

H.U. Keller
ehem. MNG Zürich, hukeller@bluewin.ch

Vier wenig bekannte Formeln für bestimmte Integrale

Es existieren einige spezielle Formeln mit bestimmten Integralen, die auf den ersten Blick recht erstaunlich sind und in keinem Lehrbuch zur Integralrechnung gefunden werden können! Ihre Anwendungsbereiche sind allerdings zum Teil beschränkt. So gelten sie z. B. nur bei bestimmten Integrationsgrenzen oder aber nur bei ganz speziellen Funktionen.

In vielen Fällen können damit aber dennoch grosse Vereinfachungen bei der Berechnung bestimmter Integrale erzielt werden, wodurch diese Formeln oft ganz nützlich sind. Hier werden vier solche Formeln präsentiert.

1. «King's Rule»

Der informelle und nicht offizielle Name dieser Formel scheint seinen Ursprung in Indien zu haben.

Behauptung («King's Rule»):

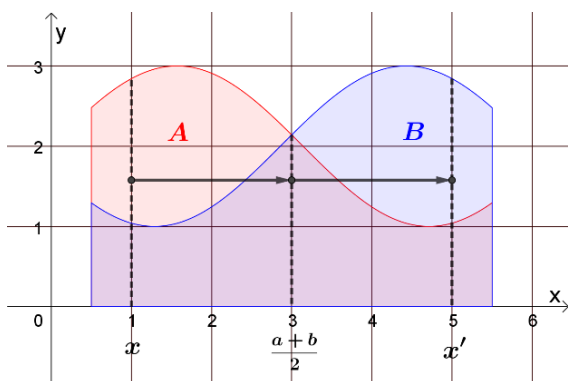
$$I = \int_a^b f(x) dx \equiv \int_a^b f(a+b-x) dx = I_{KR}$$

Beweis: Wir betrachten das Integral $\int_a^b f(a+b-x) dx$ und verwenden darin die Substitution $u = a+b-x$.

So wird $dx = -du$; wenn $x = a$ ist, wird $u = b$, und wenn $x = b$ ist, wird $u = a$. Somit wird

$$\int_{x=a}^{x=b} f(a+b-x) dx = \int_{u=b}^{u=a} f(u) (-du) = \int_{u=a}^{u=b} f(u) du = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx : \text{QED.}$$

Klar ist: Der ursprüngliche Graph wird an der Geraden $x = \frac{a+b}{2}$ gespiegelt! In der untenstehenden Figur sind als Beispiel die folgenden Integrale graphisch wiedergegeben:



$$A = \int_{0.5}^{5.5} (\sin(x) + 2) dx \approx 10.1689,$$

$$B = \int_{0.5}^{5.5} (\sin(0.5 + 5.5 - x) + 2) dx \approx 10.1689.$$

Hier ist auch ersichtlich, dass $\frac{a+b}{2} - x = x' - \frac{a+b}{2}$ ist, weshalb $x' = a+b-x$ wird.

Die «King's Rule» kann angewendet werden, um viele komplizierte Integrale einfach zu berechnen.

Beispiel 1: $I = \int_1^4 x \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_1^4 (5-x) \, dx$. Damit wird

$$2I = I + I_{KR} = \int_1^4 x \, dx + \int_1^4 (5-x) \, dx = \int_1^4 (x+5-x) \, dx = \int_1^4 5 \, dx = [5x]_1^4 = 15: \quad \boxed{\rightarrow I = \frac{15}{2}}.$$

Beispiel 2: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(\pi/2-x))^{\sqrt{2}}} \, dx$. Weil $\tan(\pi/2-x) = \frac{1}{\tan(x)}$

ist, gilt auch $I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+1/\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx$, was wiederum gleich $I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx$ ist. Somit

werden

$$2I = I + I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}} \, dx = \frac{\pi}{4}}.$$

Interessanterweise ist hier der Exponent $\sqrt{2}$ total irrelevant...!

Beispiel 3: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx = ?$

Gemäss der «King's Rule» gilt dafür $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x)+\cos(\pi/2-x)} \, dx$. Weil

$\sin(\pi/2-x) = \cos(x)$ und $\cos(\pi/2-x) = \sin(x)$ ist, wird $I = I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \, dx$. Folglich

werden $2I = I + I_{KR} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}:$

$$\boxed{\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} \, dx = \frac{\pi}{4}}.$$

2. Eine Formel für spezielle Integranden

Behauptung:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b+a-x)} dx \equiv \frac{b-a}{2}$$

Beweis: Diese Formel lässt sich mit der «King's Rule» einfach beweisen. Denn es gilt:

$$I = I_{KR} = \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx. \text{ Die Summe } I + I_{KR} = 2I \text{ wird damit gleich}$$

$$2I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + f(b+a-x)} + \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x) + f(x)} dx = \int_a^b 1 dx = b-a. \text{ Daraus folgt die oben formulierte}$$

Behauptung.

Beispiel 1: $I = \int_3^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{8-x} + \sqrt{x}} dx = \frac{5-3}{2} : [I \rightarrow 1], \text{ mittels unmittelbarer Anwendung der Formel.}$

Beispiel 2: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}} dx. \text{ Hier wird die Identität } \sqrt{\cos(x)} = \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}$

benötigt: Damit wird das Integral $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}} dx. \text{ Die Formel kann nun sofort}$

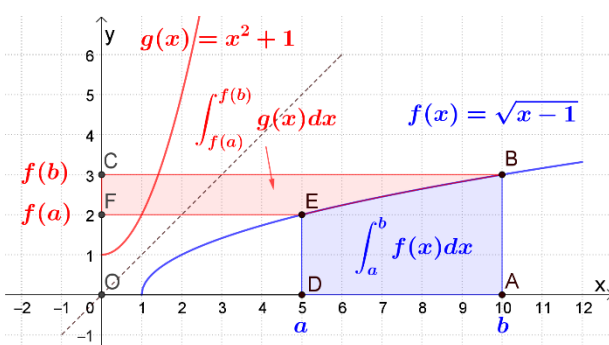
angewendet werden: $\rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$

3. Summe der Integrale einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion

Voraussetzung: Seien $f(x)$ und $g(x)$ Umkehrfunktionen voneinander, und $f(x)$ sei stetig im Intervall $[a, b]$. Dann ist auch $g(y)$ stetig im Intervall $[f(a), f(b)]$, und es gilt $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Dann existiert die folgende, erstaunliche Identität:

Behauptung:

$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \equiv b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$$



In der links wiedergegebenen Figur wird diese Behauptung am Beispiel der Funktion $f(x) = \sqrt{x-1}$ illustriert: Die Summe der beiden Flächeninhalte

$$\int_a^b f(x) dx \text{ und } \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \text{ ist gleich dem Inhalt des}$$

Rechtecks OABC, vermindert um den Inhalt des Rechtecks ODEF, was gerade gleich ist.

Beweis: Sei $y = f(x)$. Damit wird $dy = f'(x) dx$. Weil $g(x) = f^{-1}(x)$ ist, wird $g(y) = g(f(x)) = x$.

Wenn $x = a$ ist, wird $y = f(a)$, und wenn $x = b$ ist, wird $y = f(b)$. Folglich ist

$$\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} g(y) dy = \int_a^b x \cdot f'(x) dx. \text{ Das rechte Integral wird nun partiell integriert und ergibt}$$

$$x \cdot f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx. \text{ So erhalten wir } \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = x \cdot f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx. \text{ Hier wird das rechte}$$

Integral auf beiden Seiten addiert und der Term $x \cdot f(x) \Big|_a^b$ zu $b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$ ausgewertet. Da die

Benennung der Integrationsvariablen irrelevant ist, ist $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$, woraus sich die oben angegebene Behauptung ergibt.

Beispiel 1: $S = \int_4^9 \sqrt{x} dx + \int_2^3 x^2 dx = ?$

Hier ist $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$; $S = \int_4^9 \sqrt{x} dx + \int_2^3 x^2 dx = \frac{38}{3} + \frac{19}{3} \equiv 9 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot \sqrt{4}$: $\boxed{\rightarrow S = 19}$.

Beispiel 2: $S = \int_1^2 \log_2(x^3 + 1) dx + \int_1^{\log_2(9)} (2^x - 1)^{1/3} dx = ?$

Diese beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind Umkehrfunktionen voneinander, denn es gilt:

$$f(g(x)) = \log_2(((2^x - 1)^{1/3})^3 + 1) = \log_2(2^x) = x. \text{ Ausserdem ist die Untergrenze des zweiten Integrals}$$

$f(1) = \log_2(1^3 + 1) = 1$, und seine Obergrenze ist $f(2) = \log_2(2^3 + 1) = \log_2(9)$. Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung der obigen Formel erfüllt. Damit ergibt sich gemäss der oben bewiesenen Formel:

$$\boxed{\rightarrow S = 2 \cdot \log_2(2^3 + 1) - 1 \cdot \log_2(1^3 + 1) = \log_2(81) - 1 \approx 5.33985}.$$

Natürlich könnten diese Integrale auch separat berechnet werden: Das erste Integral ergibt

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi + 27 \cdot \ln(3) - 6 \cdot (3 + \ln(4))}{\ln(64)}, \text{ das zweite } I_2 = \frac{18 - \sqrt{3} \cdot \pi + \ln\left(\frac{64}{27}\right)}{\ln(64)}, \text{ und ihre Summe ist auch}$$

gemäss dieser komplizierteren, expliziten Berechnung, gleich

$$S = \frac{\ln\left(\frac{3^{24}}{64}\right)}{\ln(64)} = \frac{\log_2\left(\frac{3^{24}}{64}\right)}{\log_2(64)} = \frac{24 \cdot \log_2(3) - 6}{6} = \log_2(81) - 1.$$

Beispiel 3: $S = \int_a^b \sin(x) dx + \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} \arcsin(x) dx$ (mit $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$) = ?

Gemäss der Formel wird dieses Integral S gleich $b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a)$. Einzeln ausgerechnet ergibt das

erste Integral $\cos(a) - \cos(b)$. Das zweite ergibt $\left[\sqrt{1-x^2} + x \cdot \arcsin(x) \right]_{\sin(a)}^{\sin(b)}$, was gleich

$\cos(b) - \cos(a) + \sin(b) \cdot b - \sin(a) \cdot a$ ist. Ihre Summe ergibt das gleiche: $\rightarrow S = b \cdot \sin(b) - a \cdot \sin(a)$.

4. Eine spezielle Formel für Integrale von Funktionen von $\sin(x)$

Behauptung:

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx \equiv \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx$$

Diese erstaunliche Identität gilt für jede Funktionen f von $\sin(x)$, die im Intervall $[0, \pi]$ stetig ist.

Beweis: Beim Integral $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx$ wird die Substitution $u = \pi - x$ angewendet. Dabei wird

$dx = -du$, und wenn $x = 0$ ist, wird $u = \pi$, und wenn $x = \pi$ ist, wird $u = 0$. Somit wird

$$I = \int_{u=\pi}^{u=0} (\pi - u) \cdot f(\sin(\pi - u)) (-du). \text{ Eine erste Vereinfachung ergibt sich daraus, dass } \sin(\pi - u) \text{ und}$$

$\sin(u)$ identisch sind. Die Integration über $(-du)$ vertauscht nun die Integrationsgrenzen, der Ersatz von $(-du)$ durch du macht dies aber wieder rückgängig. Der Integrand wird nun ausmultipliziert. Das führt zu

$$I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(u)) du - \int_0^{\pi} u \cdot f(\sin(u)) du, \text{ respektive zu } I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(x)) dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx}_{\text{...das ist gleich } I}.$$

werden $2I = \int_0^{\pi} \pi \cdot f(\sin(x)) dx$ und damit $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} f(\sin(x)) dx$, was die Behauptung war.

Beispiel 1: $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) dx$.

Das erste dieser Integrale ergibt $[-x \cdot \cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi} = [\pi]$; das zweite ergibt $\left[-\frac{\pi}{2} \cos[x] \right]_0^{\pi}$, was wie erwartet ebenfalls gleich $[\pi]$ ist.

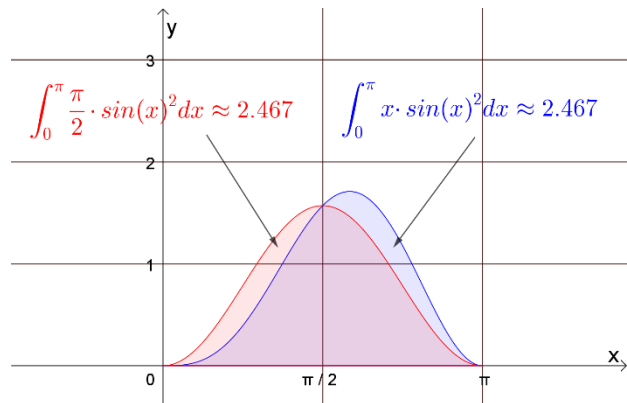
Beispiel 2: $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)^2 dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx$.

Das erste dieser Integrale ergibt

$$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos[2x] - \frac{1}{4} x \sin[2x] \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}; \text{ das}$$

zweite ergibt $\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right) \right]_0^{\pi}$, was ebenfalls

gleich $\boxed{\frac{\pi^2}{4}}$ ist.



In der oben wiedergegebenen Figur sind diese beiden Integrale graphisch dargestellt.

Beispiel 3: $\int_0^{\pi} x \cdot \left(\sin(x)^2 + \sqrt{1 - \sin(x)^2} \right) dx$ und $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(x)^2 + \sqrt{1 - \sin(x)^2} \right) dx$.

Das erste Integral ergibt $\left[\frac{x^2}{4} + \sqrt{\cos(x)^2} - \frac{1}{8} \cdot \cos(2x) - \frac{1}{4} \cdot x \sin(2x) + x \cdot \sqrt{\cos(x)^2} \cdot \tan(x) \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{4} + \pi};$

das zweite ergibt $\left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + \sqrt{\cos(x)^2} \cdot \tan(x) \right) \right]_0^{\pi}$, was ebenfalls gleich $\boxed{\frac{\pi^2}{4} + \pi}$ ist.

Achtung:

Im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ sind $\sqrt{1 - \sin(x)^2}$ und $\cos(x)$ **nicht** identisch, weshalb die Integrale

$$\int_0^{\pi} x \cdot \left(\sin(x)^2 + \cos(x) \right) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ und } \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(x)^2 + \cos(x) \right) dx = \frac{\pi^2}{4} \text{ **nicht** gleich sind!}$$

Literatur:

1. Zur «King's Rule»: <https://www.magnamathematica.com/2024/04/23/kings-rule/>
2. Eine Zusammenstellung von Integrationsformeln: <https://brilliant.org/wiki/integration-tricks/>
3. Ein paar weitere Anwendungen dieser Formeln:
 - Prime Newtons: <https://www.youtube.com/watch?v=v7Lig-Q444E&t=692s>
 - Presh Talwalkar: <https://www.youtube.com/watch?v=BfZObnTIsYk&t=183s>
 - Steve Chow blackpenredpen: <https://www.youtube.com/watch?v=yspp9FSbJlk>
 - Michael Penn: <https://www.youtube.com/watch?v=ExtlUgIxTNY&list=PL22w63XsKjqzJpcuD6InKWZXep2L0z1H8&index=3>