

## 1 Einleitung

Alte weisse Männer lesen gern Zeitung. Ich bin da keine Ausnahme. Am Ostersonntag 2025 stand in der NZZ<sup>1</sup>, dass die amerikanische Firma Boom Supersonic in einem Test demonstrierte, dass der Überschallknall eines Flugzeugs in mindestens 9200 m Höhe bei Mach 1.1 bis 1.3 den Boden nicht erreicht, weil er in der Luft einer U-förmigen Bahn folgt. Das ist das perfekte Geburtstagsgeschenk für einen Nerd und rettet mein Wochenende! Was bedeutet U-förmig? Warum maximal Mach 1.3? Warum so hoch und nicht viel höher?

Die Schallgeschwindigkeit hängt von der Temperatur ab. Die Temperatur der Atmosphäre fällt bis zur Tropopause in etwa 10 km Höhe. Da die Schallgeschwindigkeit auch abnimmt, werden Schallwellen analog dem Licht gebrochen und können aufwärts reflektiert werden. Rechnen wir ein Beispiel durch!

## 2 Theorie

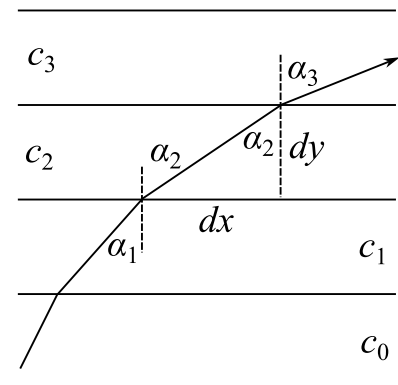
Das Brechungsgesetz gilt auch für Schall, wenn es mit der Wellengeschwindigkeit  $c$  geschrieben wird:

$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \text{const} \quad (1)$$

Die Einfallswinkel- und Brechungswinkel  $\alpha$  bestimmen die Steigung der Schallbahn, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Die Atmosphäre wird in infinitesimale Schichten der Höhe  $dy$  unterteilt. Eine Schallwelle schliesst den Winkel  $\alpha$  mit der Vertikalen ein. Die Schallgeschwindigkeit  $c$  ändert sich von Schicht zu Schicht.

$$\sin \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \quad (2)$$



Die Temperatur fällt, weil aufsteigende Luftpakete adiabatisch expandiert werden. Sei  $T_0$  die Temperatur auf Meereshöhe bei  $z = 0$  und sei  $z$  die Höhe über Meer. Falls kein Wasserdampf kondensiert, gilt

$$T = T_0 - \Gamma z \quad \text{trockenadiabatischer Temperaturgradient } \Gamma \quad (3)$$

$$c_p m \Delta T + mg \Delta z = 0 \Rightarrow \Gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} = \frac{9.80665 \text{ m/s}^2}{1005 \text{ J/(kg K)}} = 9.758 \cdot 10^{-3} \text{ K/m} \quad (4)$$

Die Schallgeschwindigkeit hängt von der Temperatur und damit von der Höhe ab. In der Höhe  $z_0 = T_0/\Gamma$  erreicht die Temperatur den absoluten Nullpunkt. Setzen wir dort den Nullpunkt der vertikalen Koordinate  $y$  für die Schallbahn und orientieren die positive  $y$ -Richtung abwärts, so werden die Gleichungen einfacher:

$$T = \Gamma y \quad \wedge \quad c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \Rightarrow \quad \frac{c}{c_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \Rightarrow \quad c = c_0 \sqrt{\frac{\Gamma y}{T_0}} \quad (5)$$

Diese Schallgeschwindigkeit (Gl. 5) und Gleichung (2) setzen wir in das Brechungsgesetz (1) ein.

$$\frac{1}{c_0 \sqrt{\Gamma y/T_0} \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = \frac{\sin \alpha_1}{c_0 \sqrt{\Gamma y_1/T_0}} \quad (6)$$

$$y \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{y_1}{\sin^2 \alpha_1} \stackrel{\text{def}}{=} 2r = \text{const} \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2r}{y} - 1} \quad (8)$$

Gleichung (8) ist gerade die Differentialgleichung einer gewöhnlichen Zykloiden!<sup>2</sup> (Abb. 2) Der Radius  $r$  des Rollkreises wird durch die Startwerte  $y_1$  und  $\alpha_1$  der ausgesandten Schallwelle bestimmt.

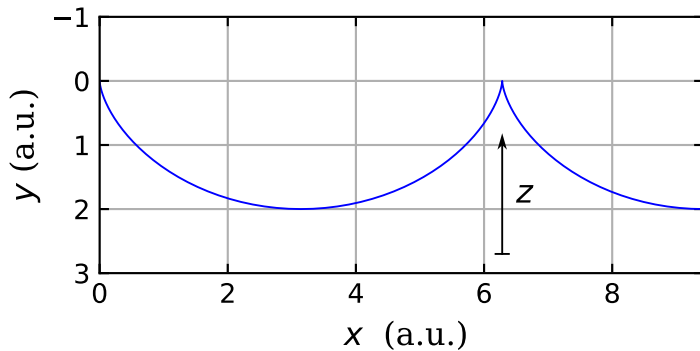


Abbildung 2: Gewöhnliche Zykloide ( $r = 1$  a.u.)

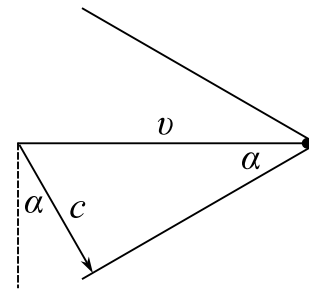


Abbildung 3: Machkegel

Typische Zahlenwerte sind  $T_0 = 288$  K bei  $z = 0$ . Damit liegt der (virtuelle) Temperaturnullpunkt in der Stratosphäre, wo die Annahme eines konstanten Gradienten verletzt ist.

$$z_0 = \frac{T_0}{\Gamma} = \frac{288 \text{ K}}{9.758 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}} = 29.51 \text{ km} \quad (9)$$

Nehmen wir an, dass die Schallwelle einer Zykloiden folgt. Das Minimum soll bei  $z_{\min} = 0.51$  km respektive  $y_{\min} = 29$  km liegen. In welche Richtung  $\alpha_1$  musste dann die Schallwelle bei  $y_1 = 20$  km respektive Höhe  $z_1 = 9.51$  km ausgesandt werden? Diese Richtung  $\alpha_1$  entspricht gerade dem halben Öffnungswinkel des Mach'schen Kegels, siehe Abb. 3, respektive dessen Sinus dem Kehrwert der Machzahl  $M$ . Mit Gleichung (7) folgt:

$$\frac{y_1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{y_{\min}}{\sin^2(\pi/2)} \rightarrow M = \frac{v}{c_1} = \frac{1}{\sin \alpha_1} = \sqrt{\frac{y_{\min}}{y_1}} = \sqrt{\frac{29 \text{ km}}{20 \text{ km}}} = 1.2 \quad (10)$$

### 3 Diskussion

Wenn wir wie oben annehmen, dass die strahlenoptische Näherung auch für die hohen Amplituden in einem Überschallknall gilt, gibt Rechnung die genannten Größenordnungen korrekt wieder. Im gleichen NZZ-Artikel steht, dass ein Überschallflugzeug fünf bis sieben mal mehr Treibstoff pro Passagier benötigt als konventionelle Flugzeuge. Man darf sich schon fragen, ob dieser Luxus zu Zeiten der Flugscham noch angemessen ist.

<sup>1</sup> A. Spaeth, "Der Knalleffekt ist weg", Neue Zürcher Zeitung, 19. April 2025, Seite 52

<sup>2</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid> (Abruf am 20. April 2025)

20. April 2025, Lie.