

Georg Keller
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@shinternet.ch

Beziehung zwischen sphärischer und ebener Geometrie: Eine Ergänzung

Einleitung

Im Schwerpunktfach „Anwendungen der Mathematik“ behandle ich u.a. einige attraktive Aspekte der Kugelgeometrie. Allgemein gesagt, geht es mir dabei um ein für die meisten Schülerinnen und Schüler anspruchsvolles Training des räumlichen Vorstellungsvermögens, um eine Weiterentwicklung der aus der ebenen Geometrie bekannten mathematischen Methoden (z.B. sphärische Trigonometrie) und um eine Verbesserung des mathematischen und mathematikhistorischen Grundverständnisses (z.B. nichteuklidische Geometrie). Zu Beginn des Kugelgeometrie-Unterrichtes verwenden wir konstruktive / darstellend-geometrische Methoden, danach rechnerische / sphärisch-trigonometrische. Die im Unterricht thematisierten Anwendungsaufgaben stehen häufig in Zusammenhang mit Routenproblemen auf der idealisierten Erdkugel.

Weil die Oberfläche einer Kugel, deren Radius r grösser und grösser wird, lokal immer ebener wird, wird die Kugelgeometrie im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ Aussagen über die ebene Geometrie machen. Spannend ist es herauszufinden, welches diese Aussagen, insbesondere diejenigen der sphärischen Trigonometrie, sind. Das dazu gewählte Vorgehen überraschte nicht nur meine Schüler, sondern auch meine Fachschaftskollegen, denn offenbar waren ihnen die entsprechenden Überlegungen unbekannt. Weil es vielleicht Bulletinleserinnen oder -leser gibt, denen es ebenso geht, werden im Rest dieses Beitrags in unterrichtsorientierter Weise diese Überlegungen vorgestellt.

Sphärische Trigonometrie: Berechnungsformeln

Auf einer Kugel mit Radius r betrachten wir ein sphärisches Dreieck ABC mit Seiten a, b, c (welche definitionsgemäss Grosskreisbögen sind, und deren Zentriwinkel wir mit w_a, w_b, w_c bezeichnen¹⁾) und mit Eckwinkeln α, β, γ . Der Einfachheit halber betrachten wir nur sogenannte *Eulersche* Dreiecke, d.h. Dreiecke, bei denen alle Eck- resp. Zentriwinkel kleiner als 180° sind. Die üblichen Berechnungsaufgaben an diesem Dreieck können mit Hilfe der folgenden Berechnungsformeln der sphärischen Trigonometrie vorgenommen werden (wobei der Kürze halber nicht alle zulässigen Eck-/Zentriwinkel-Varianten aufgelistet wurden, sondern nur jeweils eine):

- Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(w_a)}{\sin(w_b)}$ (1)
- Seitencosinussatz: $\cos(w_c) = \cos(w_a) \cos(w_b) + \sin(w_a) \sin(w_b) \cos(\gamma)$ (2)
- Winkelcosinussatz: $-\cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(w_c)$ (3)

¹⁾ Wir werden sehen, dass in den sphärisch-trigonometrischen Berechnungsformeln nicht die Dreiecksseiten per se, sondern nur deren Zentriwinkel auftreten. Um die sphärisch-trigonometrischen Berechnungsformeln schreiberisch möglichst einfach zu halten, werden daher in den mir bekannten Lehrtexten und Formelsammlungen zur Kugelgeometrie – und im Gegensatz zum hier gewählten Vorgehen – statt der Dreiecksseiten ihre Zentriwinkel mit a, b, c bezeichnet, oder es wird $r = 1$ gesetzt, womit (im Bogenmass) die Zentriwinkel(grössen) mit den Dreiecksseiten(längen) übereinstimmen und daher auch die Zentriwinkel mit a, b, c bezeichnet werden können. Um in meinem eigenen Unterricht die erarbeiteten kugelgeometrischen Einsichten möglichst mühelos z.B. auf Erdkugelsituationen oder für $r \rightarrow \infty$ anwenden zu können, fand ich es aber schülergerechter, die klare Unterscheidung zwischen den Dreiecksseiten und ihren Zentriwinkeln beizubehalten und r nicht auf 1 zu normieren.

Anmerkung: Manchmal ist es ganz nützlich, ohne Umschweife die aus den Formeln (1)-(3) folgenden, hauptsächlich Berechnungsformeln für den Spezialfall eines rechtwinklig-sphärischen Dreiecks ($\gamma = 90^\circ$) zur Hand zu haben. Sie lauten:

$$\bullet \sin(\alpha) = \frac{\sin(w_a)}{\sin(w_c)} \quad , \quad \cos(\alpha) = \frac{\tan(w_b)}{\tan(w_c)} \quad , \quad \tan(\alpha) = \frac{\tan(w_a)}{\sin(w_b)} \quad (4)$$

$$\bullet \cos(w_c) = \cos(w_a) \cos(w_b) \quad (5)$$

$$\bullet \cos(w_c) = \cot(\alpha) \cot(\beta) \quad (6)$$

Sphärische Trigonometrie: Der Grenzfall $r \rightarrow \infty$

Jetzt stellen wir uns vor, dass wir die räumliche Position der Ecken A, B, C fixieren und Kugeln mit immer grösserem Radius r durch A, B, C legen. Auf jeder dieser Kugeln sind A, B, C die Ecken eines sphärischen Dreiecks mit Seiten a, b, c und Eckwinkeln α, β, γ . Natürlich hängen a, b, c und α, β, γ von r ab; zwecks möglichst schlanker Notation schreiben wir aber trotzdem nur $a, b, \dots$ statt z.B. $a(r), b(r), \dots$

Offensichtlich ist $a_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} a = \overline{BC}$, $b_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} b = \overline{AC}$, $c_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} c = \overline{AB}$, $\alpha_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma = \sphericalangle ACB$; insbesondere ist also

$$a_\infty, b_\infty, c_\infty < \infty \quad . \quad (7)$$

Im Bogenmass gilt für die Zentriwinkel w_a, w_b, w_c

$$w_a = \frac{a}{r}, \quad w_b = \frac{b}{r}, \quad w_c = \frac{c}{r} \quad ; \quad (8)$$

gemäss (8) und (7) streben daher die Zentriwinkel w_a, w_b, w_c für $r \rightarrow \infty$ gegen 0. Um diejenigen Aussagen über die ebene Geometrie zu bestimmen, welche die sphärisch-trigonometrischen Berechnungsformeln (1)-(3) im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ machen, müssen wir also die Werte von $\sin(x), \cos(x)$ für $x \rightarrow 0$ untersuchen. Weil den Schülern das Thema Potenzreihenentwicklung unbekannt war, haben wir uns zuerst anhand des Graphen der Sinus- resp. Cosinusfunktion inspirieren lassen und anschliessend auf rechnerische Weise die Richtigkeit des folgenden, mittlerweile plausibel wirkenden Satzes verifiziert.

Satz: Für $[x] = \text{rad}$ gilt in immer besserer Genauigkeit, je kleiner $|x|$ ist:

$$\bullet \sin(x) \cong x \quad (9)$$

$$\bullet \cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad (10)$$

Beweis: (9): Gemäss Differentialrechnung lautet für $[x] = \text{rad}$ die Gleichung der durch den Punkt $(0, 0)$ gehenden Tangente an den Graphen der Sinusfunktion $y = \sin(x)$, woraus (9) folgt.

(10): Mit Hilfe des Additionstheorems der Cosinusfunktion erhält man $\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, was via (9) zu (10) führt. ■

Damit kann nun der folgende, wohlbekannte Satz bewiesen werden:

Satz: Für $r \rightarrow \infty$ führen (1), (2) resp. (3) zu den folgenden Aussagen der ebenen Geometrie:

$$\bullet (1) \text{ ergibt den Sinussatz } \frac{\sin(\alpha_\infty)}{\sin(\beta_\infty)} = \frac{a_\infty}{b_\infty} \quad (11)$$

$$\bullet (2) \text{ ergibt den Cosinussatz } c_\infty^2 = a_\infty^2 + b_\infty^2 - 2 a_\infty b_\infty \cos(\gamma_\infty) \quad (12)$$

$$\bullet (3) \text{ ergibt die Dreiecks-Winkelsummenformel } \alpha_\infty + \beta_\infty + \gamma_\infty = 180^\circ \quad (13)$$

- Beweis: (11): Gemäss (1), (8), (9) gilt in immer besserer Genauigkeit, je grösser r ist, dass $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cong \frac{a/r}{b/r}$, d.h. $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cong \frac{a}{b}$, ist. Für $r \rightarrow \infty$ erhalten wir also (11).
- (12): Gemäss (2), (8)-(10) gilt in immer besserer Genauigkeit, je grösser r ist, dass $1 - \frac{(c/r)^2}{2} \cong \left(1 - \frac{(a/r)^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{(b/r)^2}{2}\right) + a/r \cdot b/r \cdot \cos(\gamma)$ ist. In dieser Ungefährgleichung lösen wir die Klammern auf, subtrahieren auf beiden Seiten 1 und multiplizieren beide Seiten mit $-2r^2$ und erhalten $c^2 \cong a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2r^2} - 2ab \cos(\gamma)$. Für $r \rightarrow \infty$ führt dies zu (12).
- (13): Gemäss (3), (8), (10) gilt in immer besserer Genauigkeit, je grösser r ist, dass $-\cos(\gamma) \cong \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \left(1 - \frac{(c/r)^2}{2}\right)$ ist. Für $r \rightarrow \infty$ erhalten wir daher $-\cos(\gamma_\infty) = \cos(\alpha_\infty) \cos(\beta_\infty) - \sin(\alpha_\infty) \sin(\beta_\infty)$ oder, via Additionstheorem der Cosinusfunktion, $-\cos(\gamma_\infty) = \cos(\alpha_\infty + \beta_\infty)$. Aus geometrischen Gründen muss auf der Kugel mit $r = \infty$, d.h. in der Ebene, $\alpha_\infty + \beta_\infty < 180^\circ$ sein. Und natürlich ist auch $\gamma_\infty < 180^\circ$. Anhand des Graphen der Cosinusfunktion im Intervall $[0^\circ, 180^\circ]$ sieht man nun rasch, dass $-\cos(\gamma_\infty) = \cos(\alpha_\infty + \beta_\infty)$ der Aussage $\gamma_\infty = 180^\circ - (\alpha_\infty + \beta_\infty)$ entspricht, d.h. dass (13) gilt. ■

Anmerkung: In analoger Weise² kann man - ohne Rückgriff auf (11)-(13) - diejenigen Aussagen zur ebenen Geometrie bestimmen, welche (4)-(6) für $r \rightarrow \infty$ ergeben:

- (4) $\Rightarrow \sin(\alpha_\infty) = \frac{a_\infty}{c_\infty}$, $\cos(\alpha_\infty) = \frac{b_\infty}{c_\infty}$, $\tan(\alpha_\infty) = \frac{a_\infty}{b_\infty}$
- (5) $\Rightarrow c_\infty^2 = a_\infty^2 + b_\infty^2$
- (6) $\Rightarrow \alpha_\infty + \beta_\infty = 90^\circ$

Fläche $\leftrightarrow$ Winkelsumme im sphärischen Dreieck: Der Grenzfall $r \rightarrow \infty$

Bekanntlich gibt es eine (und ausserdem erstaunlich einfache) Beziehung zwischen der Fläche F eines sphärischen Dreiecks und seiner Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$, nämlich

$$F = \pi r^2 \cdot \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{180^\circ} \right). \quad (14)$$

Indem wir beide Seiten von (14) durch πr^2 dividieren, und weil $F_\infty < \infty$ ist, sehen wir, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ}{180^\circ} = 0$ ist. Für $r \rightarrow \infty$ führt also nicht nur (3), sondern auch (14) zur Aussage $\alpha_\infty + \beta_\infty + \gamma_\infty = 180^\circ$.

² Allerdings können nur zwei der drei Dreiecks-Ecken A, B, C (z.B. A, B) im Raum fixiert werden, denn ansonsten würde das auf der jeweiligen Kugel mit Radius r liegende Dreieck ABC in der Regel nicht rechtwinklig sein. Die dritte Dreiecks-Ecke (bei uns C) muss dann in r -abhängiger Weise noch sinnvoll gewählt werden, d.h. so, dass ABC jeweils wirklich ein rechtwinklig-sphärisches Dreieck (mit $\gamma = 90^\circ$) ist und dass $C_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} C$ existiert.