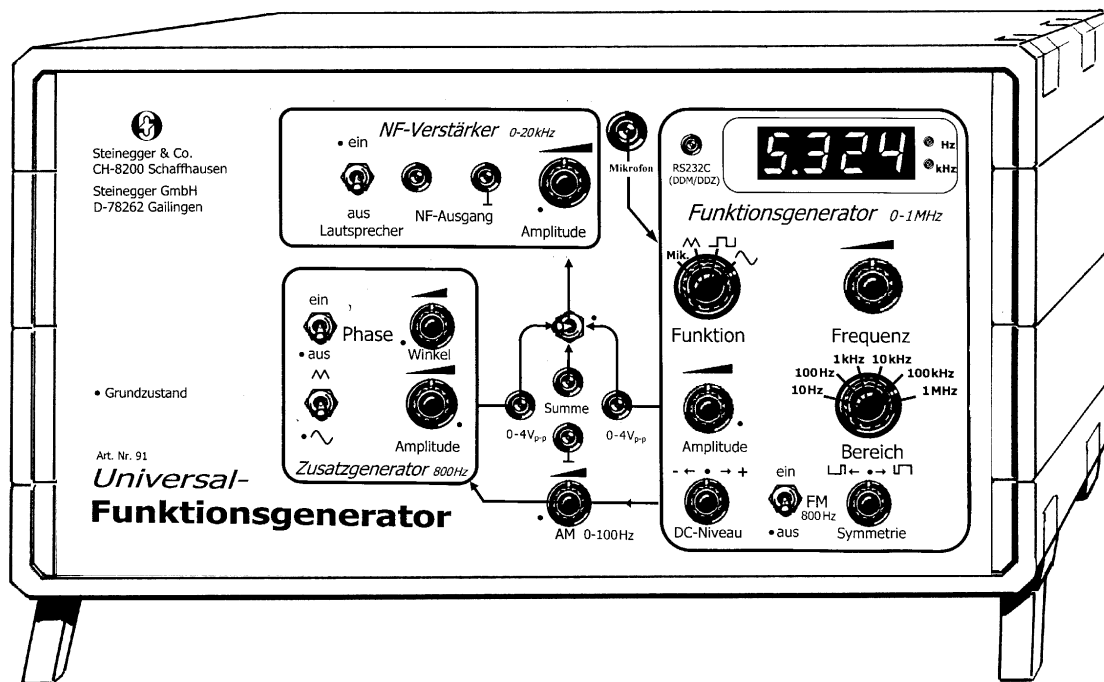


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Universal- Funktionsgenerator

Kompaktversion Art.Nr. 91



Das vielseitige Demonstrationsgerät für die Akustik, Schwingungs- und Wellenlehre sowie die Elektrik.

- **Funktionen: Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn**
- **Zwei Oszillatoren mit Synchronisationsmöglichkeit in beliebiger Phasenlage (für Interferenzversuche)**
- **Mikrofoneingang, NF-Verstärker, eingebauter Lautsprecher**
- **Frequenz- und Amplitudenmodulation**
- **Direkter Anschluss ans DDM und an den DDZ**
- **Ausführliche Bedienungsanleitung mit vielen Anwendungen**
- **Preis inkl. MWSt.: SFr. 1280.--**

Gerne senden wir Ihnen kostenlos die Kurzbeschreibung "Universal-Funktionsgeneratoren Nr. 91" zu.

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



(: 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Elisabeth Mc Garrity

Rezension: Merzyn, Gottfried: Naturwissenschaften Mathematik
Technik immer unbeliebter?

3



Commission Romande de Mathématiques

4

Cours 2009

4

DPK

Deutschschweizerische Physikkommission

5

Martin Lieberherr

Das mathematische Fadenpendel

5



Commissione di matematica della Svizzera italiana

9

Laura Donati e Arno Gropengiesser

La statistica da Stefano Franscini all'insegnamento liceale

9



Deutschschweizerische Mathematikkommission

11

Kerstin Quatember

Mathematik entdecken lassen: Maturaarbeiten und andere
Gelegenheiten – Ein Bericht über die Weiterbildungsveranstaltung
vom 27/28. März 2009 an der Kantonsschule Baden

11

Claudius Behr

Optionen, eine Schnittstelle zwischen Wirtschaft und Mathematik

14

Heinz Bachmann und Urs Oswald

Das Osterdatum

14

Kurse

Atmosphären untersuchen und modellieren: Empirische, analytische, numerische Methoden	30
ETHZ, Departement Mathematik Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	31
uzh eth ph Zürich Weiterbildungskurse Mathematik, Informatik, Physik im Frühlingssemester 2009	32
ETHZ, Departement Mathematik 20. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht	33
PHBern, Institut für Weiterbildung Rosetta: Weltraumforschung 40 Jahre nach der Mondlandung	36
forumvera Energiepolitik: Auswege aus dem Dilemma?	37

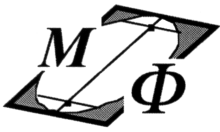
Impressum	41
-----------	----

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Aktienkurs UBS seit April 2005, Quelle: Swissquote.ch, siehe Artikel von Claudius Behr, Seite 14.



Naturwissenschaften Mathematik Technik immer unbeliebter?

Ein Buch von Gottfried Merzyn

ISBN 978-3-8340-0449-9 Schneider Verlag Hohengehren GmbH.

In diesem Buch geht Gottfried Merzyn der Ursache der verbreiteten Unbeliebtheit der Naturwissenschaften nach. Seine Analyse beruht auf zahlreichen interessanten Untersuchungen und führt zu einer Lagebeurteilung. Der Autor bleibt nicht bei der fundierten methodischen Beschreibung, er stellt unangenehme Fragen, bei denen die Unterrichtsinhalte, Unterrichtsmethoden, Schülereinstellungen, Schwierigkeitsgrade etc. angesprochen werden. Seine Fragen erwecken das Bedürfnis nach einer neuen Definition der Unterrichtsqualität in den Naturwissenschaften.

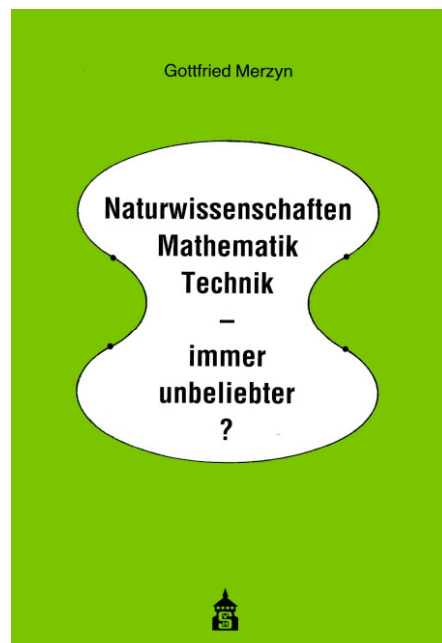
Im letzten Kapitel präsentiert der Autor auch einige Verbesserungsvorschläge.

Eine gute Basis zum Nachdenken

Zum Autor:

Dr. Gottfried Merzyn (Göttingen);

Univ.-Professor für Physikdidaktik; nebenamtlich zehn Jahre als Lehrer tätig; er war lange Zeit Mitherausgeber der Zeitschrift „Naturwissenschaften im Unterricht Physik/Chemie“ sowie Autor verschiedener Bücher zum naturwissenschaftlichen Unterricht und zur Lehrerbildung.





Cours CRM 2009

Applications des mathématiques à la finance et à l'assurance

Objectifs du cours

La finance et l'assurance représentent aujourd'hui un champ d'application important du calcul des probabilités, de la statistique et de la théorie des processus stochastiques. L'objectif du cours est d'exposer quelques applications concrètes de ces deux domaines et de discuter les modèles mathématiques qui ont été construits pour les traiter. L'intention est de traiter aussi bien des modèles élémentaires, pouvant être intégrés dans un cours de mathématiques au gymnase que des modèles qui font appel à des techniques plus ambitieuses, donnant un aperçu des développements et des applications modernes des mathématiques en économie.

Lors des cours, l'accent sera mis essentiellement sur les possibilités d'application plutôt que sur la rigueur mathématique. Des applications et des exercices permettront d'illustrer les sujets abordés.

Conférenciers

Les conférenciers sont tous membres de la Faculté des HEC de l'Université de Lausanne (<http://www.hec.unil.ch/>). François Dufresne et André Dubey sont professeurs ordinaires, Hans U. Gerber professeur honoraire et Sébastien Viquerat assistant diplômé et chargé de cours.

Inscription

CPS Berne
Cours 09.04.21
<http://www.webpalette.ch>
jusqu'au 24/07/09
CHF 320.-

Renseignement

Chantal Arlettaz
Primerose 53
1007 Lausanne
021 617 44 93
<mailto:chantal.arlettaz@vd.ch>

Plus d'information sur le site de la CRM

<http://www.vsmf.ch/crm/cours.htm>

Das mathematische Fadenpendel

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Es gibt zwei Formen von mathematischen Pendeln: Das am häufigsten verwendete ist ein idealisiertes Stangenpendel, bei dem ein Massenpunkt an einer masselosen, starren Stange hängt. Weniger oft betrachtet wird das idealisierte Fadenpendel, bei dem ein Massenpunkt an einem undehnbaren, flexiblen, masselosen Faden hängt. Solange das Pendel nicht über die horizontale Lage hinaus schwingt, muss man nicht zwischen diesen beiden Formen unterscheiden. Wenn es über die Waagrechte hinaus schwingt, so hält die Stange den Massenpunkt auf einer Kreisbahn, während der Faden das nicht immer schafft. Das Fadenpendel löst sich unter Umständen von der Kreisbahn und folgt einer Wurfparabel.

Parabelbahnen

Das Fadenpendel löst sich von der Kreisbahn, wenn die radiale Komponente der Fallbeschleunigung grösser als die Zentripetalbeschleunigung wird (Abbildung 1).

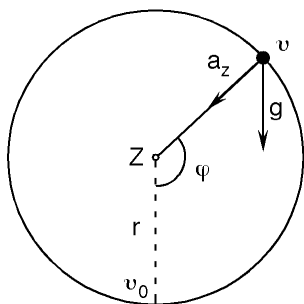


Abbildung 1: Die zentripetale Komponente der Beschleunigung der Pendelmasse hat den Betrag

$$a_z = \frac{v^2}{r}$$

Die radiale Komponente der Fallbeschleunigung ist

$$g_z = g \cos \varphi$$

Das Kreiszentrum liege im Nullpunkt eines (x/y)-Koordinatensystems mit y-Achse nach oben.

Das Pendel habe im tiefsten Punkt die Bahngeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{fgr}$ mit dem freien Parameter f . Ist $f \leq 2$, so schwingt das Pendel nicht über die Horizontale durch das Kreiszentrum hinaus. Ist $f \geq 5$, so beschreibt das Pendel einen vollen Kreis. Im Bereich $2 < f < 5$ fällt die Pendelmasse in den Kreis hinein. Beim momentanen Winkel φ folgt aus dem Energiesatz für die Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = fgr - 2g \cdot (r - r \cos \varphi).$$

Für den Winkel φ , an dem die Kreisbewegung in eine Wurfbahn übergeht, erhält man somit die Bedingung

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2-f}{3}$$

An der Ablösestelle ist dann die momentane Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = \frac{gr}{3} \cdot (f-2) = -gr \cos \varphi$$

Dort beginnt eine Wurfparabel mit Abwurfwinkel $\alpha = \varphi$ gegen die Horizontale. Diese Parabel hat die Gleichung

$$y = -r \cos \varphi + \tan \varphi \cdot (x - r \sin \varphi) + \frac{1}{2r \cos^3 \varphi} \cdot (x - r \sin \varphi)^2$$

Die trigonometrischen Funktionen liessen sich noch eliminieren, aber die Gleichungen reichen aus, um Abbildung 2 zu erzeugen.

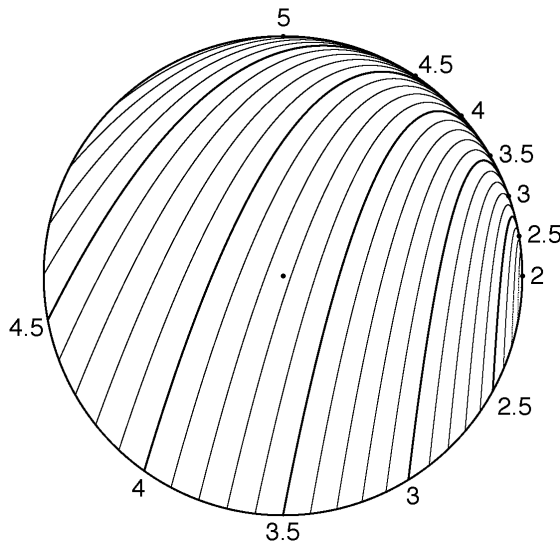


Abbildung 2: Bahnen der Fadenpendel, die in den Kreis hinein fallen. Im tiefsten Punkt ist die Bahngeschwindigkeit \sqrt{fgr} . Der Parameter f ist neben der entsprechenden Wurfparabel eingezeichnet. Der Start erfolgt im ersten Quadranten und ist für die halb- und ganzzahligen f -Werte mit einem kleinen, fetten Punkt gekennzeichnet. Der f -Wert wurde von 2 bis 5 in Schritten von 0.1 erhöht.

Betrachtet man Abbildung 2, so stellt sich natürlich sofort die Frage, welche Bahn den untersten Punkt, das Kreiszentrum oder den Punkt ganz links trifft. Eine numerische Nullstellensuche liefert die Parameter $f = 3.5000000000, 3.7320508076$ und 4.5980762114 . Dazu gehören die Werte $\cos \varphi = -0.500 (-1/2), -0.577 (-1/\sqrt{3})$ und $-0.866 (-\sqrt{3}/2)$ resp. $\varphi = 120^\circ, 125.26^\circ$ und 150° .

Reflexionen

In Abbildung 2 hören die Parabelbahnen einfach auf, wenn sie den Kreis erreichen. Bei einem Fadenpendel würde sich da der Faden spannen und die Pendelmass zurückschnellen. Bei einem mathematischen Fadenpendel ergäbe sich eine Singularität: Da der Faden nicht dehnbar ist, müsste die Pendelgeschwindigkeit augenblicklich ändern. Das hätte unendlich grosse Kräfte zur Folge. Stellen wir uns unter dem Faden etwas hart-elastisches vor, z.B. einen Stahldraht, so scheint die Annahme vernünftig, dass die radiale Komponente der Momentangeschwindigkeit ihr Vorzeichen umdreht und die Tangentialkomponente konstant bleibt, d.h. die Pendelmass elastisch am Kreis reflektiert wird. Wie setzt sich also die Bahn fort?

Die im Folgenden dargestellten Bahnen wurden rein numerisch berechnet mit der höchsten Genauigkeit, welche mein einfaches BASIC-Programm zuließ.

3.9

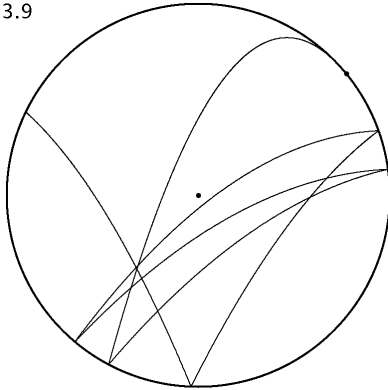


Abbildung 3: Die ersten sechs Parabel-Äste der Bahn eines Fadenpendels mit Parameter $f = 3.9$ (Zahl oben links im Bild). Der Pendelkörper löst sich oben rechts beim fetten Punkt vom Kreis und wird dann "am Kreis vollkommen elastisch reflektiert", wenn sich der Pendelfaden spannt.

3.9

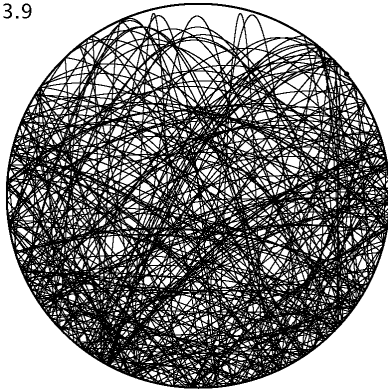


Abbildung 3: Die Bahn von Abb. 3 fortgesetzt bis zu 300 Parabel-Ästen. Mit Parameter $f = 3.9$ kann die Pendelmasse nach dem Energiesatz bis zur Höhe $f/4 = 97.5\%$ des Kreisdurchmessers hochsteigen.

Und natürlich gibt es auch periodische Lösungen:

3.5

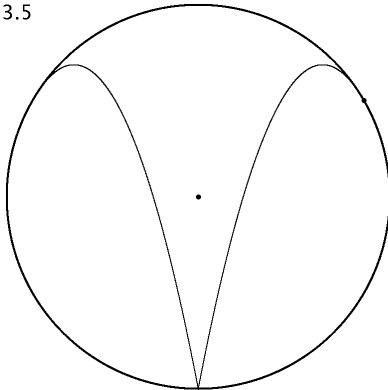


Abb. 4: Periodische Lösung mit einer Reflexion.

3.68902

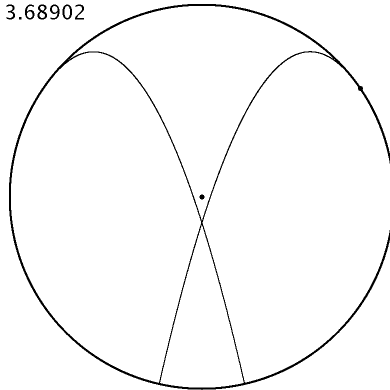


Abb. 5: Periodische Lösung mit zwei Reflexionen.

In den folgenden Bildern ist die zeitliche Dichte der Positionen als Grauwert codiert.

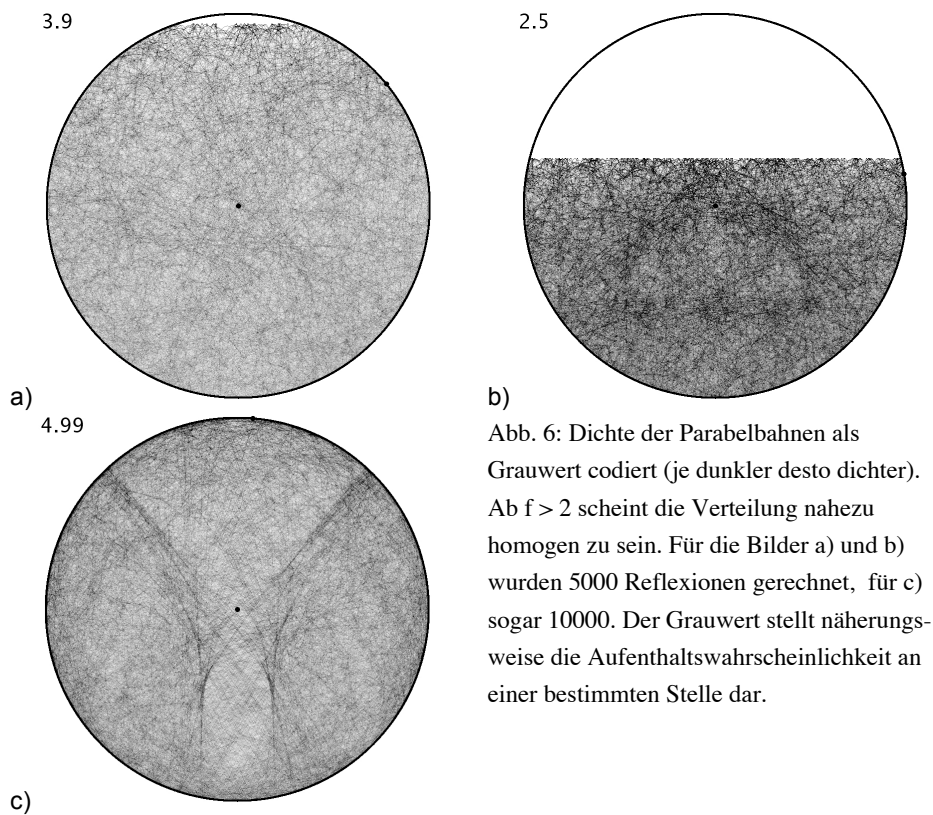


Abb. 6: Dichte der Parabelbahnen als Grauwert codiert (je dunkler desto dichter). Ab $f > 2$ scheint die Verteilung nahezu homogen zu sein. Für die Bilder a) und b) wurden 5000 Reflexionen gerechnet, für c) sogar 10000. Der Grauwert stellt näherungsweise die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an einer bestimmten Stelle dar.

Ich bin mir aber gar nicht sicher, ob die in Abb. 6 beobachtbaren Strukturen "mathematisch real" sind, oder lediglich Artefakte der Numerik beziehungsweise Statistik darstellen. Das System scheint hoch chaotisch zu sein. Immerhin zeigt Abb. 6b eine scharfe Obergrenze der möglichen Steighöhen, d.h. die Gesamtenergie der Pendelmasse scheint sich nicht gross verändert zu haben.

Mein Computerprogramm rechnet mit ca. 16 signifikanten Stellen. Eine winzige Änderung, hier eine Vergrößerung des Parameters f um eine Einheit in der hintersten Stelle, hatte bereits zur Folge, dass sich zwei Bahnen nach fünfzig Reflexionen komplett unterschieden.

Eine Diskussion der Bewegung ohne Reflexion findet man in Am.J.Phys., Vol. 74, Sept. 2006, p. 784-788. Dort wird der Pendelfaden perfekt unelastisch modelliert.

Martin Lieberherr, 8. 8. 08



La statistica da Stefano Franscini all'insegnamento liceale

Una giornata di studio della CMSI organizzata a Savosa il 6 marzo 2009

La Commissione di matematica della Svizzera italiana CMSI ha organizzato, in collaborazione con l'Ufficio dell'insegnamento medio superiore del Cantone Ticino e con il sostegno del Collegio dei direttori delle scuole medie superiori, una giornata di studio presso il Liceo 2 di Lugano per ricordare Stefano Franscini, lo statista e statistico ticinese, nel 150-esimo della morte, che coincideva con il 300-esimo della nascita di Euler, a cui era stata dedicata l'attività del 2007. La giornata ha avuto luogo il 6 marzo scorso e vi hanno partecipato ben 44 docenti delle scuole medie superiori (SMS), per lo più di matematica.

Tre personalità di spicco hanno accettato di intervenire quali relatori e hanno offerto un ottimo contributo alla riuscita della giornata: lo storico dott. Raffaello Ceschi, rinomato studioso in particolare del Franscini, il prof. Elvezio Ronchetti, docente presso l'Università della Svizzera Italiana e l'Università di Ginevra, e il dott. Paul-André Salamin, responsabile del Servizio di metodologia statistica dell'Ufficio federale di statistica (UST).

La direzione del liceo che ci ha ospitati ha fatto allestire nell'atrio un'esposizione ricca e ben curata di testi ed estratti del Franscini e sulla statistica in generale: un'iniziativa che è stata molto apprezzata.

La CMSI ha quindi potuto stilare un bilancio lusinghiero della giornata, sia per la partecipazione sia per i suggerimenti raccolti per la trattazione degli argomenti nell'ambito dell'attività didattica nelle SMS.

La giornata si è articolata in quattro momenti (nei primi due erano presenti anche alcune classi):

Stefano Franscini, statistica e politica, statistica e nazione (dott. Raffaello Ceschi)

Dopo un breve richiamo alla vita del Franscini, il relatore ha presentato, con esempi e citazioni anche divertenti e spesso ancora attuali, la statistica del tardo Settecento e del primo Ottocento: una pratica sospetta, una scienza amatoriale, descrittiva, approssimativa, provvisoria, una scienza aritmetica e non matematica. Ne ha illustrato gli orientamenti in Italia, nell'Europa francofona, in Svizzera.

Si è soffermato sulla *Statistica della Svizzera* del 1827 e sulla *Nuova statistica della Svizzera* del 1847 in cui Franscini propone un bilancio della **nazione** svizzera. Ha ricordato la nascita della statistica nazionale con il primo censimento federale della popolazione (1850), elaborato per la maggior parte dallo stesso Franscini; l'UST è nato invece solamente tre anni dopo la sua morte.

Il ruolo delle scienze statistiche nella società moderna (prof. dott. Elvezio Ronchetti)

Dopo un breve richiamo ad alcune tappe storiche, il relatore ha elencato i principali oggetti della statistica nei campi più disparati ed ha tratteggiato i più importanti compiti dello statista.

Ha presentato gli esempi di tre situazioni reali, ritenendo che il cittadino debba essere in grado di capire o almeno di porsi delle domande su notizie corredate di dati statistici: gli effetti di una campagna di prevenzione stradale sulla diminuzione del numero di morti in Ticino, il sistema di reclutamento (*lottery draft*) usato dagli Stati Uniti e il disastro del Challenger.

Ha terminato con tre affermazioni: ragionare statisticamente è necessario nella società dell'informazione; semplici modelli statistici possono aiutare a valutare criticamente affermazioni basate su dati; taluni aspetti della statistica possono essere introdotti nelle scuole per il tramite di esempi relativamente semplici.

Alcuni sviluppi recenti nella metodologia statistica (prof. dott. Elvezio Ronchetti)

In questa sua seconda conferenza, riservata ai docenti, il relatore ha mostrato alcuni modelli statistici per le serie storiche ed ha presentato il metodo *bootstrap*.

L'esempio che ha accompagnato il primo punto (le serie storiche) è stato quello della variazione mensile del rendimento dei titoli di Stato USA.

Il relatore ha poi parlato della simulazione di un modello attraverso la generazione di variabili aleatorie ed ha mostrato, in generale e in dettaglio, la previsione del corso del cambio mensile euro-dollaro per il 2000 in funzione dei valori dei dieci anni precedenti: tranne in alcuni casi, la previsione era corretta.

Sempre con il metodo *bootstrap*, ha valutato l'influsso di alcuni parametri sullo stipendio degli impiegati di una ditta.

Due le conclusioni del suo esposto: che i metodi statistici sono uno strumento potente per l'analisi e la predizione e che è necessaria una continua interazione tra gli sviluppi teorici (metodologici) e la simulazione con il calcolatore.

Une excursion dans la théorie des sondages (dott. Paul-André Salamin)

Il relatore ha presentato i concetti di base della teoria dei sondaggi e i problemi che si pongono nelle relazioni che li legano. Ha introdotto il concetto di strategia e di buona strategia ed ha presentato la strategia di base: quella fondata sullo stimatore di Horvitz-Thompson. Esempi e dimostrazioni hanno corredato questa prima parte.

Nella seconda parte ha presentato il campionamento aleatorio semplice, l'algoritmo per costruirlo e le sue caratteristiche. Un esempio è servito da guida per mostrare l'applicazione pratica di definizioni e proprietà. Ha parlato dell'influenza della dimensione del campione sulla qualità del sondaggio e del campionamento a strati.

Ha poi accennato alla riponderazione dei pesi e della loro calibrazione.

Infine si è soffermato sul problema delle risposte mancate: come vanno prese in considerazione e come si può stabilire se il modo di trattarle è corretto.

Considerazioni sulle possibili applicazioni didattiche

Dalle presentazioni si possono ricavare alcune considerazioni:

- ragionare in modo statisticamente corretto è necessario nella società dell'informazione;
- semplici modelli statistici possono aiutare a valutare criticamente affermazioni basate su dati;
- taluni aspetti della statistica possono essere introdotti nelle scuole per il tramite di esempi relativamente semplici;
- i metodi statistici sono uno strumento potente per l'analisi e per la predizione;
- è necessaria una continua interazione tra gli sviluppi teorici e la simulazione con il calcolatore;
- la statistica ha il vantaggio di far toccare con mano agli allievi che l'interdisciplinarietà è fondamentale.

Se si vuole portare questi argomenti nelle SMS – ciò che è possibile a condizione di rinunciare a trattazioni troppo teoriche – bisognerà operare dei tagli nei programmi attuali (l'opzione "nessuna statistica alle SMS" è difficile da sostenere, visto che essa assume sempre più importanza in tutte le facoltà universitarie). I legami esistenti tra la teoria dei sondaggi e quella delle probabilità potrebbero servire come motivazione per la trattazione. È senz'altro immaginabile un lavoro di maturità specifico sul tema dei sondaggi, con la pianificazione, la realizzazione e l'elaborazione di un'inchiesta condotta dagli allievi.

La giornata di studio, dai contenuti di alto valore, ha pienamente raggiunto i suoi obiettivi: offrire un giro d'orizzonte sulla straordinaria e vasta opera di Stefano Franscini e suggerire un percorso per integrare aspetti legati alla statistica moderna nell'insegnamento della disciplina. La CMSI ritiene che l'organizzazione di simili iniziative sia fondamentale se si vuol conservare un insegnamento di qualità e, incoraggiata dall'interesse dimostrato dai partecipanti e dall'eccellente clima di lavoro, intende proporle anche in futuro.

I responsabili dell'organizzazione
Laura Donati e Arno Gropengiesser
Locarno, aprile 2009



Mathematik entdecken lassen: Maturaarbeiten und andere Gelegenheiten – Ein Bericht über die Weiterbildungsveranstaltung vom 27/28. März 2009 an der Kantonsschule Baden

Gemessen am Unterrichtsanteil des Faches Mathematik ist der Anteil der Maturaarbeiten, die sich einem mathematischen Thema widmen, verschwindend gering. Auch an meiner Schule ist das nicht anders: Mathematiklehrer werden selten als „Coachs“ angefragt und Mathematik spielt bei der Themenwahl der Schüler eine geringe Rolle.

Diese Statistik war für die Organisatoren Meike Akveld, Norbert Hungerbühler und Hansruedi Schneebeli Grund und Motivation genug, diese Weiterbildungsveranstaltung zu organisieren. Ab kommendem Schuljahr erscheint die Maturaarbeit mit einer eigenen Note im Maturazeugnis. Es stellt sich die Frage: Werden noch mehr Schüler ausbleiben, weil sie denken, mit einem mathematischen Thema eine schlechtere Note zu erreichen als mit einem der anderen Themen? **Warum wählen nur so wenige Schüler in ihrer Maturaarbeit ein mathematisches Thema?** Andererseits herrscht an den Universitäten Mangel an Nachwuchs in den Natur-, Ingenieurwissenschaften und in der Mathematik. Das Problem ist also nicht auf die Gymnasien beschränkt, sondern betrifft auch die Hochschulen.

Gerade Letzteres führte zu der Idee Hochschule und Gymnasium an zwei Tagen im Rahmen einer Fortbildungsveranstaltung zusammenzuführen, um über die Frage

Was können wir dagegen tun?

nachzudenken. Den Organisatoren ist es gelungen, Referenten aus beiden Sektoren zu gewinnen, und mit einer interessanten Mischung aus Referaten und Workshops einen Gedankenaustausch in Gang zu bringen. Der Grundsatz war durch den Titel gegeben: Die Teilnehmer sollten einiges entdecken:

Welche Fördermöglichkeiten bestehen bereits?

Für gute Mathematikschüler gibt es bereits viele Fördermöglichkeiten:

Das breite Angebot von *Schweizer Jugend forscht* bietet mit seinen Kurswochen, Treffen und Wettbewerben ganz unterschiedliche Möglichkeit für Schüler, bereits forschend tätig zu sein. Clelia Bieler, die die Organisation in einem Vortrag vorstellte, unterstrich die für die Schüler entstehenden wichtigen Kontakte zu Forschungsinstitutionen und Universitäten.

Hanspeter Kraft kümmert sich im Rahmen seiner Professur an der Universität Basel um mathematisch hochbegabte Schüler. Er gab den Teilnehmern einen lebendigen Bericht von seiner Arbeit mit diesen im normalen Unterricht oft ausgegrenzten und unterforderten Heranwachsenden, die zu ihm an die Universität kommen, um Mathematik zu betreiben.

Im Workshop „Mathematik-Olympiade im Gespräch“ erzählte Robert Brawer von der KS Solothurn, wie er zum ersten Mal eigene Schüler zur Teilnahme an der *Mathematik-Olympiade* vorbereitete. Die gestellten Aufgaben sind auch für Lehrer eine echte Herausforderung, so dass die Arbeit mit den Schülern auf einer neuen Ebene stattfinden muss: Lehrer und Schüler werden zum Team. Darüber hinaus machten die Teilnehmer Bekanntschaft mit Dimitry Wyss und Thomas Huber. Sie haben als Schüler beide erfolgreich an der Olympiade teilgenommen und sind inzwischen selbst verantwortlich für die Durchführung des Wettbewerbs in der Schweiz und der dazu angebotenen Vorbereitungskurse. Sie haben zum Ziel, mehr Schüler für die Teilnahme zu begeistern, und ermuntern die Lehrer, in Frage kommende Schüler direkt anzusprechen. Den Schülern empfehlen sie, mitzumachen ohne zu hohe Erwartungen an sich selbst zu stellen.

Auf Entdeckungsreise in die Mathematik mit ca. 70 Jugendlichen begibt sich wöchentlich Anna Beliakova: Die *Junior Euler Society (JES)* ist ein Angebot, das allen interessierten Mittelschülern offen steht, die sich mit mathematischen Fragestellungen ausserhalb des regulären Unterrichts beschäftigen wollen, ohne dass sie spezielle Vorkenntnisse brauchen. Die Verantwortliche berichtete über konkrete Fragestellungen aus der Logik, die mit den Schülern besprochen werden. Sie sieht sich nicht in Konkurrenz zum „normalen“ Unterricht, sondern betont die Chance für die Schüler, mit Gleichgesinnten an mathematische Fragen heranzugehen,

sozusagen in einem Umfeld, in dem Spass an der Mathematik zu haben salonfähig ist. Bislang gibt es dieses Angebot am Realgymnasium Rämibühl bzw. an der Universität Zürich.

Dagegen steht ein Wettbewerb, der sich an das gesamte Leistungsspektrum der Schüler wendet: *Der Känguru Wettbewerb*. Dieser findet jährlich statt und ist bereits ein grosser Erfolg in der Schweiz. Werner Durandi informierte die Teilnehmer über den Ablauf und stellte die originellen Multiple-Choice Aufgaben vor.

Alle bisher genannten Angebote fördern den Spass und das Interesse am Fach Mathematik und können für den ein oder anderen der Auslöser sein, sich, zum Beispiel in einer Maturaarbeit, intensiver einem mathematischen Thema zu widmen.

Eine konkrete Unterstützung beim Verfassen und Begleiten einer Maturaarbeit im Fach Mathematik (generell in den Naturwissenschaften) bieten die Patenschaften vieler Schweizer Universitäten: Sie sind Chance und Gewinn sowohl für den Schüler, der Einblick in die Universität bekommt, als auch für die betreuende Lehrkraft, die vom fachlichen Austausch profitieren kann. Noch wird dieses Angebot eher selten in Anspruch genommen, ist es doch auch mit einiger Organisation verbunden. N. Hungerbühler stellte den Teilnehmern die nötigen Links und Kontaktadressen vor und erklärte, wie der Verlauf einer solchen Patenschaft konkret aussehen könnte.

Was könnten geeignete Themen für Maturaarbeiten im Fach Mathematik sein?

In ihren zwei Referaten stellten Hans Rudolf Künsch und Stephan Scheidegger die Möglichkeiten der Themenwahl bei einer Maturaarbeit in Stochastik bzw. im Gebiet der dynamischen Systeme vor. Beide Themen eignen sich ganz besonders dafür, so unterstrichen die Vortragenden, die Schüler eigenständig forschen zu lassen und somit die im Maturaarbeitsreglement verlangte Eigenleistung zu erbringen. In den zugehörigen Workshops vertieften die Referenten ihre Ideen. Der Workshop von Hansruedi Schneider gab einen Überblick über mögliche Themen von Maturaarbeiten in experimenteller Mathematik. Bereits ausgeführte Maturaarbeiten wurden vorgestellt.

Die Workshops beschäftigten sich zudem mit der Frage:

Wie kann man Maturaarbeiten im Fach Mathematik anregen bzw. Schüler motivieren, sich an ein naturwissenschaftliches Thema zu wagen?

Alfred Vogelsanger gab in Referat und Workshop einen Einblick in seinen Unterricht: Dort integriert er regelmässig Preis- bzw. Wochenaufgaben, die wie kleine Projekte von den Schülern über einen bestimmten Zeitraum zu bearbeiten sind und die bereits zu Maturaarbeiten geführt haben. Markus Kriener gab zusammen mit einem ehemaligen Schüler Clemens Pohle Anleitung, wie man Problemlöseverhalten bei Schülern formen und trainieren kann: ideale Voraussetzungen für die Anforderungen, die Maturaarbeiten mit sich bringen.

Herbert Hunziker von der Alten KS Aarau zeigte am Beispiel einer Schülerin auf, wie eine Betreuung durch die Maturaarbeit ganz konkret aussehen kann. Die Schülerin stellte ihre Maturaarbeit vor und formulierte Erwartungen, die von Schülerseite aus an eine betreuende Lehrkraft gestellt werden, wie Zuverlässigkeit, regelmässige Rücksprachen und positiv eingestellte Unterstützung. Auch im Workshop von Meike Akveld kamen Schüler zu Wort. Gleich drei inzwischen Studierende naturwissenschaftlicher Fächern berichteten, wie sie auf das von ihnen gewählte Thema gekommen sind, warum sie es ein Thema aus Mathematik oder Informatik war, wie sie mit Rückschlägen umgegangen sind, wie mit dem Zeitfenster, wie viele Stunden sie investiert haben und ob es sich gelohnt hat. Meike stellte die Fragen und so individuell wie die Schüler waren auch ihre Antworten. Gemeinsam war ihnen aber, dass sie alle stolz auf ihre Arbeit zurückblicken, die Arbeit als einen Gewinn betrachten, vor allem im Hinblick auf das selbständige Arbeiten.

Als Antwort auf die Grundfrage des Workshops waren die Schüler geschlossen der Meinung, dass die Lehrkräfte Initiative ergreifen und von sich aus Ideen für Maturaarbeitsthemen

vorschlagen sollten. Gegebenenfalls sollten sie Schüler direkt ansprechen, denen eventuell der Mut fehlt.

Was können wir in Zukunft tun?

Am Schluss der Veranstaltung wurde in drei Gruppen nach Ideen für die Zukunft gesucht: Es besteht die einhellige Meinung, dass der Kontakt zwischen Gymnasium und Universität weiter intensiviert werden soll. Für 2010 oder 2011 ist bereits eine Nachfolgeveranstaltung angeregt worden, um den Erfahrungsaustausch fortzusetzen.

Es wurde darauf hingewiesen, dass in der Mathematiklehrerausbildung die Betreuung von Maturaarbeiten unbedingt thematisiert werden sollte, damit Junglehrer nicht ohne Vorbereitung in eine Maturaarbeitsbetreuung gehen oder sich womöglich gar nicht daran wagen. Darüber hinaus sollten sie die Möglichkeit bekommen, bei der erstmaligen Betreuung einer Maturaarbeit eine Patenschaft mit einem erfahrenen Kollegen zu knüpfen.

Auf der SMG-Webseite soll eine kommentierte Datenbank mit referierten Maturaarbeiten sowie Ergänzungs- und weiteren Themenvorschlägen eingerichtet werden sowie im Bulletin des VSMP eine Rubrik über Maturaarbeiten erscheinen.

Es wurde weiter angeregt, ein ansprechendes Informationsplakat zu Maturaarbeiten in Mathematik zu kreieren, welches in den Schulen aufgehängt werden kann und auf diese Weise auch auf die Möglichkeit der Patenschaften aufmerksam macht.

Was nehme ich von dieser Veranstaltung mit in die Schule?

Die Veranstaltung hat in jedem Fall Mut gemacht, sich auf Maturaarbeiten in Mathematik einzulassen und die damit verbundene Herausforderung anzugehen. Ich werde auf jeden Fall aktiver für mathematische Themen an unserer Schule werben.

Das gute Gelingen der Weiterbildungsveranstaltung verdanken wir vor allem den Organisatoren aber auch den vielen Teilnehmern, die in Referat und Workshop selber aktiv wurden, und der finanziellen Unterstützung von der SMG respektive SCNAT und der DMK.

Kerstin Quatember, Mai 2009

Optionen, eine Schnittstelle zwischen Wirtschaft und Mathematik

Oder: Wie hätte man dank UBS Aktien reich werden können?

Claudius Behr

Seit einiger Zeit steht die UBS im Rampenlicht der Kritik. Der Aktienkurs ist in den letzten zwei Jahren in den Keller gefallen und hat Anfang März 2009 einen Tiefstand von weniger als CHF 10 erreicht. Viele Leute verloren deswegen Geld, einige vermochten sich zu bereichern. Wie ist das gleichzeitig möglich? Wie kann sich ein Aktionär gegen massive Kurseinbrüche, wie es im Fall der UBS zwischen Juni 2007 und Januar 2009 geschehen ist, schützen (siehe Abb. 1)?



Abb. 1: Aktienkurs UBS seit April 2005, Quelle: Swissquote.ch

Eine private Aktiengesellschaft öffnet sich dem Kapitalmarkt, um mehr Kapital für unternehmerische Tätigkeiten zur Verfügung zu haben und um das Kapitalrisiko zu diversifizieren.¹ Die Unternehmung verteilt so die finanziellen Bedürfnisse des Unternehmens auf mehrere Schultern. Der Verkauf von Anteilen (Aktien) der Unternehmung ist eine Variante, um das Unternehmen zu finanzieren. Die Kapitalgeber (Aktionäre) nehmen dadurch aber keine Unternehmerfunktionen wahr. Personen mit relativ geringem Vermögen können sich durch den Erwerb von Aktien am Unternehmensresultat beteiligen. Dieses widerspiegelt sich besonders in der Dividende. Kleinaktionäre haben aber kaum einen direkten Einfluss auf den Aktienkurs. Erst der zukünftige Verlauf des Aktienkurses wird dem Aktionär zeigen, ob sich seine Investition gelohnt hat.² Um sich vor Kurseinbrüche zu schützen, bietet der Kapitalmarkt so genannte **Optionen** an.

¹Image- und Werbeeekte können ebenfalls Beweggründe eines *Initial Public Offering* sein.

²Sinngemäss aus [3] Seiten 335-337 übernommen.

Optionen sind Verträge zwischen zwei Parteien. Der eine Vertragspartner, der Käufer (Inhaber) der Option, erhält das Recht (aber nicht die Pflicht),

- ein festgelegtes Gut (*Basisgut*),
- in einer vereinbarten Menge (*Kontraktgrösse*),
- zu einem festgelegten Preis (*Ausübungspreis*),
- in einem festgelegten Zeitraum (*Ausübungsfrist*) oder einem festgelegten Zeitpunkt (*Ausübungstermin*)

zu kaufen oder zu verkaufen. Wird das Recht zu kaufen vereinbart, handelt es sich um eine Call Option; sonst um eine Put Option.³ Der andere Vertragspartner, der Verkäufer (Stillhalter) der Option, übernimmt die Pflicht, das Basisgut in der vereinbarten Menge, zum vereinbarten Ausübungspreis zu verkaufen (Call Option) bzw. zu kaufen (Put Option), falls der Inhaber sein Recht beansprucht und die Option ausübt. Für das erhaltene Recht zahlt der Inhaber dem Stillhalter eine Prämie, den Optionspreis.

Bevor ein Modell zur Bestimmung dieses Optionspreises vorgestellt wird, sollen mit Hilfe der UBS Aktie verschiedene Szenarien erläutert werden, wie Optionen eingesetzt werden. Die folgenden vier Fälle sind frei vom Autor erfunden. Das Zahlenmaterial entspricht, abgesehen vom Optionspreis, den realen Börsenkursen an der Schweizer Börse. Um den Effekt, den Optionen bewirken, besser hervorheben zu können und die Rechnungen einfach zu halten, werden Transaktions- und Opportunitätskosten sowie die Dividende in den verschiedenen Berechnungen nicht berücksichtigt. Aus demselben Grund wird ein Zeitfenster gewählt, in dem die UBS Aktie einen massiven Einbruch erlitten hat und dies nicht auf den ersten Blick aus dem historischen Trend ersichtlich gewesen wäre. Das Vertragsvolumen ist in allen Beispielen sehr klein und nicht repräsentativ für die realen Transaktionen zwischen Finanzinstitutionen.

Szenario 1: Herbst 2005. Herr A kauft am 1. September 500 UBS Aktien zu je CHF 47.88. Er investiert somit CHF 23'940 in die UBS. Da er sich nur wenig für das Börsengeschehen interessiert aber das Geld nicht einfach auf dem Sparkonto lassen will, verfolgt er die Strategie *buy and hold*. Als der Kurs der UBS Aktie am 1. Juni 2007 bei einem Kurs von CHF 74.7 schloss, hat er nichts davon mitbekommen. Berücksichtigt man die Kosten nicht, hätte er einen Gewinn von CHF 26.82 pro Aktie erzielt; insgesamt also CHF 13'410. Die Rendite von etwa 56% innerhalb von zwei Jahren wäre bemerkenswert gewesen. Herr A ist heute immer noch Besitzer von 500 UBS Aktien. Am 15. April 2009 schloss der Kurs bei CH 13.29. Das vor knapp vier Jahren investierte Kapital hatte am 15. April lediglich einen Wert von CHF 6'645. Da Herr A das Geld in den nächsten Zeit leider brauchen wird, muss er die Aktien wohl oder übel verkaufen. Er wird folglich einen massiven Verlust in Kauf nehmen müssen.

Szenario 2: Herbst 2007. Frau B hat im September vor zwei Jahren 500 UBS Aktien zu je CHF 47.88 gekauft und folglich CHF 23'940 investiert. Frau B entschloss sich eine berufliche Auszeit zu nehmen und während sechs Monaten die südliche Halbkugel zu bereisen. Im Verlauf von dieser Zeit wollte sie sich nicht um finanzielle Angelegenheiten kümmern. Der UBS Aktienkurs schloss am 3. Oktober, kurz vor der Abreise, bei CHF 62.89. Leider verpasste Frau B den idealen Verkaufszeitpunkt (Juni 2007). Sie glaubt aber, dass sich der Kurs erholen wird und verkauft ihre Aktien nicht. Sie möchte sich aber während der Zeit ihrer Abwesenheit vor weiteren Kurseinbrüchen absichern. Sie kauft daher 500 Put Optionen auf UBS Aktien mit einer Laufzeit von sechs Monaten mit Ausübungspreis CHF 60.

³Sinngemäss aus [1], Seite 109.

Dieser Optionsvertrag sichert ihr das Recht, während der Laufzeit die 500 UBS Aktien zu je CHF 60 zu verkaufen, egal wie der Aktienkurs sein wird. Der Verkäufer der Put Option muss, falls sie es wünscht, die Aktien zu diesem Preis kaufen. Für dieses Recht bezahlt Frau B zwar eine „Versicherungsprämie“ (Optionspreis) von CHF 1.5 je Option, sichert sich aber durch dieses Verkaufsrecht einen Gewinn von $12.12 - 1.5 = 10.62$ CHF je Aktie. Liegt der Kurs nach ihrer Weltreise über CHF 60, so wird sie ihre Aktien auf dem Kapitalmarkt verkaufen und ihr Recht nicht ausüben. Ihre Versicherungsprämie von $1.5 \cdot 500 = 750$ CHF wäre in diesem Fall schlecht investiert gewesen.

Am 25. März 2008 kommt Frau B von ihrer Reise zurück. Der Kurs der UBS Aktie liegt bei CHF 28.2. Dies kümmert Frau B weniger. Sie nimmt ihr Recht wahr und verkauft ihre 500 UBS Aktien zu CHF 60 dem Stillhalter. Sie kann auf diese Weise einen Gewinn von $10.62 \cdot 500 = 5'310$ CHF verbuchen.

Szenario 3: Herbst 2007. Herr C arbeitet für die *Spekulation AG* und verfügt über das Recht, im Namen der Unternehmung mit Optionen zu handeln. Nach seinen Einschätzungen sollte der Kurs der UBS Aktie in der nächsten Zeit mehr oder weniger stagnieren. Grosse Kursveränderungen sollten in den nächsten sechs Monaten keine stattfinden und wenn, dann eher nach oben. Deshalb beschliesst Herr C 500 Put Optionen auf UBS Aktien zu einem Ausübungspreis von CHF 60 und einer Laufzeit von sechs Monaten zu verkaufen. Er erhält dafür CHF 1.50 pro Option, also CHF 750. Zugleich übernimmt er auch die Pflicht, 500 UBS Aktien zu einem Preis von CHF 60 zu kaufen, wenn der Käufer dieser Optionen es wünscht. Fällt der Aktienkurs während der Laufzeit nicht unter CHF 58.5, so kann er einen Gewinn verbuchen.

Ende März liegt der Kurs unter CHF 30. Der Käufer der Option übt sein Recht aus und Herr C muss im Namen des Unternehmens 500 UBS Aktien zu CHF 60 kaufen. Die im Herbst eingenommen CHF 750 schmälern die Ausgaben von CHF 30'000 nur geringfügig. Herr C hat die 500 Aktien am 1. April 2008 dem Markt zum Tageshöchstkurs von CHF 30.67 wieder verkauft und so den Schaden um weitere $500 \cdot 30.67 = 15'335$ CHF reduzieren können. Das Finanzgeschäft von Herr C brachte eine Rendite von ungefähr -46% ; und dies lediglich innerhalb eines halben Jahres.

Szenario 4: Herbst 2007. Frau D interessiert sich nicht für die UBS AG und möchte auch nicht Aktionärin werden. Sie ist ausschliesslich daran interessiert, Geld zu verdienen. Laut ihren persönlichen Einschätzungen glaubt sie, dass die UBS Aktie mit CHF 62.89 immer noch überbewertet ist und spekuliert auf eine Kurskorrektur. Sie beschliesst daraufhin Put Optionen auf die UBS Aktie zu kaufen. Der Vertrag gibt ihr das Recht, während sechs Monaten 500 UBS Aktien zu einem Preis von CHF 60 zu verkaufen. Sie bezahlt dafür einen Optionspreis von CHF 1.5 je Option. Liegt der Kurs während dieser Zeitspanne nie unter CHF 60 hat Frau D falsch spekuliert und muss die CHF 750 als Verlust verbuchen und eine Rendite von -100% verkraften.

Ende März 2008 liegt der Kurs unter CHF 30. Frau D möchte nun ihr Recht ausüben. Da sie nicht Aktionärin ist, kauft sie zuerst am 31. März zum Tagestiefstkurs auf dem Markt die 500 UBS Aktien zu CHF 25.77. Das für die Transaktion nötige Geld borgt sie sich bei einer Bank. Danach verkauft sie die Aktien dem Stillhalter zu CHF 60 je Aktie. Sie macht einen Gewinn von $60 - 25.77 - 1.5 = 32.73$ CHF pro Aktie. Also insgesamt einen Gewinn von CHF 16'365. Die Rendite von $\frac{60 - 1.5 - 25.77}{25.77 + 1.5} \approx 1.20 \equiv 120\%$ ist ausserordentlich.

Nachdem nun zwei Einsatzmöglichkeiten einer Put Option aufgezeigt wurden (Spekulation und Absicherung), soll der Frage nachgegangen werden, wie viel ein Optionskäufer für das vertraglich gesicherte Recht dem Stillhalter bezahlen muss. Dafür soll von einem konkreten Fall ausgegangen werden: Die Bank Julius Bär & Co. AG in Zürich publizierte am 4. März 2008 ein Kotierungsinserat vor der Einführung an der SWX Swiss Exchange mit unter anderem folgenden Angaben:

Anzahl Optionen:	10'000'000 Call Optionen
Optionsrecht:	10 Optionen berechtigen zum Bezug einer Namenaktie der UBS AG von CHF 0.10 Nennwert
Emissionspreis:	CHF 0.39 je Option (indikativ)
Liberierungsdatum:	14. März 2008
Ausübungsfrist:	14. März 2008 - 19. September 2008, 12:00 Uhr
Ausübungspreis:	CHF 30.00

Der Kurs der UBS Aktie schloss am 7. März 2008 an der Schweizer Börse bei einem Kurs von CHF 28.2. Ein Käufer der oben beschriebenen Optionen erwartete also einen Kursanstieg. Die Bank Julius Bär & Co. AG spekulierte auf stagnierende oder fallende Preise. Sollte die Bank alle Optionen verkaufen können und keiner der Optionskäufer sein Recht ausüben, verdient die Bank mit diesem Finanzgeschäft CHF 3.9Mio. Wir wollen uns nun nicht dem Gewinn oder dem Verlust der Bank oder des Inhabers widmen, sondern die folgende Frage beantworten: Aufgrund welcher Informationen oder Einschätzungen konnte die Bank Julius Bär & Co. den Emissionspreis der Option auf CHF 0.39 festlegen?

Der Wert einer Option hängt grundsätzlich von vier Parametern ab: Der (verbleibenden) Laufzeit, dem Ausübungspreis, dem Kurs des Basistitels und der Volatilität des Kurses des Basistitels. Für eine Call Option gelten folgende qualitative Beziehungen zwischen diesen vier Variablen: Verkürzt man die Laufzeit ceteris paribus der Option, so sollte die Option billiger werden, da die Wahrscheinlichkeit fällt, dass die Option gewinnbringend ausgeübt werden kann. Je höher der Ausübungspreis, umso billiger sollte die Call Option sein. Fällt der Kurs des Basisguts ceteris paribus, so sollte der Preis der Option ebenfalls sinken, da die Wahrscheinlichkeit dadurch fällt, dass die Option gewinnbringend ausgeübt werden kann. Je höher die Volatilität des Basistitels, umso wahrscheinlicher sind sehr hohe respektive sehr tiefe Kurse. Deshalb sind Optionen auf Basistitel mit hoher Volatilität teurer als Optionen auf Basistitel mit kleiner Volatilität.

Da im Wesentlichen der Kurs des Basistitels entscheiden wird, ob die Option ausgeübt werden wird oder nicht, scheint es unumgänglich zu sein, den zukünftigen Verlauf des Kurses des Basistitels zu prognostizieren. Da aber Inhaber und Stillhalter einer Call Option entgegengesetzte Erwartungen auf den zukünftigen Verlauf des Aktienkurses haben, macht es keinen Sinn, mit Wahrscheinlichkeiten zu arbeiten und so verschiedene Aktienkursverläufe zu entwerfen. Damit Käufer und Verkäufer mit der zukünftigen Verlaufsprognose einverstanden sind, muss man mit Fakten arbeiten.

Das folgende Modell zur Bestimmung des Aktienkurses der UBS Aktie basiert auf folgenden Annahmen:⁴

- Die Zeit ist diskret.
- Der Kurs der Aktie ändert am Ende der Periode und kann nur zwei Werte annehmen: Er kann um einen gewissen Prozentsatz steigen oder um einen gewissen Prozentsatz sinken.
- Die Prozentsätze sind über die Perioden hinweg konstant.
- Die einzelnen Schritte von Periode zu Periode sind voneinander unabhängig.

Im folgenden soll eine Zeiteinheit einen Monat betragen. Die sechsmonatige Laufzeit der Call Option auf UBS Aktien wird also in sechs Perioden unterteilt. Um die im zweiten und dritten Punkt erwähnten Prozentsätze zu ermitteln, greift man auf die historischen Daten des Aktienkurses zurück und berechnet daraus die durchschnittliche (monatliche) Rendite und die zugehörige Standardabweichung. Da es sich dabei um sichere und öffentliche Daten handelt, sind sowohl Stillhalter als auch Inhaber der Option mit den Daten einverstanden.

Für den Verlauf des UBS Kurses geht man dabei wie folgt vor:

1. Erfassen der Aktienkurse des letzten Jahres:

Datum	1. Feb. 07	1. März	2. April	1. Mai	1. Juni	2. Juli	1. Aug.
Kurs CHF	73.49	67.23	67.51	73.91	74.7	68.68	63.08
Datum	3. Sept.	1.Okt. 07	1.Nov.	3. Dez	3. Jan. 08	1. Feb.	3. März
Kurs CHF	58.97	60.23	55.23	52.43	47.53	41.46	31.02

2. Bestimmen der monatlichen (linearen) Renditen in Prozent:

Datum	1. März 07	2. April	1. Mai	1. Juni	2. Juli	1. Aug.	3. Sept.
Rendite in %	-8.52	0.42	9.48	1.07	-8.06	-8.15	-6.52
Datum	1. Okt.	1.Nov.	3. Dez	3. Jan. 08	1. Feb.	3. März	
Rendite in %	2.14	-8.3	-5.07	-9.35	-12.77	-25.18	

3. Berechnen des Mittelwerts (Drift) μ und der Standardabweichung σ der Renditen r_i mit $i = 1, \dots, 13$:

$$\mu = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} r_i \approx -0.06062308 \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (\mu - r_i)^2} \approx 0.08055626$$

Der Drift liegt bei ungefähr -6.06%. Die Standardabweichung lässt sich als Mass für die Volatilität des Aktienkurses benutzen. Sie liegt bei ungefähr 8.06%.

4. Bestimmen des „Wachstumsfaktors“ pro Periode: $u = 1 + \mu + \sigma \approx 1.019933$ und des entsprechenden „Schrumpfungsfaktors“: $d = 1 + (\mu - \sigma) \approx 0.85882$.
5. Erstellen des zukünftigen Verlaufs bis zum Verfalldatum (siehe Abb. 2).

⁴Das hier vorgestellte Binomialmodell zur Berechnung des Optionspreises wurde 1979 von Cox, Ross und Rubinstein entwickelt.

Der Wachstumsfaktor kann kleiner als 1 sein und der Schrumpfungsfaktor kann grösser als 1 sein. Dies ist besonders dann der Fall, wenn σ relativ zu μ klein ist.⁵ Der in der Abbildung 2 dargestellte Aktienverlauf ist hypothetisch und basiert auf den zu Beginn erwähnten Annahmen. So widerspiegelt sich die erste Annahme (diskrete Zeit) darin, dass die sechs Monate in sechs Schritte unterteilt werden. Die Wachstums- und Schrumpfungsfaktoren sind unbehaftet von irgendwelchen Wahrscheinlichkeiten und werden als konstant angenommen. Nichtsdestotrotz führen die stark vereinfachenden Annahmen zu einem überschaubaren und vor allem, von beiden Vertragsparteien akzeptierten Aktienkursverlauf. Die Zahlen in den Kästchen der Abbildung 2 sind jeweils auf 5 Rappen gerundet worden.

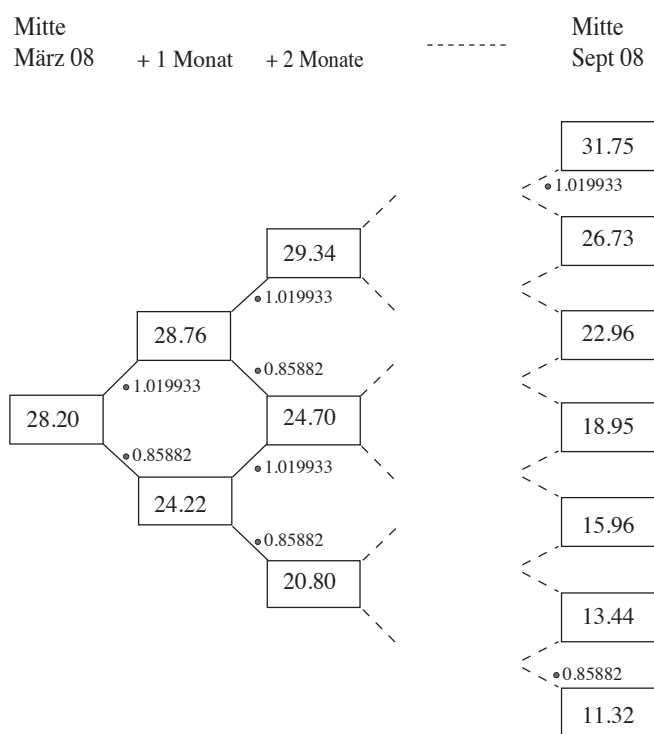


Abb. 2: Prognose Aktienkurs UBS bis September 2008.

Laut diesem Modell wird der Aktienkurs der UBS Mitte September 2008 zwischen CHF 11.35 und CHF 31.70 liegen.⁶ Ist man mit dem Verlauf einverstanden, kann man den Preis der Option kurz vor Ablauf der Ausübungsfrist bestimmen. Möchte man die Option zu diesem Zeitpunkt verkaufen, so könnte man höchstens die Differenz zwischen Aktienkurs und Ausübungspreis dafür verlangen. Dies deswegen, weil die Option zu diesem Zeitpunkt keinen Zeitwert⁷ mehr hat. Man kann ausschliesslich zum Verfallszeitpunkt die Differenz zwischen Ausübungspreis und (momentanem) Aktienkurs als Optionspreis annehmen. Ist die Differenz negativ, so setzt man als Optionspreis den Wert Null fest (letzte Spalte der Abb. 3).

⁵Nimmt man an, dass die Monatsrenditen normalverteilt sind, so kann man davon ausgehen, dass ungefähr 70% der Renditen im Bereich $\mu \pm \sigma$ liegen. Mit der oberen und der unteren Schranke der Renditen, kann man die obere und die untere Schranke der Aktienkurse für die nächste Periode berechnen.

⁶Am 15. September 2008 schloss der Titel bei CHF 20.10. Zu Börsenschluss des 17. Septembers war eine UBS Aktie nur noch CHF 15.70 wert.

⁷Der Zeitwert einer Option ist die Wahrscheinlichkeit, ausgedrückt in Geldeinheiten, dass der Kurs des Basisguts noch in die „richtige“ Richtung verläuft.

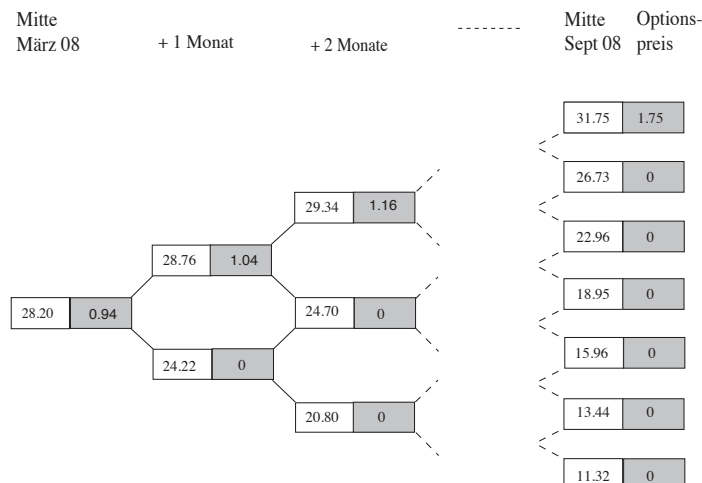


Abb. 3: Berechnete Optionspreise der Call Option (graue Kästchen).

Um nun den Optionspreis für frühere Perioden zu bestimmen, muss auf finanzwirtschaftliche Kenntnisse zurückgegriffen werden.

Folgende Annahmen über den Markt werden die weiteren Schritte beeinflussen:

- An- und Verkauf von Finanzgütern sind jederzeit und in jedem Umfang möglich.
- Wertpapiere sind beliebig teilbar.
- Aktienleerverkäufe und Kreditaufnahmen sind jederzeit und in jedem Umfang möglich.
- Der Zinssatz ist für alle Marktteilnehmer konstant und einheitlich; sowohl für Geldeinlagen als auch für Kredite.
- Es gibt keine Transaktionskosten.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeit (*No-Arbitrage-Prinzip*).

Die erste Annahme bedeutet zum Beispiel, dass die Börse immer offen ist und dass die Marktteilnehmer über unbeschränkte finanzielle Mittel verfügen. Durch die zweite Annahme wird die Variable welche die Anzahl Aktien repräsentieren wird zu einer reellen Variable. Die dritte Annahme bedeutet, dass jeder Marktteilnehmer Aktien leer verkaufen kann. Das heisst, dass man Aktien verkaufen kann, die man aber erst zu einem späteren Zeitpunkt liefern muss.⁸ Durch die letzte Annahme kann man folgenden grundlegenden Schluss für die Optionspreisbestimmung ziehen: Haben zwei Portfolios morgen den gleichen Wert, so haben sie schon heute den selben Wert, unabhängig davon wie sich der Markt von heute auf morgen entwickelt. Angewandt auf die Bestimmung der Call Option auf UBS Aktien bedeutet dies, dass sich zu jedem Zeitpunkt ein Portfolio aus Geld und UBS Aktien erstellen lässt, welches den gleichen Wertverlauf wie die Option durchlaufen wird; egal wie der Markt sich entwickelt.

Dies kann man sich konkret wie folgt für die Bestimmung des Optionspreises zu Nutze machen: Wir erzeugen Mitte August 2008 ein Portfolio aus x Geldeinheiten und y Aktien der UBS AG. Dieses Portfolio hat Mitte August 2008 einen Wert von $x + 31.10y$. Setzt man einen Zinssatz⁹ auf Geld von 0.49% pro Monat fest, so hat dieses Portfolio Mitte September 2009 einen Wert von entweder $1.0049x + 31.70y$ oder $1.0049x + 26.70y$, je nachdem wie sich der Aktienkurs verhält.

⁸Dies ist ein Spekulationsvariante die in Realität auch gemacht wird.

⁹Der Geldmarktsatz lag im März 2008 laut Schweizer Nationalbank bei 2.94% für sechs Monate (London Libor).

Da laut Annahme der Wert des Portfolios sich – unabhängig vom Markt – wie der Optionspreis verhalten soll, müssen folgende zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{cases} 1.0049 \cdot x + 31.70 \cdot y = 1.70 \\ 1.0049 \cdot x + 26.70 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Man erhält daraus einen Geldanteil von $x \approx -9.0337$ und einen Aktienanteil von $y \approx 0.34$.¹⁰ Mit Hilfe dieser Werte, kann man nun den Wert des Portfolios Mitte August bestimmen. Er liegt bei $-9.0337 + 0.34 \cdot 31.10 \approx 1.575$, also bei ungefähr CHF 1.54. Aus der No-Arbitrage-Annahme muss der Optionspreis Mitte August ebenfalls CHF 1.54 betragen. Auf diese Weise rechnet man Schritt für Schritt zurück und erhält den Optionspreis Mitte März. Dieser sollte laut Modell bei ungefähr CHF 0.93 liegen.

Vergleicht man den erhalten Preis mit jenem der Julis Bär & Co. AG so liegt man relativ weit von den CHF 0.39 entfernt. Woran könnte das liegen? Aus den Berechnungen lässt sich erkennen, dass der Optionspreis, bei gegebenem Ausübungspreis und Kurs des Basisguts, durch folgende Variablen beeinflusst wird: Zinssatz für Geld pro Periode, durchschnittliche Rendite, Standardabweichung und Anzahl Perioden. Der Zinssatz wird durch die Nationalbank festgelegt und kann als gegeben betrachtet werden. Doch auch hier wird die Bank Julius Bär & Co. AG ihre eigene Modelle besitzen, um den zukünftigen Zinssatz zu ermitteln. Die durchschnittliche Rendite und die Standardabweichung lassen sich unterschiedlich bestimmen. So kann man zum Beispiel an Stelle von linearen, logarithmische Renditen benutzen. Auch die Anzahl Perioden lassen sich beliebig variieren. Unterteilt man die sechs Monate nicht in sechs, sondern in 50 oder 100 Perioden, nimmt die Genauigkeit zu. Im Grenzfall (kontinuierliche Zeit) erhält man die berühmte Formel von Black & Scholes. Um diesen Schritt zu erklären braucht es aber einen Grenzwertsatz der bereits weiterführende Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussetzt. In einem Mathematik Leistungskurs liesse sich dies jedoch durchführen. Zudem beeinflussen auch Rundungsfehler den Modellpreis relativ stark.

Seit Mitte November 2008 schwankt der Kurs der UBS Aktie zwischen CHF 8.20 (Tiefstwert vom 9. März 2009) und CHF 17.24 (Höchstwert vom 11. November 2008). Am 15. April 2009 schloss der Titel bei CHF 12.36. Wird der Titel fallen? Wird er sich erholen und wieder in die Nähe der Werte vom Mai 2007 gelangen? Um diese Fragen verlässlich beantworten zu können, kann man sich auf keine Modelle stützen. Das Spielfeld ist offen und die Welt der Optionen bleibt ein Nullsummenspiel zwischen Käufer und Verkäufer. Ist man momentan als Kleinaktionär nicht auf das Geld angewiesen, welches man der UBS vor einiger Zeit zur Verfügung gestellt hat, so bleibt wohl kaum eine andere Strategie als *hold and hope*.

Literatur

- [1] Adelmeyer M., *Finanzmathematik für Einsteiger; Von Anleihen über Aktien zu Optionen*, Vieweg, 2. Auflage, 2005, ISBN 3-528-13185-3.
- [2] Adelmeyer M., *Call & Puts; Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht*, DMK, Orell Füssli Verlag, 2000, ISBN 3-280-02701-2.
- [3] Boemle M., *Unternehmensfinanzierung*, Verlag SKV, 12. Auflage, 1998, ISBN 3-286-50022-4.
- [4] Egli M., *Optionen und Futures - Basiswissen; Einführung in derivative Finanzinstrumente*, Verlag SKV, 2000, ISBN 3-286-51191-9.
- [5] Uszczapowski L., *Optionen und Futures verstehen; Grundlagen und neue Entwicklungen*, dtv, 5. Auflage, 2005, ISBN 3-423-05808-0.
- [6] Börseninformationen unter www.swissquote.ch (15. April 2009)
- [7] Zinssätze der Schweizer Nationalbank unter www.sbn.ch/de. (15. April 2009)

¹⁰Der negative Geldanteil bedeutet, dass man Geld aufnehmen muss. Wäre der Aktienanteil negativ, würde man Aktien leer verkaufen.

Das Osterdatum

Heinz Bachmann und Urs Oswald

5. Mai 2009

1 Definition des Osterdatums

Das Datum des als Fortsetzung des jüdischen Passahfestes betrachteten Osterfestes wurde im frühen Christentum definiert als erster Sonntag nach dem ersten Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium. Diese Definition wird auch heute oft verwendet, ist aber (genau genommen) ungeeignet aus 3 Gründen:

1. Der Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums schwankt von Jahr zu Jahr etwas.
2. Die Unregelmässigkeit der Mondbewegung bewirkt, dass der genaue Zeitpunkt des Vollmondes nur unter grossem Rechenaufwand zu bestimmen ist.
3. Die Sonntage treten rund um die Erde zu verschiedenen Zeiten ein, so dass die obige Definition je nach der Lage auf der Erde zu verschiedenen Osterdaten führen kann.

Um eine eindeutige Definition zur Verfügung zu haben, die von der ursprünglichen nicht stark abweicht und eine einfache Berechnung bis in unermessliche Zeiträume hinein ermöglicht, hat man im frühesten Mittelalter den wirklichen Mond durch einen fiktiven ersetzt, den sogenannten *kirchlichen Mond*, und das Frühlingsäquinoktium auf den 20. März festgesetzt. So entstand der *kirchliche Neumondkalender*, der hauptsächlich auf Dionysius Exiguus (6. Jahrh.) zurückgeht. Die *präzisierte Definition* lautete nun, dass Ostern der erste Sonntag nach dem ersten *kirchlichen Vollmond* nach dem 20. März sein soll. An dieser Regel wird im Christentum bis heute festgehalten, sowohl im westlichen als auch im russisch-orthodoxen. Im letzteren wird allerdings der Ostertermin immer noch aufgrund des Julianischen Kalenders berechnet. Für die ersten 20 Jahre des laufenden Jahrhunderts ergeben sich zum Beispiel die folgenden Ostertermine:

Jahr	Westkirche	Ostkirche	Jahr	Westkirche	Ostkirche
2000	23.4.	30.4.	2010	4.4.	4.4.
2001	15.4.	15.4.	2011	24.4.	24.4.
2002	31.3.	5.5.	2012	8.4.	15.4.
2003	20.4.	27.4.	2013	31.3.	5.5.
2004	11.4.	11.4.	2014	20.4.	20.4.
2005	27.3.	1.5.	2015	5.4.	12.4.
2006	16.4.	23.4.	2016	27.3.	1.5.
2007	8.4.	8.4.	2017	16.4.	16.4.
2008	23.3.	27.4.	2018	1.4.	8.4.
2009	12.4.	19.4.	2019	21.4.	28.4.

Diese Daten können mit der Formel (22) berechnet werden; Ziel dieses Artikels ist die Herleitung dieser Formel.

Im westlichen Christentum ist der 22. März der frühestmögliche, der 25. April der spätestmögliche Ostertermin. Für die russisch-orthodoxe Welt lauten die entsprechenden Daten (im laufenden Jahrhundert) 4. April bzw. 8. Mai.

2 Mathematische Vorbemerkungen

Bei den *Daten* schreiben wir meist zuerst den Monat und dann den Tag, also z.B. März 4 für den 4. März, und wir zählen die Tage oft über das Monatsende hinaus, z.B. März 40 = April 9.

Wir bezeichnen mit n natürliche, mit k ganze Zahlen, während x für eine beliebige reelle Zahl steht. Da nicht alle Computerprogramme den Befehl `int` (ganzer Teil) in der klassischen Weise interpretieren (jedenfalls nicht für negative Zahlen), halten wir fest:

Unter dem *ganzzahligen Teil* $\text{int } x$ einer reellen Zahl x verstehen wir hier die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als x ist; somit ist z.B. $\text{int } 3 = 3$; $\text{int } 3,4 = 3$; $\text{int } (-3,4) = -4$.

Unter $x \bmod n$ versteht man den *Divisionsrest* von x bei Division durch n . Es gilt also

$$x \bmod n = x - n \cdot \text{int } \frac{x}{n}, \tag{1}$$

ferner

$$\text{int } (x + k) = \text{int } x + k; \quad (x + kn) \bmod n = x \bmod n. \tag{2}$$

Wir verwenden später die Formeln

$$\text{int } \frac{x}{n} = \text{int } \frac{\text{int } x}{n}, \tag{3}$$

$$-(k \bmod n) = (n - 1 - k) \bmod n - (n - 1). \tag{4}$$

Beweis: (3): Für $x_0 = x \bmod n$ ist nach (1) $x = n \cdot \text{int } \frac{x}{n} + x_0$; für $x_1 = \text{int } x$ gilt also nach (2) $x_1 = n \cdot \text{int } \frac{x}{n} + \text{int } x_0$, also $\frac{x_1}{n} = \text{int } \frac{x}{n} + \frac{\text{int } x_0}{n}$, also ist $\text{int } \frac{x_1}{n} = \text{int } \frac{x}{n}$ wegen $0 \leq \text{int } x_0 < n$, *q.e.d.*
 (4): Es sei $k_0 = k \bmod n$. Nun gilt $(n - 1 - k) \bmod n = (n - 1 - k_0) \bmod n = n - 1 - k_0$ wegen $0 \leq n - 1 - k_0 < n$, *q.e.d.*

3 Wochentagsberechnung

Anlässlich der Kalenderreform von 1582 unter Papst Gregor XIII. wurde die Schaltregel des Julianischen Kalenders („alter Stil“), nämlich, dass die Schaltjahre genau die durch 4 teilbaren Jahre sind, für den Gregorianischen Kalender („neuer Stil“) so abgeändert, dass die Schaltjahre genau die Jahre sind, deren Jahreszahlen durch 4, aber nicht durch 100, oder die durch 400 teilbar sind.

Beginnen wir die durchgehende Zählung der Tage mit dem 1. März des Jahres 0 *alten Stils* und bezeichnen wir die dadurch bestimmte *Tagesnummer* des 1. März des Jahres 0 *neuen Stils* mit N_0 , so erhält man (aus der Anzahl der Schaltjahre) für die Tagesnummer des 1. März des Jahres J im Julianischen Kalender

$$N_1 = 365 J + \text{int } \frac{J}{4} + 1,$$

im Gregorianischen Kalender

$$N_2 = 365 J + \text{int } \frac{J}{4} - \text{int } \frac{J}{100} + \text{int } \frac{J}{400} + N_0.$$

Bei der Kalenderreform von 1582 wurde von Donnerstag, den 4. Oktober (217 Tage nach dem 1. März) alten Stils direkt zum Freitag, den 15. Oktober (228 Tage nach dem 1. März) neuen Stils übergegangen. Mit $J = 1582$ erhält man also für das erste Datum die Tagesnummer $N'_1 = 578\,043$ und für das zweite die Tagesnummer $N'_2 = 578\,041 + N_0$, aus $N'_2 = N'_1 + 1$ folgt sogleich $N_0 = 3$.

Zudem folgt aus den obigen Angaben: Führen wir die *Wochentagsnummer* (0 für Sonntag, 1 für Montag, ..., 6 für Samstag) ein, so ist diese für den Tag mit der Tagesnummer N (wegen $N'_1 \bmod 7 = 4$)

$$w = N \bmod 7.$$

Die Differenz $D = N_1 - N_2$ heisst die *Kalenderdifferenz*; es ergibt sich: $D = \text{int } \frac{J}{100} - \text{int } \frac{J}{400} - 2$. Mit dem Jahrhundertzähler

$$p = \text{int } \frac{J}{100} \tag{5}$$

wird nach (3)

$$D = p - \text{int } \frac{p}{4} - 2. \tag{6}$$

Die Kalenderdifferenz des Jahres J ist die Differenz der Tagesnummern ein und desselben Datums (nicht vor dem 1. März) im alten und neuen Stil (für Daten vor dem 1. März müsste man anstelle von J die

Jahreszahl $J - 1$ des Vorjahres einsetzen). Sie beträgt gegenwärtig 13 und erhöht sich im Jahr 2100 auf 14.

Somit wird die Wochentagsnummer des 1. März des Jahres J im Julianischen Kalender unter Benützung von (2)

$$N_1 \bmod 7 = \left(365J + \text{int} \frac{J}{4} + 1 \right) \bmod 7 = \left(J + \text{int} \frac{J}{4} + 1 \right) \bmod 7$$

und im Gregorianischen Kalender

$$N_2 \bmod 7 = \left(J + \text{int} \frac{J}{4} + 1 - D \right) \bmod 7.$$

Schliesslich wird die *Wochentagsnummer von März t des Jahres J*

$$w = \left(J + \text{int} \frac{J}{4} + t - D \right) \bmod 7, \tag{7}$$

wobei für den Julianischen Kalender $D = 0$ zu setzen ist.

4 Kirchlicher Neumondkalender und Ostergrenze im Julianischen Kalender

Die Osterrechnung besteht im Wesentlichen in der Berechnung der sogenannten „Ostergrenze“. Unter der *Ostergrenze* versteht man das Datum des ersten kirchlichen Vollmondes nach dem 20. März.

Die kirchlichen Neu- und Vollmonddaten für den Julianischen Kalender wurden auf der Grundlage des *Metonischen Zyklus* festgelegt: Da die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden (sog. *Lunation*) im Mittel 29,530589 Tage beträgt, machen 235 Lunationen ziemlich genau 19 Julianische Jahre (zu 365,25 Tagen) aus, so dass sich nach 19 Jahren die gleichen Neumondaten wiederholen. Da man diese 19-jährigen Zyklen mit dem Jahre 532 beginnen liess, versteht man, unter Verwendung der Abkürzung

$$a = J \bmod 19, \tag{8}$$

unter einem *Metonischen Zyklus* eine Folge von 19 aufeinanderfolgenden Jahren mit $a = 0$ bis $a = 18$. Weil 12 Lunationen 10,88293 Tage weniger als ein Julianisches Jahr ausmachen, nimmt das *Mondalter* (d.h. die Zeit seit dem letzten Neumond), jedes Jahr am gleichen Datum betrachtet, per Jahr um etwa 11 Tage zu. Das Mondalter am 31. Dezember des Vorjahres von J heisst die *Epakte E* des Jahres J . Da diese für das Jahr 532 den Wert 8 hatte, lässt sie sich gut approximieren durch die Funktion

$$E = (11a + 8) \bmod 30. \tag{9}$$

Diese sog. „*Julianische Epakte*“ nimmt (modulo 30) während eines Metonischen Zyklus jedes Jahr um 11 Tage zu, mit der Ausnahme der Zunahme von 12 Tagen (sog. „*Mondsprung*“) vom letzten Jahr des Zyklus zum ersten des folgenden Zyklus (womit alle Zyklen wieder dieselben Epakten erhalten).

Der kirchliche Neumondkalender wurde nun auf Grund dieser Julianischen Epakte und nach folgenden Regeln erstellt (vgl. [2]):

Der 1. Neumond des Jahres liegt stets 30 Tage nach dem letzten des Vorjahres, der 2. Neumond 29 Tage nach dem 1. und der 3. wieder 30 Tage nach dem 2. (die folgenden Termine des Jahres wurden in nicht ganz regelmässig abwechselnden Abständen von 30 und 29 Tagen angesetzt). Der *Vollmond* wird stets 14 Tage nach dem Neumond angesetzt. Dabei wird in den Schaltjahren der Schalttag einfach ignoriert. Das Datum des 1. Neumondes ist also immer Januar $30 - E$.

Somit ist das Datum des 3. Neumondes Januar $89 - E$, dasjenige des darauffolgenden Vollmondes Januar $103 - E$. Damit dieses die Ostergrenze ist, die ja frühestens am März 21 = Januar 80 sein kann, muss $103 - E \geq 80$ sein, also $E < 24$; d.h., der 1. Neumond muss nach dem 6. Januar (Dreikönigstag) eintreten. Führt man das Mondalter E' des 6. Januar,

$$E' = (E + 6) \bmod 30 = (11a + 14) \bmod 30 \tag{10}$$

ein, so muss also $E' \geq 6$ sein. Es gibt also 2 Fälle:

1. *Fall*: Der 1. Neumond tritt nach dem 6. Januar ein, also $E < 24$, $E' \geq 6$, ferner $E + 6 = E'$: Der Vollmond nach dem 3. Neumond bildet die Ostergrenze, und diese ist Januar $103 - E =$ Januar $109 - E' =$ März $50 - E'$.

2. *Fall*: Der 1. Neumond tritt vor oder am 6. Januar ein, also $E \geq 24$, $E' < 6$, ferner $E + 6 = 30 + E'$: Der Vollmond nach dem 4. Neumond bildet die Ostergrenze. In diesem Fall wird der 4. Neumond 30 Tage nach dem 3. angesetzt (im 1. Fall 29 Tage, was für uns aber irrelevant ist). Die Ostergrenze ist also (30 Tage nach dem Vollmond nach dem 3. Neumond) Januar $133 - E =$ Januar $109 - E'$.

In beiden Fällen gilt somit

$$\text{Ostergrenze} = \text{März } 50 - E'. \quad (11)$$

Die früheste Ostergrenze (für $a = 15$, $E' = 29$) ist also März 21, die späteste (für $a = 7$, $E' = 1$) März 49; somit ist Ostern frühestens am 22. März und spätestens am 25. April.

5 Kirchlicher Neumondkalender und Ostergrenze im Gregorianischen Kalender

Bei der Gregorianischen Kalenderreform wurde nicht nur eine neue Schaltregel eingeführt, sondern auch die Epakten wurden einer Korrektur unterworfen:

1. Um den aufgelaufenen Fehler von 3 Tagen zu korrigieren, musste man zu den alten Werten 3 addieren.

2. Da 235 Lunationen etwa 0,06158 Tage weniger als 19 Julianische Jahre ausmachen, nimmt die Epakte gegenüber der Julianischen Epakte in $\frac{19}{0,06158} = 308,5$ Jahren um 1 Tag zu. Da man zur Zeit Papst Gregors XIII. mit dem Wert von 312,5 Tagen rechnete, wurde mit 8 Tagen Zunahme in 2500 Jahren gerechnet und angeordnet, dass erstmals im Jahre 1800 und dann 6 mal alle weiteren 300 Jahre, dann nach weiteren 400 Jahren (also im Jahre 4300) die Epakte je um einen Tag erhöht werden soll, worauf dieses Schema stets wiederholt wird. Diese Korrektur lässt sich (nach der Version von Gauss) durch die Funktion

$$\text{int} \frac{8p + 13}{25} - 5$$

darstellen.

Die ersten beiden Korrekturen machen zusammen

$$M = \text{int} \frac{8p + 13}{25} - 2 \quad (12)$$

aus (sog. „Mondgleichung“).

3. Ferner muss die Kalenderdifferenz $D = p - \text{int} \frac{p}{4} - 2$ (vgl. Formel 6) subtrahiert werden.

Diese 3 Korrekturen machen zusammen

$$F = M - D = \text{int} \frac{8p + 13}{25} + \text{int} \frac{p}{4} - p \quad (13)$$

aus, und die korrigierte Epakte erhält nach (9) den Wert

$$E = (11a + 8 + F) \text{ mod } 30 \quad (14)$$

(sog. „Gregorianische Epakte“). Im Gegensatz zum Julianischen Kalender können nun die Epakten mit der Zeit alle Werte von 0 bis 29 annehmen.

Mit der Gregorianischen Epakte berechnet sich E' nach (10) und (14):

$$E' = (E + 6) \text{ mod } 30 = (11a + 14 + F) \text{ mod } 30 \quad (15)$$

und daraus die Ostergrenze nach (11).

Zusätzlich wurden *zwei Ausnahmen* angeordnet: Besonders kritisch ist die Epakte $E = 24$ ($E' = 0$), die im Julianischen Kalender gar nicht vorkommt. Sie würde die Ostergrenze auf März $50 =$ April 19 setzen, so dass (falls dieser Tag ein Sonntag ist) Ostern auf den 26. April fallen könnte. Da man aber auch im Gregorianischen Kalender den spätesten Ostertermin am 25. April (wie im Julianischen Kalender) belassen wollte, setzte man den 4. Neumond im Fall der Epakte 24 auf 29 Tage nach dem 3. Neumond fest, wodurch die Ostergrenze um 1 Tag zurückversezt wurde auf April 18 (*1. Ausnahmeregel*). Nun führt

aber auch die Epakte $E = 25$ ($E' = 1$) auf die Ostergrenze März 49 = April 18, und ein zweimaliges Vorkommen dieser Ostergrenze wollte man innerhalb eines Metonischen Zyklus vermeiden. Zu diesem Zweck setzte man fest, dass man auch in diesem Fall die Ostergrenze um 1 Tag zurückversetzt (auf April 17), sofern *im gleichen Metonischen Zyklus* bereits *vorher* $E = 24$ vorgekommen ist (*nachher* kann dies im gleichen Zyklus nie vorkommen, wie wir in Abschnitt 7 zeigen werden). Dies ist die *2. Ausnahmeregel*.

6 Die Gaussche Formel für die Ostergrenze

Auf Grund von (15) erhält man unter Anwendung von (4) für den *Gregorianischen Kalender*

$$-E' = (29 - 11a - 14 - F) \bmod 30 - 29 = (19a + 15 - F) \bmod 30 - 29,$$

also

$$-E' = d - 29$$

mit

$$d = (19a + 15 - F) \bmod 30. \tag{16}$$

Zur Berechnung der Ostergrenze muss wegen der Ausnahmeregeln der korrigierte Wert d' genommen werden:

$$d' = \begin{cases} 28, & \text{falls } d = 29, \\ 27, & \text{falls } d = 28 \text{ und im selben Metonischen Zyklus schon } d = 29 \text{ auftritt,} \\ d & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach (11) gilt also:

$$\text{Ostergrenze} = \text{März } 21 + d'. \tag{17}$$

Für den *Julianischen Kalender* hat man $F = 0$ zu setzen, und da die Voraussetzungen der Ausnahmeregeln nie erfüllt sind, gilt stets $d' = d$.

Die Periode der Folge der Osterdaten:

Die Folge der Osterdaten hat im *Julianischen Kalender* die Periode *532 Jahre* (denn die Ostergrenze hat die Periode 19, und die Wochentage wiederholen sich nach 28 Jahren, also hat die Osterdatum die Periode $19 \cdot 28 = 532$ Jahre), im *Gregorianischen Kalender* die Periode *5 700 000 Jahre* (denn M nimmt alle 2500 Jahre um 8 zu, und D nimmt alle 400 Jahre um 3 ab, also nimmt $F = M - D$ alle 10 000 Jahre um 43 ab, also hat $F \bmod 30$ die Periode $10\,000 \cdot 30$ Jahre; ferner hat a die Periode 19, somit die Ostergrenze die Periode $10\,000 \cdot 30 \cdot 19 = 5\,700\,000$ Jahre; und da sich die Wochentage alle 400 Jahre wiederholen, ist die Periode der Osterdaten gleich derjenigen der Ostergrenze).

7 Die Bedeutung der Ausnahmeregeln für das früheste und das späteste Osterdatum

Wir zeigen nun, dass das im Julianischen und als Folge der *1. Ausnahmeregel* auch im Gregorianischen Kalender *früheste* (22. März) und *späteste* (25. April) *Osterdatum* in jedem Metonischen Zyklus je *höchstens einmal* vorkommen (was für die anderen Osterdaten nicht gilt):

In beiden Kalendern tritt das früheste Osterdatum ein, wenn die Ostergrenze der 21. März ($d' = 0$) und ein Samstag ist, und das späteste Osterdatum, wenn die Ostergrenze der 18. April ($d' = 28$) und ein Sonntag ist. Wir haben also die Fälle zu untersuchen, in denen innerhalb eines Zyklus zweimal $d' = 0$ oder zweimal $d' = 28$ auftreten können.

Im Folgenden sollen J_1 und J_2 zwei verschiedene Jahre eines Zyklus mit $J_1 < J_2$ und den Werten d_1, d'_1 bzw. d_2, d'_2 sein.

Im *Julianischen Kalender* nimmt d' (hier = d) in jedem Zyklus der Reihe nach die Werte

$$15, 4, 23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25, 14, 3, 22, 11, 0, 19, 8, 27$$

an. Wir erkennen, dass dabei gilt:

1. d_1 und d_2 sind nie gleich.

2. d_1 und d_2 unterscheiden sich nur dann um 1, wenn $J_2 - J_1 = 11$; dann ist $d_2 = (d_1 - 1) \bmod 30$.
3. d_1 und d_2 unterscheiden sich nur dann um 2, wenn $J_2 - J_1 = 8$; dann ist $d_2 = (d_1 + 2) \bmod 30$.

Aus Punkt 1 folgt bereits, dass das früheste und das späteste Osterdatum nicht zweimal innerhalb des Zyklus vorkommen kann.

Im *Gregorianischen Kalender* ist die Sachlage etwas anders wegen des Gliedes $-F = D - M$ in (16). Dieses kann sich beim Übergang vom Vorjahr eines vollen Jahrhundertjahres $J = 100p$ zu J verändern; diese Änderung bezeichnen wir mit Δ . In einem Zyklus ohne Jahrhundertjahr oder mit einem solchen mit $\Delta = 0$ (sog. „normaler Zyklus“) gelten für zwei Jahre J_1 und J_2 des Zyklus für ihre d -Werte die 3 obigen Punkte ebenso. In nicht normalen Zyklen muss in Jahrhundertjahren die Änderung Δ berücksichtigt werden: Da dabei M unverändert bleibt oder um 1 zunimmt, und D (je nachdem, ob p durch 4 oder nicht durch 4 teilbar ist) unverändert bleibt oder um 1 zunimmt, gilt für Δ *entweder* $\Delta = 0$, $\Delta = -1$ oder $\Delta = +1$, wobei im Fall $\Delta = -1$ stets p durch 4 teilbar und im Fall $\Delta = 1$ nicht durch 4 teilbar ist.

Um zu untersuchen, ob das früheste oder das späteste Osterdatum im Zyklus zweimal vorkommt, haben wir nun nachzusehen, wann zwei Jahre J_1, J_2 des Zyklus die gleiche Ostergrenze $d_1 = d_2 = 0$ oder $d'_1 = d'_2 = 28$ haben. Wie man aus den d -Werten normaler Zyklen ersehen kann, ist das nur in den folgenden 3 Fällen möglich, wobei der Wert Δ eines eventuell zwischen J_1 und J_2 liegenden Jahres $J = 100p$ mit $J_1 < J \leq J_2$ von ausschlaggebender Bedeutung ist:

1. Fall: $J_2 = J_1 + 11$ ohne Zwischenjahrhundert oder mit einem solchen mit $\Delta = 0$, und $d_1 = 29$, $d_2 = 28$.
2. Fall: $J_2 = J_1 + 11$ mit Zwischenjahrhundert mit $\Delta = 1$, und $d_1 = d_2 = 0$ oder $d_1 = d_2 = 28$ oder $d_1 = d_2 = 29$.
3. Fall: $J_2 = J_1 + 8$ mit Zwischenjahrhundert mit $\Delta = -1$, und $d_1 = 28$, $d_2 = 29$.

Im 2. Fall ist p nicht durch 4 teilbar, also gibt es zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 höchstens 2 Schalttage, also können gleiche Daten dieses Jahres nicht den gleichen Wochentag haben.

Im 3. Fall ist p durch 4 teilbar, also gibt es zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 ebenfalls höchstens 2 Schalttage, also folgt dasselbe wie im 2. Fall.

Im 1. Fall können 3 Schalttage zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 liegen, wenn kein Zwischenjahrhundert existiert oder eines mit durch 4 teilbarem p ; dann können also gleiche Daten dieser Jahre gleiche Wochentage haben. Aber nach der 2. *Ausnahmeregel* ist dann $d'_2 = 27$, womit ein zweimaliges Auftreten des spätesten Ostertermins verhindert wird.

Die 2. Ausnahmeregel leistet sogar zuviel des Guten, denn in gewissen Fällen würde auch ohne ihre Anwendung keine Wiederholung des spätesten Ostertermins eintreten (z. B. für $J_2 = 2106$).

8 Berechnung des Osterdatums aus der Ostergrenze; die Gauss'sche Osterformel

Aus der Ostergrenze lässt sich nun das Osterdatum sehr leicht bestimmen.

Zunächst erhält man den Wochentag W der Ostergrenze, indem man nach (17) $21 + d'$ in (7) für t einsetzt:

$$W = \left(J + \text{int} \frac{J}{4} + 21 + d' - D \right) \bmod 7. \quad (18)$$

Nun ist Ostern $7 - W$ Tage nach der Ostergrenze, also

$$\text{Ostern} = \text{März } 28 + d' - W. \quad (19)$$

Wir formen diesen Ausdruck um durch Anwendung von (4) auf (18) und erhalten

$$\begin{aligned} -W &= (6 - J - \text{int} \frac{J}{4} - 21 - d' + D) \bmod 7 - 6 \\ &= (6 + 6J - 8 \text{int} \frac{J}{4} + 6d' + D) \bmod 7 - 6. \end{aligned}$$

Hier kann nach (1)

$$8 \text{int} \frac{J}{4} = 2J - 2(J \bmod 4)$$

gesetzt werden, was zu

$$-W = (6 + 4J + 2(J \bmod 4) + 6d' + D) \bmod 7 - 6$$

oder mit den Abkürzungen

$$b = J \bmod 4, \quad c = J \bmod 7 \tag{20}$$

zu

$$-W = (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 - 6$$

führt, oder mit

$$e = (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 \tag{21}$$

zu

$$-W = e - 6.$$

Aus (17), (19) und (20) erhält man damit

$$\text{Ostern} = \text{März } 28 + d' + e - 6 = \text{März } 22 + d' + e. \tag{22}$$

Zusammengefasst: Für den *Gregorianischen Kalender* gilt:

$$\begin{aligned} a &= J \bmod 19 \\ b &= J \bmod 4 \\ c &= J \bmod 7 \\ p &= \text{int } \frac{J}{100} \\ D &= p - \text{int } \frac{p}{4} - 2 \\ M &= \text{int } \frac{8p+13}{25} - 2 \\ d &= (19a + 15 + D - M) \bmod 30 \\ d' &= \begin{cases} 28, & \text{falls } d = 29 \\ 27, & \text{falls } d = 28 \text{ und im gleichen Metonischen Zyklus} \\ & \text{vorher schon } d = 29 \text{ auftritt} \\ d & \text{sonst} \end{cases} \\ e &= (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 \\ \text{Ostergrenze} &= \text{März } 21 + d' \\ \text{Ostern} &= \text{März } 22 + d' + e \end{aligned}$$

Für den *Julianischen Kalender* muss $M = D = 0$ gesetzt werden; die Voraussetzungen der Ausnahmeregeln sind nie erfüllt (d.h. $d' = d$).

Bemerkungen:

1. Da die Zurücksetzung der Ostergrenze um 1 Tag das Osterdatum im Fall $e < 6$ unverändert lässt, aber im Fall $e = 6$ um 1 Woche verfrüht, müssen die Ausnahmeregeln nur im Fall $e = 6$ berücksichtigt werden (d.h., im Fall $e < 6$ kann $d' = d$ gesetzt werden). Für die Programmierung bringt diese Fallunterscheidung allerdings eher eine (überflüssige) Erschwerung mit sich.

2. In der *Ostkirche* wird das Osterdatum nach wie vor nach dem Julianischen Kalender definiert (wobei, wie erwähnt, in den obigen Formeln $M = D = 0$ zu setzen ist); man erhält das entsprechende Datum im Gregorianischen Kalender durch Addition der (nicht nullgesetzten) Kalenderdifferenz $D = p - \text{int } \frac{p}{4} - 2$:

$$\text{März } 22 + d + e + D.$$

9 Die Gauss-Bachsche Formulierung der 2. Ausnahmeregel

Die 2. Ausnahmeregel

$$d' = 27, \quad \text{falls } d = 28 \text{ und im gleichen Metonischen Zyklus} \\ \text{vorher schon } d = 29 \text{ auftritt,}$$

wie sie oben formuliert ist, entspricht der ursprünglichen kirchlichen Version. Da im Fall 1 von Abschnitt 7, in dem sie angewendet wird, für J_2 gilt $J_2 \bmod 19 \geq 11$, formulierten Gauss und später Bach die Bedingung in der Form

$$d' = 27, \text{ falls } d = 28 \text{ und } a \geq 11.$$

Diese Bedingung ist aber nicht äquivalent der ursprünglichen und setzt in gewissen nicht-normalen Zyklen den Ostertermin vom 25. April auch dann eine Woche zurück, wenn dies von der kirchlichen Regel nicht verlangt wird. Das erste Jahr, in dem die Regeln verschiedene Osterdaten ergeben, ist $J = 8202$.

Die kirchliche Regel kann übrigens in äquivalenter Weise so formuliert werden:

$$d' = 27, \text{ falls } d = 28, \quad a \geq 11 \text{ und} \\ (J \bmod 100 \geq 11 \text{ oder } 1 + \text{int } \frac{p}{4} - \text{int } \frac{8p+13}{25} = \text{int } \frac{p-1}{4} - \text{int } \frac{p+5}{25}).$$

Damit kann im Fall $d = 28$, $a \geq 11$ das kirchliche Osterdatum ohne Rückgriff auf das 11 Jahre zurückliegende Jahr berechnet werden.

Bemerkung: Die wirklichen Zeitpunkte der Mondphasen der Jahre 1700 bis 2035 sind auf der Website [3] aufgeführt.

Literatur

- [1] Heinz Bachmann. *Kalenderarithmetik*, vergriffen. Juris Druck + Verlag AG, Zürich, 1984 und 1986, ISBN 3 260 05035 3
- [2] *Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, London 1960 / S. 422, 426
- [3] U. S. Naval Observatory, aa.usno.navy.mil/data/docs/MoonPhase.php
- [4] U. S. Naval Observatory, aa.usno.navy.mil/data/docs/easter.php
- [5] Urs Oswald, www.ursoswald.ch/download/KALENDERRECHNUNG.pdf

**Atmosphären untersuchen und modellieren:
Empirische , analytische, numerische Methoden
(Weiterbildungskurs mit GPS-Radiosondierung)**

Kurs für Mathematik- und Physiklehrkräfte (Grundlagenfach und besonders PAM)

- WBZ-Kurs:** WBZ_09_05_20
Trägerschaft Deutschschweizerische Physikkommission DPK des VSMP
 Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK des VSMP
 Teachers teaching with Technology T³
Kursort: „unique“ Hotel Appenberg, Fam. W. Mosimann, 3532 Zäziwil (Emmental BE)
Kursdatum: 22. – 24. Oktober 2009
Kursleitung: Hans Kammer, Sulgenauweg 8, 3007 Bern
 Tel: 031 371 06 48, E-Mail: hanskammer@bluewin.ch
Referenten: Hansruedi Schneebeili, KS Baden; Alfred Vogelsanger, KS St. Gallen
 Hans Richner, IACETH; Daniel Leuenberger, MeteoSchweiz Zürich
Anmeldung: **bis 18. August 2009** über die WBZ (www.webpalette.ch -> Sekundarstufe II
 -> WBZ -> Physik
Kurskosten: Fr. 300.-
 Die Kosten für Unterkunft und Verpflegung sind nicht in der Kursgebühr
 enthalten und betragen pro Person für zwei Nächte mit Vollpension
 ca. Fr. 290.--.

Kursinhalt:

Atmosphärenphysik kann an Mittelschulen nur behandelt werden, wenn man sich auf eine Luftsäule beschränkt. Dann kann die Abhängigkeit zwischen Luftdruck, Höhe und ev. noch anderen Parametern untersucht werden.
 Diese interdisziplinäre Frage wird im Kurs am Modell einer stabil geschichteten Atmosphäre aus mathematischer und physikalischer Sicht mit zwei Zugängen bearbeitet, einer Datenanalyse und einer Modellierung mit Differentialgleichungen (DGL):
 Mit der numerischen Datenanalyse einer Standardatmosphäre werden die Zusammenhänge zwischen Druck, Höhe und Temperatur quasi experimentell mit Modelldaten erkundet und modelliert. Dabei setzen wir die Statistikfunktionen eines CAS-Rechners oder von Excel ein und erhalten so erstaunlich gute Modelle für Barometergleichungen. Die Modellierung mit DGL erzeugt physikalisch begründete Barometergleichungen unter verschiedenen Annahmen. Ferner werden mit numerischen Verfahren Radiosondendaten ausgewertet und der Absprung eines Fallschirmspringers aus 40 km Höhe simuliert.

Am Kurs starten wir eine moderne digitale Radiosonde mit GPS, werten deren Daten aus und behandeln Radiosondierung in Theorie und Praxis. Zudem erarbeiten wir Unterrichtsbeispiele mit und ohne CAS.

Literatur

- [1] H. R. Schneebeili, A. Vogelsanger, Modellanalyse der ICAO-Atmosphäre
 [2] H.R. Schneebeili, A. Vogelsanger, Modellierung einer stabilen Atmosphäre
 Download auf: [http:// www.swisseduc.ch/mathematik](http://www.swisseduc.ch/mathematik) (Atmosphärenmodelle, ICAO-Modelle
 Rezension der beiden Artikel unter
http://education.ti.com/sites/SCHWEIZ/downloads/pdf/TI-Nachrichten%202-08_final.pdf
 (Seite 32)



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Departement Mathematik

ETH Zentrum HG G 51.3
CH-8092 Zürich

Prof. Dr. Urs Kirchgraber

Phone: +41-44-632 34 54

Fax: +41-44-632 18 37

kirchgra@math.ethz.ch

www.math.ethz.ch/~kirchgraber

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2009

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag von 17.15 bis 18.45 Uhr im Auditorium
F1 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

- | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 22.10.09 | N. Marheineke, Universität Kaiserslautern
Mathematische Modellierung als Problemlösungskompetenz |
| 05.11.09 | J. Richter-Gebert, TU München
Mathe Vital: Frei zugängliche Interaktive Mathematikvisualisierungen |
| 19.11.09 | S. Walcher, RWTH Aachen
Modellierung von Populationen |
| 03.12.09 | B. Artmann, Universität Göttingen
Kunst und Mathematik |

Herzlich laden ein:

U. Kirchgraber (kirchgra@math.ethz.ch)

P. Gallin (p.gallin@freesurf.ch)

J. Hromkovic (juraj.hromkovic@inf.ethz.ch)

H. Klemenz (hklemenz@geosoft.ch)

Weiterbildungskurse Mathematik, Informatik, Physik im Herbstsemester 2009/10

Der Einfluss der Sonne auf das Erdklima

Werner Schmutz
Samstag, 5. September 2009

20. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Urs Kirchgraber
Mittwoch, 9. September 2009

Mathematik-Unterricht quo vadis? – Differentialgleichungen

Urs Kirchgraber
Samstag, 26. September 2009

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht

Urs Kirchgraber
jeweils Donnerstag, 22. Oktober, 5. November, 19. November, 3. Dezember 2009

Erprobter ICT-Unterricht mit ETH-Lernmaterialien

Hans Hinterberger, Lukas Fässler
Freitag, 30. Oktober 2009

Vorlesungen: Fachwissenschaftliche Vertiefung mit pädagogischem Fokus

Ausgewählte Themen der Geometrie

Urs Kirchgraber
Herbstsemester 2009

Didaktik des gymnasialen Mathematikunterrichts auf der Sekundarstufe I

René Schelldorfer
Herbstsemester 2009

Die ausführlichen Texte sowie die Anmeldemöglichkeit sind auf der ZHSF-Homepage:

www.zhsf-edu.ch > Weiterbildung Mittelschulen > Kurse

Zürcher Hochschulinstitut für Schulpädagogik und Fachdidaktik, ZHSF

Weiterbildung Mittelschulen

Beckenhofstrasse 35

8006 Zürich

Stefan Rubin
stefan.rubin@zhsf-edu.ch
Tel. Sekretariat: 043 305 66 44



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Departement Mathematik

ETH Zentrum HG G 51.3
CH-8092 Zürich

Prof. Dr. Urs Kirchgraber
Phone: +41-44-632 34 54
Fax: +41-44-632 18 37
email: kirchgra@math.ethz.ch
www.math.ethz.ch/~kirchgraber

Zürich, im April 2009

Liebe Kolleginnen und Kollegen

Im Namen der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft (SMG), der ETH Zürich, des Zürcher Hochschulinstituts für Schulpädagogik und Fachdidaktik (ZHSF) und der Kantonsschule Schaffhausen lade ich Sie herzlich ein zum

20. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht

am

Mittwoch, den 9. September 2009

an die

Kantonsschule Schaffhausen

Ich würde mich sehr freuen, wenn wir Sie am 9. September 2009 begrüßen dürften.

Freundliche Grüsse

U. Kirchgraber

Programm

10.00 – 10.30 Uhr (Mensa)

Check-in, Kaffee, Orangensaft, Mineralwasser und Gipfeli

10.30 – 10.45 Uhr (Aula)

Begrüssung durch Herrn Dr. Urs Saxer, Rektor der Kantonsschule Schaffhausen

10.45 – 12.00 Uhr (Aula)

Prof. E.C. Wittmann, Universität Dortmund

Mathematiklernen vom Kindergarten bis zur Matura - aus einem Guss

Jean Piaget hat in seiner genetischen Epistemologie überzeugende Argumente dafür geliefert, dass sich Wissen im einzelnen Menschen nur im Prozess entwickeln und weiterentwickeln kann. Am besten unterstützt werden entsprechende stufenübergreifende mathematische Lernprozesse durch ein Curriculum, das sich an fundamentalen *fachlichen* Ideen orientiert. Diese genetische Perspektive wird im Vortrag an einigen "Lerntrajektorien" erläutert, die vom Kindergarten bis in die Oberstufe reichen.

12.00 – 14.30 Uhr (Aula / Munot od. Mensa)

Grusswort durch Frau Rosmarie Widmer Gysel, Erziehungsdirektorin des Kantons Schaffhausen

Apéro und Mittagessen auf der Munotzinne mit herrlichem Ausblick auf Schaffhausen und Rhein (bei schlechter Witterung: in der Mensa)

14.30 – 15.00 Uhr (div. Räume)

Workshop-Runde 1: Parallel angebotene Workshops über die Themen:

1. Warum bleibt der Zug auf der Schiene? U. Manz
2. RSA - und dann? M. Gerike
3. Der Mathematik-Lehrplan der Kantonsschule Schaffhausen: Konzept und Konsequenzen. C. Copetti
4. "GEOGEBRA" - eine Software für den GEOMETRIE- und den ALGEBRA-Unterricht. G. Catone
5. Kepler'sche Ellipsen und "Hamilton'sche Kreise": eine unterrichtstaugliche Perle der Himmelsmechanik. G. Keller
6. Vektoren und Raumvorstellung. T. Linnemann, A. Nüesch, H. Stocker

Abstracts zu den Workshops finden sich (ab 1.6.09) unter www.kanti.ch/STMU.10280.o.html

15.15 - 15.45 Uhr (div. Räume)

Workshop-Runde 2: Die gleichen Workshops wie oben werden noch einmal parallel angeboten.

16.00 – 17.00 Uhr (Aula)

Prof. U. Kirchgraber, ETH Zürich

Was ist eine Differentialgleichung? Vom Begriff zur geometrischen Theorie - Ein Beitrag zur Entwicklung des gymnasialen Analysis-Unterrichts

Differentialgleichungen sind eine geniale mathematische Denkfigur: Erfasst werden Prozesse, bei denen der jeweilige Zustand die Tendenz seiner Veränderung bestimmt. Die Auslotung dieses Konzepts ist eine hoch interessante mathematische Aufgabe: In einigen Fällen kann der globale Prozessverlauf explizit bestimmt werden - das sind aber (glückliche!) Ausnahmen. Typischerweise muss man sich mit (numerischen) Approximationen oder mit dem Gewinnen von qualitativen Eigenschaften begnügen. Ziel des Vortrags ist aufzuzeigen, wie dieses dreiteilige Bild im gymnasialen Analysis-Unterricht (in homöopathischer Dosis - versteht sich!) vermittelt werden kann.

Natürlich gibt es einen weiteren wichtigen Aspekt. Mathematische Denkfiguren sind mitunter geistige Sehhilfen, um unsere Welt besser zu verstehen oder gar um sie zu gestalten. Die Idee der Differentialgleichung gehört zweifellos dazu. Differentialgleichungen sind ein ausserordentlich nützliches Modellbildungsinstrument. Dieser Aspekt ist (aus Zeitgründen) nicht Gegenstand dieses Vortrags. Werfen Sie, quasi als kleinen Ersatz, einen Blick auf das Lernmaterial "Die Fallschirmspringerin" unter:

www.educ.ethz.ch/lehrpersonen/mathematik/unterrichtsmaterialien_mat/analysis/fall/

Hinweis:

Mathematik-Unterricht quo vadis? Das Thema Differentialgleichungen

Samstag, den 26. September 2009, 09.30-ca 16.15 Uhr, an der ETH Zürich

Leitung: Prof. Urs Kirchgraber

Das Anliegen des Kurstages vom 26.9.09 ist ein Zweifaches. Einerseits soll das Thema Gewöhnliche Differentialgleichungen überblicksartig aus der fachwissenschaftlichen Perspektive dargestellt werden. Andererseits soll der Kurstag (weitere) Anregung für den gymnasialen Mathematikunterricht bieten.

Weitere Informationen und Anmeldung: (wenn möglich bis 31.8.09) unter www.zhsf-edu.ch > Weiterbildung Mittelschulen > Kurse

Anmeldeformular

zum 20. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht am Mittwoch, 9. 9. 2009, an der Kantonsschule Schaffhausen

(Bitte in **Druckbuchstaben** ausfüllen).

Name:

Vorname:

Adresse:

E-Mail:

Schule:

Anmeldung für die folgenden (maximal 2) Workshops (bitte ankreuzen):

1 2 3 4 5 6

(Aufgrund der Anmeldungen werden die Teilnehmer auf die Workshop-Runden 1 und 2 aufgeteilt. Diese Aufteilung wird am 9.9.09 vor Ort bekannt gegeben.)

Teilnahme am gemeinsamen Mittagessen

Ja → Fleisch-Menü Vegetarisches Menü

Nein

Bon zu ca CHF 20.– kann beim Eintreffen in der Schule gekauft werden. Er berechtigt zu: Kaffee/Orangensaft/Mineralwasser und Gipfeli am Morgen / Mittagessen (Menü (mit/ohne Fleisch) + Getränk + Dessert +Kaffee).

Vorschläge, Wünsche, Bemerkungen für eine zukünftige Tagung:

Bitte melden Sie sich bis 14.8.09 an:

Kantonsschule Schaffhausen, TMU 2009, Pestalozzistr. 20, 8200 Schaffhausen

Elektronisch können Sie sich (ab 1.6.09) anmelden unter:

www.kanti.ch/STMU.10280.o.html (Benutzername: TMU2009; Passwort: KantiMunot)

Auf www.kanti.ch/STMU.10280.o.html befindet sich (ab 1.6.09) ein Situationsplan. Die Kantonsschule ist vom Bahnhof aus zu Fuss in ca. 10 Minuten gut erreichbar. Auf dem Schulareal stehen keine Parkplätze zur Verfügung.

PHBern, Institut für Weiterbildung
 Weltstrasse 40, CH-3006 Bern
 T +41 31 309 27 11, F +41 31 309 27 99
 weiterbildung.phbern.ch, info-iwb@phbern.ch

PHBern
 Institut für
 Weiterbildung

Rosetta: Weltraumforschung 40 Jahre nach der Mondlandung

Aktueller Forschungsstand und Anregungen für interdisziplinären Unterricht auf der Sekundarstufe II

Datum	Freitag/Samstag, 30./31. Oktober 2009
Ziele	Die Rosetta Mission von der Fragestellung bis zur Datenanalyse kennen lernen Grundkenntnisse über die Entstehung des Sonnensystems erweitern Beispiele und Experimente für den Unterricht entwickeln
Inhalte	Aktuelle Weltraumforschung am Beispiel der Rosetta Mission und des Berner ROSINA Instruments Relevanz der Forschung im Hinblick auf Fragen nach dem Ursprung des Universums, des Sonnensystems und des Lebens Unterrichtskonzepte zur Himmelsmechanik Stufengerechte Experimente aus dem Bereich Weltraum
Kursort	Bern

Provisorisches Programm

Freitag, 30. Oktober 2009

14.00	Begrüssung & Einleitung
14.15	Moderne Himmelsüberwachung: Wie werden heute Kometen und Kleinplaneten entdeckt? (PD Dr. Thomas Schildknecht)
15.30	Computergestützte Astronomie (Dr. Martin Ploner)
17.30	Verschiebung nach Zimmerwald
18.30	Astronomische Beobachtungen mit Gross- und Kleinteleskopen in der Sternwarte Zimmerwald
ca. 21.00	Ende

Samstag, 31. Oktober 2009

08.30	Weltraumforschung, eine wahrhaft interdisziplinäre Wissenschaft (Prof. Dr. Peter Wurz)
09.30	Wie entstehen Weltraummissionen: Beispiel Rosetta (Prof. Dr. Kathrin Altwegg)
10.30	Technische Herausforderungen im Weltall (Dr. Daniele Piazza)
12.00	Mittagspause
13.30	Besichtigungen der Testanlagen im Physikalischen Institut
14.30	Didaktische Workshops, inkl. praktische Arbeiten
16.00	Ende

Detaillierte Angaben und Anmeldung

<http://rosetta09-iwb.phbern.ch>

Kontakt

hansulrich.kueng@phbern.ch



Energiepolitik: Auswege aus dem Dilemma?

13. Weiterbildungsseminar des Forum VERA

Donnerstag, 10. September bis Freitagabend, 11. September 2009

Thematik

Der Bedarf an Energie wächst weltweit rasant. Energie wird heute zu 86% aus nicht erneuerbaren und begrenzt vorhandenen Ressourcen gewonnen. Bei der Verbrennung von Kohle, Öl und Gas entsteht CO₂, das nachweislich erheblich zur Klimaveränderung beiträgt.

Die Medien mischen in der Energiedebatte mit einseitigen Aussagen entweder pro konservativer oder progressiver Energiestrategien mit. Niemand ist wirklich in der Lage, sich ein objektives und sachliches Urteil zu bilden. Wie kommuniziert der Lehrer dieses Dilemma im Unterricht. Was heisst das für die Ausbildung und Meinungsbildung der Jugend?

Teilnehmende: Lehrkräfte aller Disziplinen der Sekundarstufen 1 und 2

Ort: Schloss Böttstein

Teilnahmegebühr: Fr. 320.- pro Person (inkl. Übernachtung, Mahlzeiten, Getränke und Dokumentation)

Referentinnen und Referenten

Dr. Marco Berg, Stiftung Klimarappen, Ludwig Hasler, Physiker, Philosoph und Publizist

Prof. Frank Klötzli, ETHZ, Dr. Hans-Ulrich Liniger ecosens AG, Prof. Joël Mesot, Dir. PSI,

Prof. Andreas Wenger ETHZ, Dr. Peter Wiedemann, Jülich, Prof. Alexander Wokaun, PSI,

Podium

Marina de Senarclens, Forum Vera, Rudolf Hug, economiesuisse, Ruth Genner, Grüne

Partei Zürich, Prof. Wolfgang Kröger, Energy Science Center ETHZ, Dr. Kathy Ricklin,

Nationalrätin, Präsidentin Forum Vera

Exkursionen

Zwischenlager für radioaktive Abfälle in Würenlingen

Energielabors am Paul Scherrer Institut (PSI)

Organisation und Anmeldung

Forum VERA

Sabine Braun

c/o Senarclens, Leu + Partner AG

Freigutstrasse 8

8027 Zürich

Tel. 043 305 05 90 / dir. 95

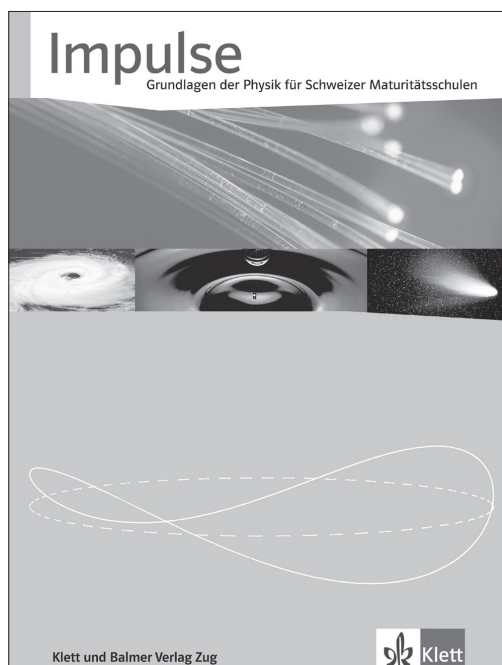
Fax 043 305 05 99

sabine.braun@senarclens.com

www.forumvera.ch

NEU: «Impulse – Grundlagen der Physik für Schweizer Maturitätsschulen»

Das genau abgestimmte Lehrwerk für den Unterricht im Grundlagenfach:



- einbändige Ausgabe auf der Grundlage der aktuellen Lehrwerksreihe «Impulse» aus dem Ernst Klett Verlag
- neben der Stoffvermittlung wird grosser Wert auf Alltagsbezug, Reflexion sowie Festigung und Überprüfung von Können und Wissen gelegt
- systematischer Aufbau und klar strukturiertes Erscheinungsbild
- gibt den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit für selbständiges Arbeiten
- übersichtliches, modernes und lesefreundliches Layout

Schulbuch
9.–12. Schuljahr | 352 Seiten
978-3-264-83935-7 | Fr. 49.00

Die Lösungen zu den Aufgaben im Buch, Musterseiten sowie Bestellmöglichkeiten finden Sie auf www.klett.ch.

Baarerstrasse 95, 6302 Zug
Telefon 041 726 28 50, Fax 041 726 28 51, info@klett.ch
www.klett.ch

Klett und Balmer Verlag Zug



Ja - Oui - Sì



Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/-in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Das neue Aufgabenbuch zur Vektorrechnung

Vektoren werden gezeichnet und berechnet, Geraden und Ebenen auf verschiedene Arten dargestellt, Winkel mit Skalarprodukt oder trigonometrischen Formeln berechnet. Die «klassischen» Themen der Vektorgeometrie am Gymnasium werden ausführlich abgedeckt. Viele Aufgaben sind speziell auf die Förderung der Raumanschauung oder zum Explorieren ausgelegt.

Für das Lösen der Aufgaben wird keine Analysis vorausgesetzt und physikalische Anwendungen werden erklärt. In allen Kapiteln sind Aufgaben von verschiedenen Schwierigkeitsstufen eingebaut. Die Aufgabensammlung lässt sich somit auf allen Jahrgangsstufen der Maturitätsschulen verwenden.

Inhalt:

- 1 Annäherungen
- 2 Vektoren als Pfeile
- 3 Vektoren in Komponentendarstellung
- 4 Skalarprodukt
- 5 Vektorprodukt
- 6 Geraden und Kurven
- 7 Ebenen
- 8 Kugeln
- Lösungen



Torsten Linnemann, Andreas Nüesch,
Christian Rüede, Hansjürg Stocker
DMK Deutschschweizerische
Mathematikkommission (Hrsg.)

Vektoren

Raumvorstellung – Kalkül – Anwendung
2009, 128 Seiten, zweifarbig, broschiert
Fr. 19.80
ISBN 978-3-280-04058-4

Aufgaben zur Einführung des Vektorbegriffs
Anwendungen aus Natur- und Geisteswissenschaften
Aufgaben zum Üben, Vertiefen und Explorieren

Bestellen Sie über

Telefon 044 466 73 65
Fax 044 466 74 12
E-Mail inge.buetler@ofv.ch
Internet www.lehrmittel.ch

orell füssli Verlag
www.lehrmittel.ch

A = (

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Layout – *Mise en page*

Jean-Luc Barras jeanluc.barras@gmail.com
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*

Deutschweiz:

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Suisse romande :

Philippe Beney philippe.beney@bluewin.ch
Av. Pratifori 10 Tel. 027 321 11 94
1950 Sion

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Bireggstrasse 19 Tel. 079 79 89 770
6003 Luzern

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 111 31.08.2009 (20.10.2009)
Nr. 112 31.12.2009 (20.02.2010)
Nr. 113 30.04.2010 (20.06.2010)

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF

Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Physikkommission

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Commission Romande de Mathématique

Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique

Jean-Daneil Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Ganzseitige Inserate Fr. 500.–
Halbseitige Inserate Fr. 300.–
Beilagen bis 20 g Fr. 500.–
Beilagen über 20 g Nach Vereinbarung

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>