

Georg Keller
georg.keller@shinternet.ch

Physikalische Anwendungen der Differentialrechnung: Ein möglicher Einstieg im Mathematik-Unterricht

1. Einleitung

Eine der konventionellen und fachdidaktisch z.T. ausdrücklich empfohlenen Möglichkeiten, im Mathematik-Unterricht die ersten Schritte in Richtung Differentialrechnung zu motivieren und durchzuführen, besteht darin, sich physikalischer Fragestellungen zu bedienen, häufig der Frage nach dem Bestimmen von Momentangeschwindigkeit oder Momentanbeschleunigung bei geradlinigen Bewegungen. Jahrelange Erfahrung mit Mathematik- und Physikunterricht hat mich aber gelehrt, dass zu viele Schülerinnen und Schüler einen solchen Zugang zur Differentialrechnung leider nicht als positiv motivierend, sondern eher als abschreckend empfinden, weil sie sich bei physikalischen Themen rasch sehr unsicher fühlen. Aus diesem Grund bevorzuge ich einen anderen und ebenso konventionellen Zugang, der sich aber anschaulicher, grundsätzlich gut verständlicher Fragestellungen in Zusammenhang mit Tangenten an Funktionsgraphen bedient. Natürlich ist bei diesem geometrieeleiteten Zugang die aussermathematische Anwendbarkeit der Differentialrechnung nicht augenfällig. Diesen Mangel versuchte ich jeweils zu mildern, indem ich im Rahmen eines einführenden Vortrags zur Differentialrechnung ihre historische Entwicklung beleuchtete und in diesem Zusammenhang auf die mannigfaltigen aussermathematischen Anwendungen der Differentialrechnung, z.B. in der Physik, hinwies; für Konkretes vertröstete ich meine Schülerinnen und Schüler auf später. Nach einigen Unterrichtswochen, während derer wir die notwendigen rechentechnischen Grundlagen der Differentialrechnung¹ erarbeiteten, waren wir dann jeweils so weit, uns ausgewählten physikalischen und auch anderweitigen Anwendungen der Differentialrechnung zuzuwenden. Ein wesentliches Ziel des *Einstiegs* in diese Unterrichtssequenz war, die Schülerinnen und Schülern erleben zu lassen, wie die Differentialrechnung überaus nützlich und z.T. verblüffend einfach und elegant angewendet werden kann, um ...

- bekannte oder vermutete physikalische Gesetzmässigkeiten zu *überprüfen* (vgl. Kap. 2);
- physikalische Gesetzmässigkeiten *von Grund auf herzuleiten* (vgl. Kap. 3).

Im Austausch mit meinen Mathematik-Kolleginnen und -Kollegen zeigte es sich, dass ihnen manche der von mir dabei thematisierten physikalischen Anwendungen zu wenig bewusst oder unbekannt, für ihren eigenen Unterricht aber durchaus von Interesse waren. Weil es vielleicht Bulletin-Leserinnen oder -Leser gibt, denen es ähnlich geht, und weil ich als Frischpensionierter über ein deutlich entspannteres Zeitbudget verfüge, werde ich im Rest dieses Bulletin-Beitrages gerne einige entsprechende Hinweise geben. Dabei beziehe ich mich vorwiegend auf erarbeitende Unterrichtspassagen und teilweise auf Lern-/Übungs- oder auch Prüfungsaufgaben. Aus Platzgründen werde ich nicht auf die umfangreiche Fortsetzung des im Folgenden skizzierten Einstiegs eingehen können.

Den Beginn meines Einstiegs in ausgewählte physikalische Anwendungen der Differentialrechnung widmete ich jeweils einer ausführlichen Begründung der im Folgenden immer wieder benützten Tatsache, dass bei einer (stillschweigend als genügend regulär vorausgesetzten) geradlinigen Bewegung mit Position $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ die beiden Beziehungen

$$\dot{s}(t) = v(t) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) = a(t) \quad (1)$$

gelten.

¹ D.h. die Ableitungsfunktionen der Grundfunktionen (Potenz-, trigonometrische, Exponential- und Logarithmusfunktionen) und die Ableitungsregeln (Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel).

2. Überprüfen bekannter/vermuteter physikalischer Gesetzmässigkeiten

- Beispiel 2.1: Manche meiner Schülerinnen und Schüler konnten sich zwar noch mehr oder weniger an die im Physikunterricht vielfach verwendeten Formeln $s(t) = s_0 + v \cdot t$ (gültig bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit v und Anfangsposition s_0) und $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (gültig bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Beschleunigung a , Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Anfangsposition s_0) erinnern. Normalerweise waren sie aber ausserstande, die Richtigkeit dieser Formeln zu überprüfen, geschweige denn, sie von Grund auf herzuleiten. – Es war daher augenöffnend für sie zu erleben, wie z.B. im Falle von $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ zwei einfache Ableitungsberechnungen und zwei Funk-

tionsauswertungen bei $t = 0$ das Gewünschte sofort und problemlos liefern: $s(0) = s_0$ ✓; $v(t) \stackrel{(1)}{=} \dot{s}(t) = \frac{d}{dt}(s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2) = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v(0) = v_0$ ✓; $a(t) \stackrel{(1)}{=} \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}(v_0 + a \cdot t) = a$ ✓

- Beispiel 2.2: Ähnlich war's beim Freien Fall ². Einige Schülerinnen und Schüler erinnerten sich zwar jeweils daran, dass mit Hilfe des Energieerhaltungsprinzips diverse Fragestellungen in Zusammenhang mit dem Freien Fall in angenehm einfacher Weise beantwortet werden können; und manchmal erinnerten sie sich sogar an die unter speziellen Umständen gültige Energieerhaltungsformel $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$. Nur selten aber erinnerten sie sich auch an deren Gültigkeitsrahmen, und kaum je an die allgemeine Formulierung des Energieerhaltungssatzes, d.h. an $\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{konst.}$. Kaum überraschend, dass ein Beweis von $\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{konst.}$ ihre Möglichkeiten weit überstieg. Das aber fand ich immer sehr bedauerlich; denn weil das Prinzip der Energieerhaltung eines der grundlegendsten physikalischen Prinzipien ist, würde ich es sehr begrüßen, wenn die Schülerinnen und Schüler wenigstens im Rahmen einfacher physikalischer Modelle, und sofern sinnvoll möglich, die Richtigkeit des entsprechenden Energieerhaltungssatzes nachweisen könnten. – Nun, beim Freien Fall ist es sinnvoll möglich, und zwar erlaubt die Differentialrechnung einen erfreulich unkomplizierten, kurzen und eleganten Beweis: Man betrachte die Funktion $E(t) := \frac{1}{2} m v^2 + m g h$ und berechne deren zeitliche Ableitung, u.a. mit Hilfe der Kettenregel:

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + m g h \right) = m v \dot{v} + m g \dot{h} \quad (2)$$

Weil h nur eine andere Bezeichnung für s ist, ist gemäss (1) $\dot{h} = v$, und weil $\dot{v} = -g$ ist ³, können wir (2) wie folgt fortsetzen:

$$= -m v g + m g v = 0 \quad (3)$$

(3) zeigt, dass sich beim Freien Fall der Wert von $\frac{1}{2} m v^2 + m g h$ tatsächlich nicht ändert, also konstant bleibt.

Anmerkung: Erfreulicherweise, und für Uneingeweihte auch erstaunlicherweise, war es überhaupt nicht nötig, den zeitlichen Verlauf der Fallbewegung zu kennen, um den Energieerhaltungssatz beweisen zu können; denn nebst (1) verwendeten wir in (2), (3) nur die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$. Dies ist ein gutes Omen für das Untersuchen von Energieerhaltungssätzen in physikalisch komplizierteren Situationen, wo wir den zeitlichen Verlauf der entsprechenden Bewegung nur mit Aufwand oder gar nicht berechnen könnten!

- Beispiel 2.3: Im Schwerpunktfach Anwendungen der Mathematik ging ich noch einen Schritt weiter und betrachtete auch krummlinige Bewegungen. Nach Bereitstellen der Produktregel für die Ableitung des Skalarproduktes, d.h. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{w}(t)) = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{w}}$, und mit Hilfe des Tricks, Längen von Vektoren via

² D.h. beim Betrachten einer rein vertikalen Bewegung eines Gegenstandes der Masse m nahe der Erdoberfläche, unter Vernachlässigung aller Kräfte ausser der zur Erde gerichteten Gravitationskraft der Stärke mg .

³ Die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$ besagen, dass $a = -g$ ist. Via (1) erhalten wir daraus $\dot{v} = -g$.

Skalarprodukt auszudrücken, z.B. also $|\vec{v}|$ als $(\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}$ umzuschreiben, kann man analog zu Beispiel 2.2 und in recht angenehmer Weise z.B. Folgendes nachweisen:

- Für einen nahe der Erdoberfläche und reibungslos auf irgendeiner Bahn gleitenden punktförmigen Gegenstand der Masse m , der sich nur unter Einfluss der Erdanziehungskraft und einer den Gegenstand auf die Bahn zwingenden Zwangskraft $\vec{F}_Z$ mit $\vec{F}_Z(t) \perp \vec{v}(t)$ bewegt (was z.B. als erste Näherung fürs Modellieren der Bewegung eines Achterbahnwagens dienen kann), gilt derselbe Energieerhaltungssatz wie beim Schiefen Wurf, d.h. es gilt $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + mgh = \text{konst.}$.
- Für einen punktförmigen Gegenstand der Masse m , welcher sich unter Einfluss der Gravitationskraft eines punktförmigen Körpers der Masse M bewegt (wobei $\vec{s}$ von M zu m zeigt), ist $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GmM}{|\vec{s}|} = \text{konst.}$.
- Für ein elektrisch geladenes punktförmiges Teilchen der Masse m im beliebigen magnetischen Feld gilt die Erhaltung der kinetischen Energie, d.h. $\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \text{konst.}$.

Wenn auch die Produktregel für die Ableitung des Vektorprodukts, d.h. $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{w}(t)) = (\dot{\vec{u}} \times \vec{w}) + (\vec{u} \times \dot{\vec{w}})$, zur Verfügung steht, kann man kurz und problemlos beweisen, dass für einen Gegenstand der Masse m , welcher sich unter Einfluss einer Zentralkraft⁴ bewegt, Drehimpulserhaltung gilt, d.h. $\vec{L}(t) := \vec{s}(t) \times \vec{p}(t) = \text{konst.}$ (wobei $\vec{p} := m\vec{v}$).

3. Physikalische Gesetzmässigkeiten von Grund auf herleiten

- **Beispiel 3.1:** Kreisbewegungen gehören zum Standardrepertoire des Physikunterrichtes, aus Einfachheitsgründen normalerweise solche mit konstanter Schnelligkeit. Eine dazu gehörende Standardfrage ist, in welche Richtung der Beschleunigungsvektor zeigt, und wie stark die Beschleunigung ist. Diese Fragen, und zwar auch für Kreisbewegungen mit *beliebiger* Schnelligkeit, lassen sich schwerpunktfachtauglich, kompakt und elegant mit Hilfe von Differentialrechnung und Vektorgeometrie klären. Das geht so:
 - Wenn wir mit $\vec{s}(t)$ den Vektor vom Kreismittelpunkt zu m bezeichnen, und mit $\vec{n}$ irgendeinen auf der Kreisebene senkrecht stehenden zeitunabhängigen Vektor, gilt zu allen Zeiten $\vec{s}(t) \cdot \vec{n} = 0$; Ableiten beider Seiten dieser Gleichung ergibt⁵ $\vec{v}(t) \cdot \vec{n} = 0$, d.h. nebst $\vec{s}(t)$ liegt auch $\vec{v}(t)$ in der Kreisebene. Nochmaliges Ableiten ergibt, dass auch $\vec{a}(t)$ in der Kreisebene liegt.
 - m bewegt sich ja auf einem Kreis, d.h. $|\vec{s}(t)| = \text{konst.}$, d.h. $\vec{s}(t) \cdot \vec{s}(t) = \text{konst.}$; Ableiten beider Seiten dieser Gleichung ergibt $\vec{v}(t) \cdot \vec{s}(t) = 0$, was heisst, dass der in der Kreisebene liegende Vektor $\vec{v}(t)$ immer tangential an die Kreisbahn gerichtet ist. Ableiten beider Seiten der Gleichung $\vec{v}(t) \cdot \vec{s}(t) = 0$ ergibt $\vec{a}(t) \cdot \vec{s}(t) = -|\vec{v}(t)|^2$ resp.

$$|\vec{a}(t)| = -\frac{1}{\cos(\gamma(t))} \cdot \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{s}(t)|}, \quad (4)$$

wobei $\gamma(t)$ der Zwischenwinkel von $\vec{a}(t)$ und $\vec{s}(t)$ ist. Aufgrund von (4) und für den Normalfall $|\vec{v}(t)| > 0$ sehen wir, dass

$$90^\circ < \gamma(t) \leq 180^\circ \quad (5)$$

ist. (5) zeigt, dass die zu $\vec{s}(t)$ kollineare Komponente von $\vec{a}(t)$ zentripetal, nicht zentrifugal, gerichtet ist. Für einige meiner Schülerinnen und Schüler war das rein anschaulich von Anfang an klar, für andere aber gar nicht. Und auf anschaulicher Basis hätte man (4) wohl kaum erraten können.

Beschränken wir uns nun auf den Standardfall *konstanter* Schnelligkeit. – Wegen $|\vec{v}(t)| = \text{konst.}$, d.h. $\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \text{konst.}$, erhalten wir via Ableiten

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0. \quad (6)$$

⁴ Wo definitionsgemäss $\vec{F}(\vec{s})$ kollinear zu $\vec{s}$ ist.

⁵ Weil die Funktion auf der linken Seite der Gleichung, d.h. $\vec{s}(t) \cdot \vec{n}$, zu allen Zeiten t denselben Wert hat wie die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung, d.h. 0 , stimmen auch ihre Ableitungsfunktionen überein.

Weil $\vec{s}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ in der Kreisebene liegen und weil $\vec{v}(t)$ senkrecht auf $\vec{s}(t)$ steht, besagt (6), dass $\vec{a}(t)$ entweder parallel oder antiparallel zu $\vec{s}(t)$ gerichtet ist, d.h. dass $\gamma(t) = 0^\circ$ oder $\gamma(t) = 180^\circ$ ist. Via (5) erhalten wir $\gamma(t) = 180^\circ$, d.h. m erlebt eine rein zentripetale Beschleunigung, deren konstante Stärke gemäss (4) berechnet werden kann: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$ (mit r = Kreisradius).

- **Beispiel 3.2:** Kehren wir zurück zum Grundlagenfach Mathematik. Und stellen uns vor, die Schülerinnen und Schüler wüssten nicht, wie man bei geradlinigen Bewegungen mit konstanter Beschleunigung die Positionsrechnung vornehmen kann. Das Ziel dieses Beispiels war, ihnen eine für sie neuartige und sehr breit (d.h. nicht nur beim aktuellen Beispiel und Ähnlichem) einsetzbare Methode vorzustellen, mit deren Hilfe die Positionsrechnung von Grund auf bewältigt werden kann. Als Beispiel wählte ich den alltäglichen und ihnen physikalisch bestens vertrauten Freien Fall, z.B. mit $h_0 = 15 \text{ m}$ und $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:
 - Wie bereits erwähnt, besagen die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ und das Kraftgesetz für den Freien Fall $F = -mg$, dass $a = -g$ ist; via (1) erhält man daraus $\dot{v}(t) = -g$. Diese Differentialgleichung (DG) für die zu berechnende Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$, welche ausserdem die Anfangsbedingung (AB) $v(0) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erfüllen muss, war jeweils die erste DG, welcher meine Schülerinnen und Schüler bewusst begegnet sind. Aufgrund ihrer Kenntnis der Ableitung der Grundfunktionen brauchte es jeweils nur wenig Unterstützung, damit einige Schülerinnen und Schüler zur Vermutung $v(t) = -g \cdot t$ gelangten. Ich ergänzte, dass und warum die Lösung aber $v(t) = -g \cdot t + C$, $C =$ irgendeine Konstante, lautet, und wie man den konkreten Wert von C via AB bestimmt.
 - Wir erhielten also $v(t) = -g \cdot t - 2$ (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Via (1) folgte daraus die DG $\dot{h}(t) = -g \cdot t - 2$ für die zu berechnende Positionsfunktion $h(t)$, welche ausserdem die AB $h(0) = 15 \text{ m}$ erfüllen musste. Motiviert durch die obigen Erfahrungen und ohne viel Unterstützung gelangten dann jeweils einige Schülerinnen und Schüler zu $h(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 - 2t + D$, mit $D = 15 \text{ m}$.
- **Beispiel 3.3:** Ein weiteres standardmässig in der Physik verwendetes Modell ist das eines Gegenstandes der Masse m , welcher sich an einer Feder (mit Federkonstante k) befestigt geradlinig und reibungsfrei bewegt⁶. Mit $s(t)$ die Auslenkung von m aus der Ruhelage (bei $s = 0$) bezeichnend, nahmen wir z.B. an, dass $m = 0.5 \text{ kg}$, $s_0 = 0.2 \text{ m}$, $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $k = 6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ist; die Aufgabe war, $s(t)$ zu berechnen. Die Schülerinnen und Schüler konnten sich z.T. daran erinnern, dass im Physikunterricht die Lösung mittels trigonometrischer Funktionen formuliert wurde; weiter kamen sie jeweils aber nicht. – Um die Bewegung von m von Grund auf zu untersuchen, d.h. die harmonische Schwingungsformel für $s(t)$ wirklich herzuleiten, benützten wir, analog zu Beispiel 3.2, die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$, das Hookesche Federgesetz $F = -ks$ und (1), was zu folgender DG und AB führte:

$$\ddot{s}(t) = -12 s(t) \quad \text{mit} \quad s(0) = 0.2 \text{ m}, \quad \dot{s}(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7)$$

Weil das Lösen von (7) deutlich schwieriger ist als das Lösen der DGs von Beispiel 3.2, wollte ich in einem ersten Anlauf so tun, als ob wir (7) gar nicht lösen könnten. Unter dieser Annahme gab's folgende Optionen für das weitere Vorgehen: Wir versuchen, ...

- wenigstens wichtige Teilaspekte der exakten Lösung von (7) zu berechnen.
- Methoden zum Bestimmen von Näherungslösungen von (7) zu entwickeln.

Für Ueingezeichnete ist es immer wieder überraschend, wie gut die erste Option klappt: Wie in Beispiel 2.2 kann man nämlich beweisen, dass auch hier ein Energieerhaltungssatz gilt, d.h. dass $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 = \text{konst.}$ ist. Daher gilt für alle Zeitpunkte t z.B.

$$\frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} k s^2(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k s_0^2 \quad (8)$$

⁶ Weil zu erwarten war – und diese Erwartung wurde nie enttäuscht –, dass die meisten Schülerinnen und Schüler diesem Modell wenig Reiz attestieren würden, bemühte ich mich jeweils um eine Situationsklärung: Das Modell der schwingenden Feder, wortwörtlich verstanden, interessiert tatsächlich kaum jemanden; im übertragenen Sinne verstanden aber sehr wohl, weil z.B. die geradlinige Bewegung von irgendeinem punktförmigen Gegenstand sehr nahe einer stabilen Gleichgewichtslage mathematisch in sehr guter Näherung äquivalent zum vorliegenden Federmodell ist. Dieses ist daher eines der grundlegenden Modelle der Physik und der Ingenieurwissenschaften.

(8) kann nun verwendet werden, um für jeden beliebigen Wert der Auslenkung s die dazugehörige Geschwindigkeit v zu berechnen, und umgekehrt (in der Regel in Unkenntnis des fraglichen Zeitpunktes). So z.B. kann man via (8) sofort die physikalisch interessierende Amplitude A (d.h. die maximale Auslenkung der Federschwingung) berechnen, denn bei Erreichen dieser maximalen Auslenkung ist sicherlich

$$v = 0, \text{ d.h. } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k s_0^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + s_0^2} \stackrel{(7)}{\cong} 0.35 \text{ m}.$$

Methoden zur Bestimmung von Näherungslösungen des Anfangswertproblems (7) diskutierte ich zu diesem Zeitpunkt nicht (sondern erst später, im Rahmen anderer Beispiele) und zeigte stattdessen, mit welchen Überlegungen (7) exakt gelöst werden kann. Und wie mit Hilfe der exakten Lösung z.B. der Wert von A ebenfalls bestimmt werden kann (letztlich aber mit grösserem Aufwand).

- **Beispiel 3.4:** Wir verallgemeinern das im Beispiel 3.3 untersuchte harmonische Schwingungs-Modell so, dass statt der idealen Feder mit rein linearem Kraftgesetz $F = -k s$ eine realistischere Feder modelliert wird, bei welcher für kleine Auslenkungen nach wie vor das lineare Kraftgesetz (in guter Näherung) gilt, für grössere Auslenkungen hingegen durch nichtlineare Terme korrigiert wird⁷. Z.B. könnte $F = -k_1 s - k_3 s^3 - k_5 s^5$ mit $k_1 = 6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $k_3 = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, $k_5 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}^5}$ sein⁸, womit die DG und AB für $s(t)$ wie folgt lauten:

$$\ddot{s} = -12 s - 20 s^3 - 100 s^5 \quad \text{mit} \quad s(0) = 0.2 \text{ m}, \quad \dot{s}(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (9)$$

Es ist nicht bekannt, wie dieses Anfangswertproblem gelöst, d.h. wie der zeitliche Verlauf der durch (9) beschriebenen anharmonischen Schwingung exakt berechnet werden kann. Trotzdem kann man wichtige Teilaspekte der exakten Lösung von (9) berechnen, denn wiederum gilt ein Energieerhaltungssatz⁹, nämlich

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k_1 s^2 + \frac{1}{4} k_3 s^4 + \frac{1}{6} k_5 s^6 = \text{konst.}, \quad (10)$$

was in üblicher Weise bewiesen werden kann. Damit erhält man z.B. $A \cong 0.33 \text{ m}$ und $v(s = 0.3 \text{ m}) \cong \pm 0.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, natürlich $v(s = 0.2 \text{ m}) = \pm 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v(s = 0.1 \text{ m}) \cong \pm 1.17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v(s = 0 \text{ m}) \cong \pm 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; insbesondere beträgt der Maximalwert der Schnelligkeit ca. $1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mit Hilfe dieser Geschwindigkeitswerte könnte man jetzt den zeitlichen Verlauf der anharmonischen Schwingung abschätzen, wobei die Qualität der Schätzung umso besser würde, je mehr Positionswerte s mit den entsprechenden Geschwindigkeitswerten $v(s)$ verwendet würden.

Anmerkung: Wenn man in (10) v als $\dot{s}$ schreibt, kann (10) als DG 1. Ordnung für s verstanden werden¹⁰. Diese DG 1. Ordnung für s ist ...

- sehr nützlich, sofern man qualitative Näherungslösungen von (9) bestimmen möchte (via Richtungsfeld);
- nicht gänzlich unproblematisch, sofern man numerische Näherungslösungen von (9) berechnen möchte, welche das Schwingungsverhalten auch in der Nähe eines Umkehrpunktes beschreiben.

⁷ Entspricht der Potenzreihenentwicklung der Funktion $F(s)$ um $s = 0$, wobei die Reihenentwicklung nach hinreichend vielen Termen abgebrochen wird.

⁸ Diese Werte von k_3 und k_5 entstammen nicht einer konkreten Messung, sondern sie wurden von Hand so gewählt, dass für $|s| \leq s(0) \equiv 0.2 \text{ m}$ die nichtlinearen Kraftbeiträge deutlich geringer sind als der lineare Kraftbeitrag.

⁹ Sofern die auf den Gegenstand einwirkende Gesamtkraft F nur von der Position s abhängt, und zwar so, dass $F(s)$ ein Potential $\varphi(s)$ hat, d.h. sofern es eine Funktion $\varphi(s)$ mit der Eigenschaft $F(s) = -\frac{d}{ds} \varphi(s)$ gibt, so gilt Energieerhaltung in der Form $\frac{1}{2} m v^2 + \varphi(s) = \text{konst.}$. Im vorliegenden Fall ist $F(s) = -k_1 s - k_3 s^3 - k_5 s^5$ und hat offenbar ein Potential $\varphi(s)$. (In mehrdimensionalen Situationen gilt Analoges: Sofern $\vec{F}(\vec{s}) = -\text{grad } \varphi(\vec{s})$ ist, ist $\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \varphi(\vec{s}) = \text{konst.}$.)

¹⁰ Die Verwendung der Energieerhaltung führte also zu einer Reduktion des Grades der DG um 1, d.h. vom Grad 2 bei (9) zum Grad 1 bei (10).