

Martin Lieberherr
MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

Lungengängig

1 Einleitung

Warum kann Feinstaub die Lunge erreichen? Warum prallt er nicht gegen die Nasenschleimhaut und bleibt dort kleben? Wir kennen doch alle das Phänomen der schwarzen “Nasenbööggen”, wenn wir in staubiger Umgebung gearbeitet haben. Aber offenbar werden die kleineren Aerosolpartikel durch die Luftströmung mitgenommen und nicht durch Trägheit aus der Bahn geworfen. Eine kleine Abschätzung soll die relevanten Kräfte aufzeigen.

Betrachten wir ein kleines Kügelchen von $d = 1 \mu\text{m}$ Durchmesser und der Dichte $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, das sich mit $v = 1 \text{ m/s}$ durch die nasale Luft bewegt. Auf das Teilchen wirken die Gewichtskraft $F_G = mg$ und die Stokes'sche¹ Reibungskraft $F_R = 6\pi r\eta \cdot v$ mit der dynamischen Viskosität¹ η . Wie vergleichen sich die Kräfte?

$$F_G = \rho V g = \rho \cdot \frac{\pi}{6} d^3 \cdot g = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 5 \cdot 10^{-15} \text{ N} \quad (1)$$

$$F_R = 3\pi d\eta v = 3\pi \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s} \cdot 1 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ N} \quad (2)$$

Wir sehen, dass die Gewichtskraft fünf Grössenordnungen kleiner als die Reibungskraft ist. Das hat natürlich damit zu tun, dass die Stokes-Reibung direkt proportional zum Durchmesser, die Masse hingegen proportional zur dritten Potenz des Durchmessers ist. Wir wollen Gewichtskraft und Auftrieb im Folgenden also ignorieren. Wir müssen uns um den Fall $v \rightarrow 0$ keine Sorgen machen, denn der Bewegung in der Strömung ist ja die zufällige Brown'sche Bewegung des Teilchens überlagert:

$$\bar{u}_{\text{Brown}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 292.15 \text{ K}}{1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3}} = 5 \text{ mm/s} \quad (3)$$

2 Theorie

Wie bewegt sich ein idealisiertes Teilchen, wenn nur die Stokes'sche Reibung wirkt?

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{F_R}{m} = -\frac{6\pi r\eta}{m} \cdot v \stackrel{\text{Def}}{=} -\frac{v}{\tau} \quad \tau = \frac{m}{3\pi d\eta} = \text{const} \quad (4)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} \Rightarrow v(t) = v_0 \exp(-t/\tau) \quad (5)$$

$$s(t) = \int_0^t v_0 \exp(-t/\tau) dt \Rightarrow^2 s(t) = s_\infty - s_\infty \exp(-t/\tau) \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = -\frac{v}{\tau} \rightarrow \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow v(s) = v_0 - s/\tau \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit nimmt linear mit dem zurückgelegten Weg ab. Bei $s_\infty \stackrel{\text{Def}}{=} v_0\tau$ steht der Körper still (bis auf Wärmebewegung, siehe oben). Die Geschwindigkeit nimmt exponentiell mit der Zeit ab, d.h. die Endposition s_∞ wird nach unendlich langer Zeit (asymptotisch für $t \gg \tau$) erreicht. Die Beziehung $v(s)$ hätte auch aus $s(t)$ und $v(t)$ durch Elimination der Zeit t hergeleitet werden können. Schwerpunktklassen sollten aber Gelegenheit haben, ein paar einfache Differentialgleichungen selber zu lösen. Der Weg via Elimination von t kann dann als Test dienen, schliesslich sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Resultate selbständig zu kontrollieren.

Kleiner Exkurs

Welche Kraft bewirkt eine exponentielle Geschwindigkeitsabnahme mit dem Weg: $v(s) = v_0 \exp(-s/\sigma)$?

$$F_{\text{res}} = ma \quad \wedge \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad \wedge \quad v(s) = v_0 \exp(-s/\sigma) \quad \Rightarrow \quad (8)$$

$$F_{\text{res}} = m \frac{dv}{ds} v = -\frac{m}{\sigma} (v_0 \exp(-s/\sigma))^2 = -\frac{m}{\sigma} \cdot v^2 \quad (9)$$

Wirkt bei einer eindimensionalen Bewegung nur der Luftwiderstand, z.B. beim Einsatz eines Bremsfallschirms, so nimmt die Geschwindigkeit exponentiell mit dem zurückgelegten Weg ab.

3 Diskussion

Wir setzen unsere Zahlen ein, um ein Gefühl für die Grössenordnung der “stokesschen Bremsung” eines Aerosolpartikels zu erlangen.

$$\tau = \frac{m}{3\pi d \eta} = \frac{\rho d^2}{18 \eta} = \frac{1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2}{18 \cdot 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}} = 3 \mu\text{s} \quad (10)$$

$$s_\infty = v_0 \tau = 1 \text{ m/s} \cdot 3 \mu\text{s} = 3 \mu\text{m} \quad (11)$$

Das Aerosol-Teilchen wird innert weniger Mikrosekunden auf einer Strecke, welche dieselbe Grössenordnung wie der Durchmesser hat, praktisch zum Stillstand gebracht (relativ zum umgebenden Fluid). Das Teilchen kann somit den Richtungs- und Schnelligkeitsänderungen der Atemluft problemlos folgen. Dies erklärt, warum Feinstaub fast genauso wie die Luft in die Lunge gelangen kann.

Die Rechnungen im Theorieteil dieses Artikels eignen sich für das Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik. Ich stelle im Unterricht immer wieder fest, dass die Schülerinnen und Schüler ein Integral zwar lösen können, aber Schwierigkeiten mit der Interpretation haben. Genau deshalb braucht es solche und ähnlich gelagerte Beispiele, wo die Klassen sehen können, wie die Infinitesimalrechnung angewendet wird. Die Variablen werden mit Bedeutung aufgeladen und die Rechenschritte folgen zwanglos aus den altbekannten Gesetzen der z.B. Dynamik.

Aufgaben wie jene, wo aus dem Geschwindigkeitsverlauf $v(s)$ die Bremskraft bestimmt werden muss, löse ich gerne selber, schliesslich muss man im Training bleiben. Ich stelle aber oft fest, dass mir die Intuition fehlt, ein Resultat vorherzusagen. Niemals hätte ich erwartet, dass eine exponentielle Abnahme $v(s)$ auf ein v^2 -Widerstandsgesetz hinausläuft. Allenfalls hätte ich “je schneller die Geschwindigkeit abnimmt, desto stärker ist die Reibungskraft” stottern können. Das ist aber leider nur eine vorwissenschaftliche Aussage, denn sie lässt den funktionalen Zusammenhang offen.

¹ DMK, DPK, DCK, “Formeln, Tabellen, Begriffe”, hep Verlag, 9. Auflage (2025)

² Die untere Grenze des Integrals legt die Integrationskonstante fest. Die obere Grenze lasse ich weg und umgehe so, eine andere Integrationsvariable einführen zu müssen.

19. April 2022, Lie.