

Zievi Ursin Solèr
 Fachhochschule Graubünden, ursin.soler@fhgr.ch

Einfacher numerischer Zugang zur Fehlerfortpflanzung

1 Einleitung / Motivation

Der Kosmos und dessen Naturgesetze können erstaunlich komplex sein. Während sich die Mathematik mit allem Denkbaren befasst und so nur an die Grenzen der Logik und der Fantasie gebunden ist, hat sich die Physik das einschränkende Ziel gesetzt, die Natur um uns herum abzubilden und befasst sich darum mit dem Beobacht- und Messbaren. Hier liegt eine der grossen Stärken, aber auch eines der grossen Probleme der Physik. Es gibt die Möglichkeit, Experimente durchzuführen, um Antworten zu finden, allerdings müssen dazu auch Messungen gemacht werden und diese unterliegen - in der uns zur Verfügung stehenden Natur - der Streuung und Fehlern. Diese Messfehler nötigen uns, die Methoden der Statistik anzuwenden, um Einsicht in die Zusammenhänge zu erhalten.

Ich arbeite heute als Dozent an einer Fachhochschule und kann sagen, den meisten unserer Studierenden geht es gleich wie mir; Messergebnisse (statistisch) zu interpretieren birgt Tücken. Allzu häufig ignorieren wir die komplexen und subtilen Details und kommen mit einer einfachen, schnellen Messung davon. Sollte das doch nicht reichen, gibt es die Allzweckwaffen *Mittelwert* und *Varianz*. Damit begeben wir uns - oft unbewusst - in das Reich der Normalverteilung. Dies reicht in sehr vielen Fällen aus, aber fassen die Probleme tiefer - haben wir es mit anderen Verteilungen zu tun - reicht ein Kratzen an der Oberfläche nicht mehr aus.

Einer der Schlüsselmomente für mich war die Erkenntnis, dass das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz sehr schnell an Grenzen stösst. Die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung ist häufig das obere Limit, das Studierende gewinnenbringend einsetzen können. Darum stellt sich die Frage, ob es einfachere Methoden und Zugänge gibt, diese Zusammenhänge abzubilden und verstehbar zu machen.

2 Grundrechenoperationen mit Würfeln

Mit der Einführung von Computern sowie Skript- und Programmiersprachen, die vektorisiert auf N Werten genauso rechnen können, wie skalar auf einzelnen Grössen, haben wir ein sehr mächtiges Werkzeug erhalten [1]. Nutzen wir dieses zur Betrachtung der Grundrechenoperationen, indem wir zuerst N Werte aus einer gegebenen Verteilung als Liste speichern und statt mit einzelnen Werten mit dieser Liste (Stichprobe) arbeiten^a.

Wichtig dabei ist, wie wir die Stichprobe erzeugen; gute Ergebnisse lassen sich mit dem *Latin hypercube sampling (LHS)* erzielen [5].

Angenommen, wir haben zwei Grössen, deren Werte nicht exakt bekannt sind, sondern die gleichverteilt innerhalb eines gegebenen Intervalls liegen, z.B. zwei Würfel und die dazugehörigen Listen von Werten A und B .

Problem: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl bei einem Würfel (A oder B)?

Die Verteilungen A und B sind nicht korreliert und zur besseren Veranschaulichung kleiner Unterschiede

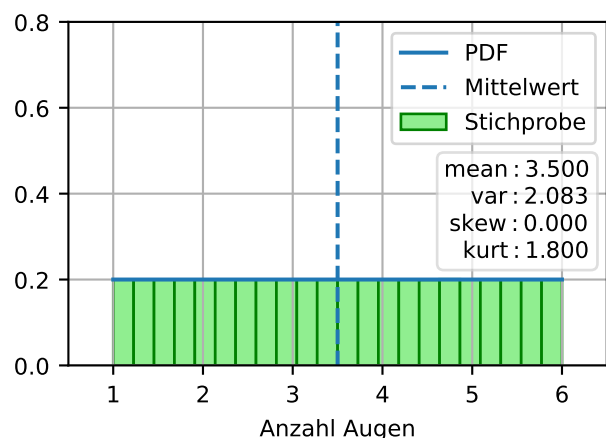


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl bei einem Würfel (A oder B).

sowie zur Verallgemeinerung werden kontinuierliche Variablen verwendet^b.

Die Frage danach, wie sich diese Grössen und deren Verteilung unter einfachen arithmetischen Operationen der 1. und 2. Stufe verhalten, führt zu interessanten Erkenntnissen.

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Summe der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A + B$)?*

Wir müssen nichts weiter tun, als die beiden Listen für A und B elementweise zu addieren. Der Mittelwert^c verhält sich so, wie sich die Addition der (exakten) skalaren Werte verhält (also ohne Streuung); es ist $3.5 + 3.5 = 7.0$. Allerdings ist die Verteilung nun nicht mehr gleichförmig, sondern dreieckig^d. Das ist entscheidend; die Verteilung für $A + B$ verhält sich grundsätzlich anders als diejenige von A oder B . Die Verteilung von $A + B$ ist symmetrisch.

Für die Subtraktion $A - B$ erhalten wir dasselbe Verhalten mit einem Mittelwert von 0.0, weil -1 multipliziert mit B die Verteilung an der y-Achse spiegelt. Die Multiplikation führt zu folgendem

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Produkts der Augenzahl bei zwei Würfeln?*

Wie in Abb. 3 zu sehen, ist die Verteilung von $A \cdot B$ nicht mehr symmetrisch, sondern zeigt höhere Wahrscheinlichkeiten für Werte, die kleiner sind als der Mittelwert. Das bedeutet, in so einem Experiment werden wir häufiger Werte erhalten, die kleiner sind als der Mittelwert und nur vereinzelt grössere Werte, bis zu ca. 3 Mal so gross wie der Mittelwert (maximal 36).

Problem: *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Quotienten der Augenzahl bei zwei Würfeln?*

Im Falle der Division zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der Multiplikation.

Sicher sagen können wir, dass diese Verteilungen nicht mehr gleichförmig sind und im Falle der 2. Stufe asymmetrisch werden, so dass im Experiment der Eindruck entstehen kann, dass der Mittelwert kleiner ist (das Maximum der PDF) weil einzelne grössere Werte aufgrund der Seltenheit Gefahr laufen, als Ausreisser klassifiziert und aussortiert zu werden.

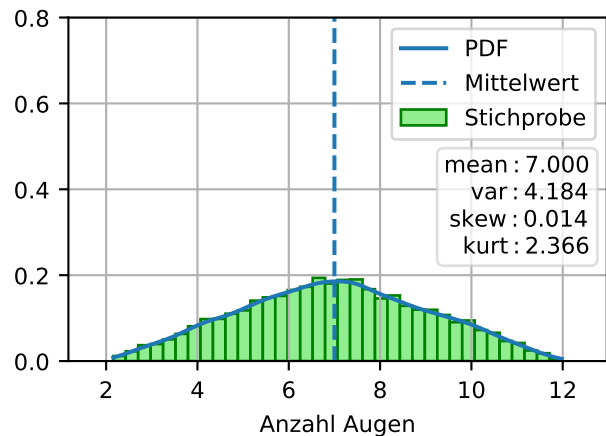


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Summe der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A + B$).

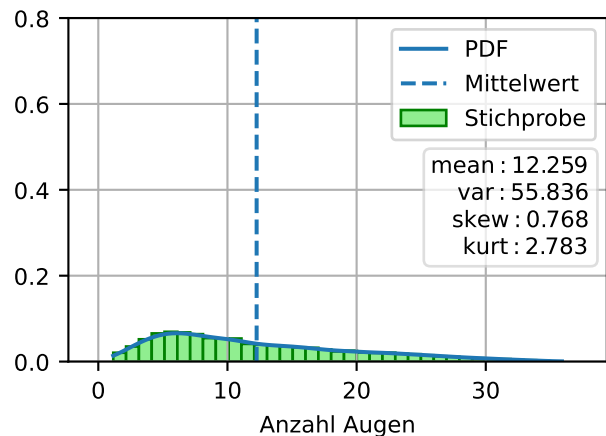


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Produkts der Augenzahl bei zwei Würfeln ($A \cdot B$).

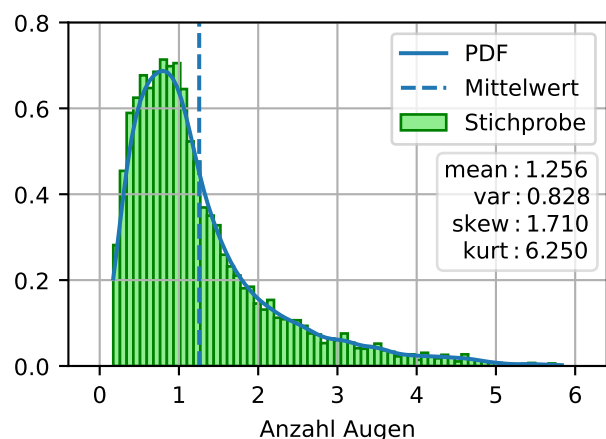


Abbildung 4: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Quotienten der Augenzahl bei zwei Würfeln (A / B). Zu bemerken ist hier, dass der Mittelwert nicht mehr mit der Intuition übereinstimmt, denn er ist ungleich 1.

3 Fehlerfortpflanzung in der Physik

Betrachten wir ein typisches Beispiel aus dem Physikunterricht, ein Fadenpendel. Wir vergleichen das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz mit dem hier präsentierten Ansatz.

Problem: Für ein Fadenpendel gilt zwischen Erdbeschleunigung g , Fadenlänge l , und Periode T der folgende Zusammenhang $g = 4\pi^2 l T^{-2}$. Bestimmen Sie aus $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.05)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.2)$ den Fehler Δg .

Wie Abb. 5 zeigt, ist dies keine Normalverteilung (Schiefe/Skewness = 0.0 und Wölbung/Kurtosis = 3.0) und darum gibt die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung in diesem Fall mit (9.870 ± 2.035) (Varianz: 4.140) eine falsche Antwort.

Weder der Mittelwert noch die Varianz sind korrekt. Das ist nicht überraschend, berücksichtigt man die Tatsache, dass die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung eine Approximation erster Ordnung und damit linear ist (1. Glied der Taylor-Reihe). Der T^{-2} Term kann nicht akkurat approximiert werden. Dennoch funktioniert diese Approximation für kleine Fehler in den kritischen Termen gut. Das bedeutet, sofern der Fehler in T klein ist, kann er im linearen Term l auch grösser sein^e und trotzdem ist das Resultat korrekt, z.B. mit $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.2)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.05)$.

Das Resultat stimmt nun wegen des kleinen Fehlers im nicht-linearen Teil T viel besser mit der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung überein; (9.870 ± 2.035) (Varianz: 4.140).

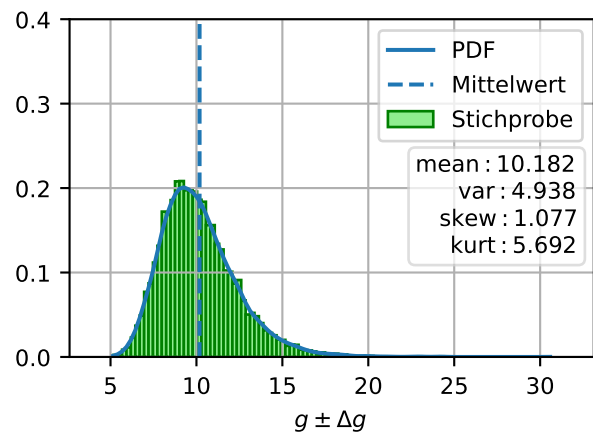


Abbildung 5: Fadenpendel mit grosser Varianz: $(g \pm \Delta g)$ für $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.05)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.2)$.

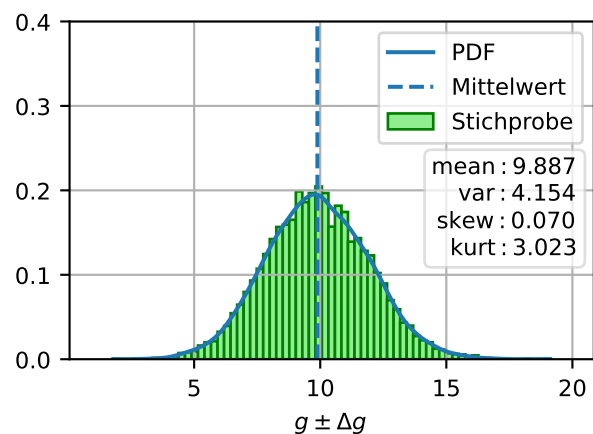


Abbildung 6: Fadenpendel mit kleiner Varianz: $(g \pm \Delta g)$ für $(l \pm \Delta l) = (1.00 \pm 0.2)$ und $(T \pm \Delta T) = (2.0 \pm 0.05)$.

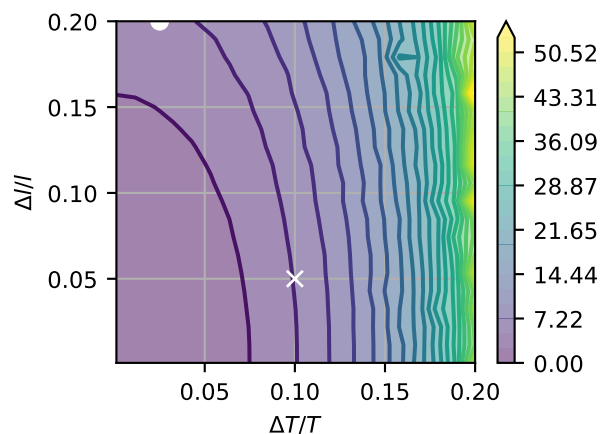
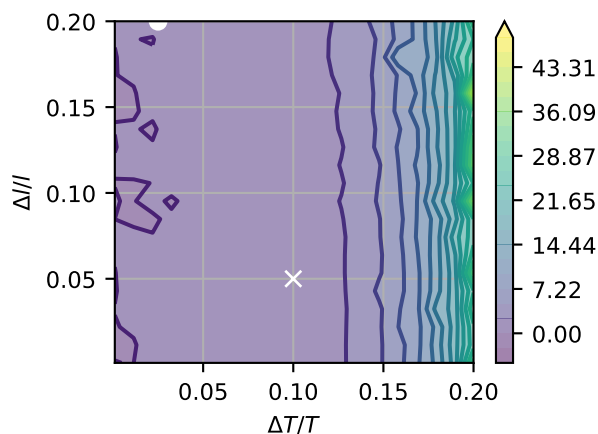


Abbildung 7: Zusammenfassung Fadenpendel zum Vergleich der Varianz in Abhängigkeit von Δl vs. ΔT . Die Abweichung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (links) sowie die Varianz (rechts) sind kritischer in ΔT -Richtung. Das Kreuz entspricht Abb. 5, der Punkt Abb. 6.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Messung eines elektrischen Widerstands.

Problem: Bestimmen Sie aus $(U \pm \Delta U) = (1.0 \pm 0.01)$ und $(I \pm \Delta I) = (0.02 \pm 0.002)$ den Widerstand, sowie dessen Fehler ($R \pm \Delta R$).

Es zeigt sich in Abb. 8 eine leichte Abweichung von der Normalverteilung, und auch hier führt der Fehler im nicht-linearen Term I zu Problemen, wie in der Übersicht in Abb. 9 zu sehen ist.

Meine Erfahrung zeigt, dass die Intuition für symmetrische Verteilungen gut ist, aber in Fällen von unsymmetrischen Verteilungen, die z.B. bei Operationen der 2. Stufe auftreten, versagt sie in vielen Fällen.

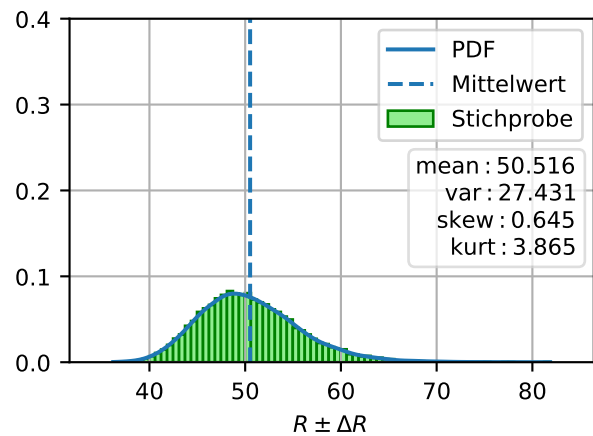


Abbildung 8: Widerstand: $(R \pm \Delta R)$ für die Werte $(U \pm \Delta U) = (1.0 \pm 0.01)$ und $(I \pm \Delta I) = (0.02 \pm 0.002)$.

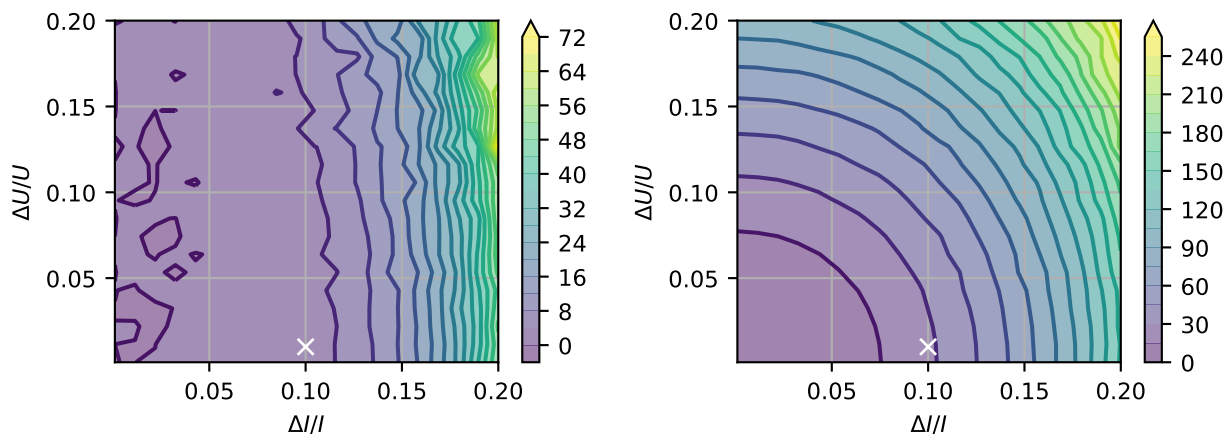


Abbildung 9: Zusammenfassung Widerstand zum Vergleich der Varianz in Abhängigkeit von ΔU vs. ΔI . Die Abweichung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung (links) sowie die Varianz (rechts) sind kritischer in ΔI -Richtung. Das Kreuz entspricht Abb. 8.

4 Schlusswort

Die Arbeit mit fehlerbehafteten Größen ist anspruchsvoll. Moderne Methoden, wie die Verwendung computergestützter, vektorisierter Berechnungen, ermöglichen es, im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen diese Größen als Wahrscheinlichkeitsverteilungen darzustellen und so entlang der gesamten Berechnung zu verfolgen, wie sie sich verändern. Der Aufwand dafür ist minimal, da die Berechnungen nicht angepasst werden müssen. Stattdessen können einfach die skalaren Ausgangsgrößen durch Listen von Stichproben ersetzt werden.

Als Beispiel seien hier Anwendungen erwähnt aus dem Ingenieurwesen zur Analyse der Bereiche, in denen sich Parameter verändern oder bei physikalischen Experimenten, um zu verstehen, wie gross der Einfluss verschiedener Messgrößen auf das Ergebnis und die Auflösung sind. Generell können auch mathematische Simulationen gemacht werden, um zu verstehen, wie sich Wahrscheinlichkeitsverteilungen unter mathematischen Operationen verhalten.

Die Ausführungen hier zeigen insbesondere, dass die Gauss'sche Fehlerfortpflanzung sicher ein nützliches Werkzeug ist, die Grenzen der Anwendbarkeit aber subtil sind. Konkret darf es für Terme, die nicht linear sind, nur *beschränkt und für kleine Fehler* verwendet werden. Also solange die resultierende Verteilung eine Gauss-/Normalverteilung ist^f.

Für die praktische Anwendung und einfache Tests kann ich die Online-Applikation *NIST Uncertainty Machine* [2] empfehlen. Für die Umsetzung im Unterricht ist Python [3] eine gute Möglichkeit. Es gibt verschiedenste Pakete, die vektorisierte Berechnungen erlauben [4], Monte-Carlo-Simulationen durchführen [5] oder auch Modelle von Differentialgleichungen anhand von posteriori Daten detailliert analysieren können [6]. Für die automatische Berechnung der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung gibt es ebenso frei verfügbare Lösungen [7].

Alle in diesem Artikel gezeigten Beispiele sind in einem frei verfügbaren Notebook zusammengefasst [9] und zur einfachen Nachvollziehbarkeit vorgerechnet.

Anmerkungen

- a. Dieses Vorgehen entspricht einer Monte-Carlo-Simulation.
- b. Reelle Zahlen bzw. Float-Variablen statt ganze Zahlen bzw. Integer-Variablen.
- c. Als Approximation zum Erwartungswert wird im Sinne des Gesetzes der grossen Zahlen der Mittelwert der Stichproben verwendet.
- d. Die Summe von unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen auf dem Intervall $[0;1]$ ist eine Irwin-Hall-Verteilung, sie nähert sich der Normalverteilung an (Zentraler Grenzwertsatz).
- e. Der Fehler ΔI kann tatsächlich 50% und mehr sein, das wurde hier aber aufgrund der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.
- f. "Das Gesetz ist nur anwendbar, wenn sich die Modellfunktion [...] bei Änderungen der Einflussgrössen [...] im Bereich ihrer Standardunsicherheiten [...] hinreichend linear verhält. Ist dies nicht der Fall, ist das Rechenverfahren erheblich aufwändiger. Die Norm DIN 1319 [3] und der 'Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen' geben Hinweise, wie eine unzulässige Nicht-linearität zu erkennen und zu umgehen ist. Ausserdem ist Varianzhomogenität vorausgesetzt." [8]

Links

- [1] V. Tsoutsouras et al.: *The Laplace Microarchitecture for Tracking Data Uncertainty and Its Implementation in a RISC-V Processor* (doi.org/10.1145/3466752.3480131)
- [2] *NIST Uncertainty Machine* (uncertainty.nist.gov), Version 1.6.2
- [3] *python* (www.python.org)
- [4] *NumPy* (numpy.org)
- [5] *mcerp: Monte Carlo error propagation* (pythonhosted.org/mcerp)
- [6] *Chaospy: uncertainty quantification using polynomial chaos expansions* (chaospy.readthedocs.io)
- [7] *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties* (pythonhosted.org/uncertainties)
- [8] *Wikipedia: Fehlerfortpflanzung*
- [9] *IPython Notebook mit Beispielen* (gitlab.com/ursin-soler/vsmp-bulletin_fehlerfortpflanzung)