Das Osterdatum

Heinz Bachmann und Urs Oswald

5. Mai 2009

1 Definition des Osterdatums

Das Datum des als Fortsetzung des jüdischen Passahfestes betrachteten Osterfestes wurde im frühen Christentum definiert als erster Sonntag nach dem ersten Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium. Diese Definition wird auch heute oft verwendet, ist aber (genau genommen) ungeeignet aus 3 Gründen:

1. Der Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums schwankt von Jahr zu Jahr etwas.
2. Die Unregelmässigkeit der Mondbewegung bewirkt, dass der genaue Zeitpunkt des Vollmondes nur unter grossem Rechenaufwand zu bestimmen ist.
3. Die Sonntage treten rund um die Erde zu verschiedenen Zeiten ein, so dass die obige Definition je nach der Lage auf der Erde zu verschiedenen Osterdaten führen kann.

Um eine eindeutige Definition zur Verfügung zu haben, die von der ursprünglichen nicht stark abweicht und eine einfache Berechnung bis in unermessliche Zeiträume hinein ermöglicht, hat man im frühesten Mittelalter den wirklichen Mond durch einen fiktiven ersetzt, den sogenannten *kirchlichen Mond*, und das Frühlingsäktinoktium auf den 20. März festgesetzt. So entstand der *kirchliche Neumondkalender*, der hauptsächlich auf Dionysius Exiguus (6. Jahrh.) zurückgeht. Die *präzisierte Definition* lautete nun, dass Ostern der erste Sonntag nach dem ersten *kirchlichen Vollmond* nach dem 20. März sein soll. An dieser Regel wird im Christentum bis heute festgehalten, sowohl im westlichen als auch im russisch-orthodoxen. Im letzteren wird allerdings der Ostertermin immer noch aufgrund des Julianischen Kalenders berechnet. Für die ersten 20 Jahre des laufenden Jahrhunderts ergeben sich zum Beispiel die folgenden Ostertermine:

Jahr	Westkirche	Ostkirche	Jahr	Westkirche	Ostkirche
2000	23.4.	30.4.	2010	4.4.	4.4.
2001	15.4.	15.4.	2011	24.4.	24.4.
2002	31.3.	5.5.	2012	8.4.	15.4.
2003	20.4.	27.4.	2013	31.3.	5.5.
2004	11.4.	11.4.	2014	20.4.	20.4.
2005	27.3.	1.5.	2015	5.4.	12.4.
2006	16.4.	23.4.	2016	27.3.	1.5.
2007	8.4.	8.4.	2017	16.4.	16.4.
2008	23.3.	27.4.	2018	1.4.	8.4.
2009	12.4.	19.4.	2019	21.4.	28.4.

Diese Daten können mit der Formel (22) berechnet werden; Ziel dieses Artikels ist die Herleitung dieser Formel.

Im westlichen Christentum ist der 22. März der frühestmögliche, der 25. April der spätestmögliche Ostertermin. Für die russisch-orthodoxe Welt lauten die entsprechenden Daten (im laufenden Jahrhundert) 4. April bzw. 8. Mai.

2 Mathematische Vorbemerkungen

Bei den *Daten* schreiben wir meist zuerst den Monat und dann den Tag, also z. B. März 4 für den 4. März, und wir zählen die Tage oft über das Monatsende hinaus, z. B. März 40 = April 9.

Wir bezeichnen mit n *natürliche*, mit k *ganze* Zahlen, während x für eine beliebige *reelle* Zahl steht. Da nicht alle Computerprogramme den Befehl `int` (ganzer Teil) in der klassischen Weise interpretieren (jedenfalls nicht für negative Zahlen), halten wir fest:

Unter dem *ganzzahligen Teil* $\operatorname{int} x$ einer reellen Zahl x verstehen wir hier die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als x ist; somit ist z. B. $\operatorname{int} 3 = 3$; $\operatorname{int} 3{,}4 = 3$; $\operatorname{int}(-3{,}4) = -4$.

Unter $x \bmod n$ versteht man den *Divisionsrest* von x bei Division durch n. Es gilt also

$$x \bmod n = x - n \cdot \operatorname{int} \frac{x}{n}, \tag{1}$$

ferner

$$\operatorname{int}(x + k) = \operatorname{int} x + k; \quad (x + kn) \bmod n = x \bmod n. \tag{2}$$

Wir verwenden später die Formeln

$$\operatorname{int} \frac{x}{n} = \operatorname{int} \frac{\operatorname{int} x}{n}, \tag{3}$$

$$-(k \bmod n) = (n - 1 - k) \bmod n - (n - 1). \tag{4}$$

Beweis: (3): Für $x_0 = x \bmod n$ ist nach (1) $x = n \cdot \operatorname{int} \frac{x}{n} + x_0$; für $x_1 = \operatorname{int} x$ gilt also nach (2) $x_1 = n \cdot \operatorname{int} \frac{x}{n} + \operatorname{int} x_0$, also $\frac{x_1}{n} = \operatorname{int} \frac{x}{n} + \frac{\operatorname{int} x_0}{n}$, also ist $\operatorname{int} \frac{x_1}{n} = \operatorname{int} \frac{x}{n}$ wegen $0 \leq \operatorname{int} x_0 < n$, *q.e.d.*
(4): Es sei $k_0 = k \bmod n$. Nun gilt $(n - 1 - k) \bmod n = (n - 1 - k_0) \bmod n = n - 1 - k_0$ wegen $0 \leq n - 1 - k_0 < n$, *q.e.d.*

3 Wochentagsberechnung

Anlässlich der Kalenderreform von 1582 unter Papst Gregor XIII. wurde die Schaltregel des Julianischen Kalenders („alter Stil"), nämlich, dass die Schaltjahre genau die durch 4 teilbaren Jahre sind, für den Gregorianischen Kalender („neuer Stil") so abgeändert, dass die Schaltjahre genau die Jahre sind, deren Jahreszahlen durch 4, aber nicht durch 100, oder die durch 400 teilbar sind.

Beginnen wir die durchgehende Zählung der Tage mit dem 1. März des Jahres 0 *alten Stils* und bezeichnen wir die dadurch bestimmte *Tagesnummer* des 1. März des Jahres 0 *neuen Stils* mit N_0, so erhält man (aus der Anzahl der Schaltjahre) für die Tagesnummer des 1. März des Jahres J im Julianischen Kalender

$$N_1 = 365\,J + \operatorname{int} \frac{J}{4} + 1,$$

im Gregorianischen Kalender

$$N_2 = 365\,J + \operatorname{int} \frac{J}{4} - \operatorname{int} \frac{J}{100} + \operatorname{int} \frac{J}{400} + N_0.$$

Bei der Kalenderreform von 1582 wurde von Donnerstag, den 4. Oktober (217 Tage nach dem 1. März) alten Stils direkt zum Freitag, den 15. Oktober (228 Tage nach dem 1. März) neuen Stils übergegangen. Mit $J = 1582$ erhält man also für das erste Datum die Tagesnummer $N_1' = 578\,043$ und für das zweite die Tagesnummer $N_2' = 578\,041 + N_0$, aus $N_2' = N_1' + 1$ folgt sogleich $N_0 = 3$.

Zudem folgt aus den obigen Angaben: Führen wir die *Wochentagsnummer* (0 für Sonntag, 1 für Montag, ..., 6 für Samstag) ein, so ist diese für den Tag mit der Tagesnummer N (wegen $N_1' \bmod 7 = 4$)

$$w = N \bmod 7.$$

Die Differenz $D = N_1 - N_2$ heisst die *Kalenderdifferenz*; es ergibt sich: $D = \operatorname{int} \frac{J}{100} - \operatorname{int} \frac{J}{400} - 2$. Mit dem Jahrhundertzähler

$$p = \operatorname{int} \frac{J}{100} \tag{5}$$

wird nach (3)

$$D = p - \operatorname{int} \frac{p}{4} - 2. \tag{6}$$

Die Kalenderdifferenz des Jahres J ist die Differenz der Tagesnummern ein und desselben Datums (nicht vor dem 1. März) im alten und neuen Stil (für Daten vor dem 1. März müsste man anstelle von J die

Jahreszahl $J-1$ des Vorjahres einsetzen). Sie beträgt gegenwärtig 13 und erhöht sich im Jahr 2100 auf 14.

Somit wird die Wochentagsnummer des 1. März des Jahres J im Julianischen Kalender unter Benützung von (2)

$$N_1 \bmod 7 = \left(365\,J + \operatorname{int}\frac{J}{4} + 1\right) \bmod 7 = \left(J + \operatorname{int}\frac{J}{4} + 1\right) \bmod 7$$

und im Gregorianischen Kalender

$$N_2 \bmod 7 = \left(J + \operatorname{int}\frac{J}{4} + 1 - D\right) \bmod 7.$$

Schliesslich wird die *Wochentagsnummer von März t des Jahres J*

$$w = \left(J + \operatorname{int}\frac{J}{4} + t - D\right) \bmod 7, \tag{7}$$

wobei für den Julianischen Kalender $D = 0$ zu setzen ist.

4 Kirchlicher Neumondkalender und Ostergrenze im Julianischen Kalender

Die Osterrechnung besteht im Wesentlichen in der Berechnung der sogenannten „Ostergrenze“. Unter der *Ostergrenze* versteht man das Datum des ersten kirchlichen Vollmondes nach dem 20. März.

Die kirchlichen Neu- und Vollmonddaten für den Julianischen Kalender wurden auf der Grundlage des *Metonischen Zyklus* festgelegt: Da die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Neumonden (sog. Lunation) im Mittel 29,530589 Tage beträgt, machen 235 Lunationen ziemlich genau 19 Julianische Jahre (zu 365,25 Tagen) aus, so dass sich nach 19 Jahren die gleichen Neumonddaten wiederholen. Da man diese 19-jährigen Zyklen mit dem Jahre 532 beginnen liess, versteht man, unter Verwendung der Abkürzung

$$a = J \bmod 19, \tag{8}$$

unter einem *Metonischen Zyklus* eine Folge von 19 aufeinanderfolgenden Jahren mit $a = 0$ bis $a = 18$. Weil 12 Lunationen 10,88293 Tage weniger als ein Julianisches Jahr ausmachen, nimmt das *Mondalter* (d.h. die Zeit seit dem letzten Neumond), jedes Jahr am gleichen Datum betrachtet, per Jahr um etwa 11 Tage zu. Das Mondalter am 31. Dezember des Vorjahres von J heisst die *Epakte* E des Jahres J. Da diese für das Jahr 532 den Wert 8 hatte, lässt sie sich gut approximieren durch die Funktion

$$E = (11a + 8) \bmod 30. \tag{9}$$

Diese sog. „*Julianische Epakte*“ nimmt (modulo 30) während eines Metonischen Zyklus jedes Jahr um 11 Tage zu, mit der Ausnahme der Zunahme von 12 Tagen (sog. „Mondsprung“) vom letzten Jahr des Zyklus zum ersten des folgenden Zyklus (womit alle Zyklen wieder dieselben Epakten erhalten).

Der kirchliche Neumondkalender wurde nun auf Grund dieser Julianischen Epakte und nach folgenden Regeln erstellt (vgl. [2]):

Der 1. Neumond des Jahres liegt stets 30 Tage nach dem letzten des Vorjahres, der 2. Neumond 29 Tage nach dem 1. und der 3. wieder 30 Tage nach dem 2. (die folgenden Termine des Jahres wurden in nicht ganz regelmässig abwechselnden Abständen von 30 und 29 Tagen angesetzt). Der *Vollmond* wird stets 14 Tage nach dem Neumond angesetzt. Dabei wird in den Schaltjahren der Schalttag einfach ignoriert. Das Datum des 1. Neumondes ist also immer Januar $30 - E$.

Somit ist das Datum des 3. Neumondes Januar $89 - E$, dasjenige des darauffolgenden Vollmondes Januar $103 - E$. Damit dieses die Ostergrenze ist, die ja frühestens am März 21 = Januar 80 sein kann, muss $103 - E \geq 80$ sein, also $E < 24$; d.h., der 1. Neumond muss nach dem 6. Januar (Dreikönigstag) eintreten. Führt man das Mondalter E' des 6. Januar,

$$E' = (E + 6) \bmod 30 = (11a + 14) \bmod 30 \tag{10}$$

ein, so muss also $E' \geq 6$ sein. Es gibt also 2 Fälle:

1. Fall: Der 1. Neumond tritt nach dem 6. Januar ein, also $E < 24$, $E' \geq 6$, ferner $E + 6 = E'$: Der Vollmond nach dem 3. Neumond bildet die Ostergrenze, und diese ist Januar $103 - E$ = Januar $109 - E'$ = März $50 - E'$.

2. Fall: Der 1. Neumond tritt vor oder am 6. Januar ein, also $E \geq 24$, $E' < 6$, ferner $E + 6 = 30 + E'$: Der Vollmond nach dem 4. Neumond bildet die Ostergrenze. In diesem Fall wird der 4. Neumond 30 Tage nach dem 3. angesetzt (im 1. Fall 29 Tage, was für uns aber irrelevant ist). Die Ostergrenze ist also (30 Tage nach dem Vollmond nach dem 3. Neumond) Januar $133 - E$ = Januar $109 - E'$.

In beiden Fällen gilt somit

$$\text{Ostergrenze} = \text{März } 50 - E'. \tag{11}$$

Die früheste Ostergrenze (für $a = 15$, $E' = 29$) ist also März 21, die späteste (für $a = 7$, $E' = 1$) März 49; somit ist Ostern frühestens am 22. März und spätestens am 25. April.

5 Kirchlicher Neumondkalender und Ostergrenze im Gregorianischen Kalender

Bei der Gregorianischen Kalenderreform wurde nicht nur eine neue Schaltregel eingeführt, sondern auch die Epakten wurden einer Korrektur unterworfen:

1. Um den aufgelaufenen Fehler von 3 Tagen zu korrigieren, musste man zu den alten Werten 3 addieren.

2. Da 235 Lunationen etwa 0,06158 Tage weniger als 19 Julianische Jahre ausmachen, nimmt die Epakte gegenüber der Julianischen Epakte in $\frac{19}{0{,}06158} = 308{,}5$ Jahren um 1 Tag zu. Da man zur Zeit Papst Gregors XIII. mit dem Wert von 312,5 Tagen rechnete, wurde mit 8 Tagen Zunahme in 2500 Jahren gerechnet und angeordnet, dass erstmals im Jahre 1800 und dann 6 mal alle weiteren 300 Jahre, dann nach weiteren 400 Jahren (also im Jahre 4300) die Epakte je um einen Tag erhöht werden soll, worauf dieses Schema stets wiederholt wird. Diese Korrektur lässt sich (nach der Version von Gauss) durch die Funktion

$$\operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} - 5$$

darstellen.

Die ersten beiden Korrekturen machen zusammen

$$M = \operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} - 2 \tag{12}$$

aus (sog. „Mondangleichung“).

3. Ferner muss die Kalenderdifferenz $D = p - \operatorname{int} \frac{p}{4} - 2$ (vgl. Formel 6) subtrahiert werden.

Diese 3 Korrekturen machen zusammen

$$F = M - D = \operatorname{int} \frac{8p + 13}{25} + \operatorname{int} \frac{p}{4} - p \tag{13}$$

aus, und die korrigierte Epakte erhält nach (9) den Wert

$$E = (11a + 8 + F) \bmod 30 \tag{14}$$

(sog. „*Gregorianische Epakte*“). Im Gegensatz zum Julianischen Kalender können nun die Epakten mit der Zeit alle Werte von 0 bis 29 annehmen.

Mit der Gregorianischen Epakte berechnet sich E' nach (10) und (14):

$$E' = (E + 6) \bmod 30 = (11a + 14 + F) \bmod 30 \tag{15}$$

und daraus die Ostergrenze nach (11).

Zusätzlich wurden *zwei Ausnahmen* angeordnet: Besonders kritisch ist die Epakte $E = 24$ ($E' = 0$), die im Julianischen Kalender gar nicht vorkommt. Sie würde die Ostergrenze auf März 50 = April 19 setzen, so dass (falls dieser Tag ein Sonntag ist) Ostern auf den 26. April fallen könnte. Da man aber auch im Gregorianischen Kalender den spätesten Ostertermin am 25. April (wie im Julianischen Kalender) belassen wollte, setzte man den 4. Neumond im Fall der Epakte 24 auf 29 Tage nach dem 3. Neumond fest, wodurch die Ostergrenze um 1 Tag zurückversezt wurde auf April 18 (*1. Ausnahmeregel*). Nun führt aber auch die Epakte $E = 25$ ($E' = 1$) auf die Ostergrenze März 49 = April 18, und ein zweimaliges Vorkommen dieser Ostergrenze wollte man innerhalb eines Metonischen Zyklus vermeiden. Zu diesem Zweck setzte man fest, dass man auch in diesem Fall die Ostergrenze um 1 Tag zurückversezt (auf April 17), sofern *im gleichen Metonischen Zyklus* bereits *vorher* $E = 24$ vorgekommen ist (*nachher* kann dies im gleichen Zyklus nie vorkommen, wie wir in Abschnitt 7 zeigen werden). Dies ist die *2. Ausnahmeregel*.

6 Die Gausssche Formel für die Ostergrenze

Auf Grund von (15) erhält man unter Anwendung von (4) für den *Gregorianischen Kalender*

$$-E' = (29 - 11a - 14 - F) \bmod 30 - 29 = (19a + 15 - F) \bmod 30 - 29,$$

also

$$-E' = d - 29$$

mit

$$d = (19a + 15 - F) \bmod 30. \tag{16}$$

Zur Berechnung der Ostergrenze muss wegen der Ausnahmeregeln der korrigierte Wert d' genommen werden:

$$d' = \begin{cases} 28, & \text{falls } d = 29, \\ 27, & \text{falls } d = 28 \text{ und im selben Metonischen Zyklus schon } d = 29 \text{ auftritt,} \\ d & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach (11) gilt also:

$$\text{Ostergrenze} \;=\; \text{März } 21 + d'. \tag{17}$$

Für den *Julianischen Kalender* hat man $F = 0$ zu setzen, und da die Voraussetzungen der Ausnahmeregeln nie erüllt sind, gilt stets $d' = d$.

Die Periode der Folge der Osterdaten:

Die Folge der Osterdaten hat im *Julianischen Kalender* die Periode *532 Jahre* (denn die Ostergrenze hat die Periode 19, und die Wochentage wiederholen sich nach 28 Jahren, also hat die Osterdatum die Periode $19 \cdot 28 = 532$ Jahre), im *Gregorianischen Kalender* die Periode *5 700 000 Jahre* (denn M nimmt alle 2500 Jahre um 8 zu, und D nimmt alle 400 Jahre um 3 ab, also nimmt $F = M - D$ alle 10 000 Jahre um 43 ab, also hat $F \bmod 30$ die Periode $10\,000 \cdot 30$ Jahre; ferner hat a die Periode 19, somit die Ostergrenze die Periode $10\,000 \cdot 30 \cdot 19 = 5\,700\,000$ Jahre; und da sich die Wochentage alle 400 Jahre wiederholen, ist die Periode der Osterdaten gleich derjenigen der Ostergrenze).

7 Die Bedeutung der Ausnahmeregeln für das früheste und das späteste Osterdatum

Wir zeigen nun, dass das im Julianischen und als Folge der *1. Ausnahmeregel* auch im Gregorianischen Kalender *früheste* (22. März) und *späteste* (25. April) *Osterdatum* in jedem Metonischen Zyklus je *höchstens einmal* vorkommen (was für die anderen Osterdaten nicht gilt):

In beiden Kalendern tritt das früheste Osterdatum ein, wenn die Ostergrenze der 21. März ($d' = 0$) und ein Samstag ist, und das späteste Osterdatum, wenn die Ostergrenze der 18. April ($d' = 28$) und ein Sonntag ist. Wir haben also die Fälle zu untersuchen, in denen innerhalb eines Zyklus zweimal $d' = 0$ oder zweimal $d' = 28$ auftreten können.

Im Folgenden sollen J_1 und J_2 zwei verschiedene Jahre eines Zyklus mit $J_1 < J_2$ und den Werten d_1, d'_1 bzw. d_2, d'_2 sein.

Im *Julianischen Kalender* nimmt d' (hier $= d$) in jedem Zyklus der Reihe nach die Werte

$$15,\ 4,\ 23,\ 12,\ 1,\ 20,\ 9,\ 28,\ 17,\ 6,\ 25,\ 14,\ 3,\ 22,\ 11,\ 0,\ 19,\ 8,\ 27$$

an. Wir erkennen, dass dabei gilt:

1. d_1 und d_2 sind nie gleich.

2. d_1 und d_2 unterscheiden sich nur dann um 1, wenn $J_2 - J_1 = 11$; dann ist $d_2 = (d_1 - 1) \bmod 30$.

3. d_1 und d_2 unterscheiden sich nur dann um 2, wenn $J_2 - J_1 = 8$; dann ist $d_2 = (d_1 + 2) \bmod 30$.

Aus Punkt 1 folgt bereits, dass das früheste und das späteste Osterdatum nicht zweimal innerhalb des Zyklus vorkommen kann.

Im *Gregorianischen Kalender* ist die Sachlage etwas anders wegen des Gliedes $-F = D - M$ in (16). Dieses kann sich beim Übergang vom Vorjahr eines vollen Jahrhundertjahres $J = 100p$ zu J verändern; diese Änderung bezeichnen wir mit Δ. In einem Zyklus ohne Jahrhundertjahr oder mit einem solchen mit $\Delta = 0$ (sog. „normaler Zyklus“) gelten für zwei Jahre J_1 und J_2 des Zyklus für ihre d-Werte die 3 obigen Punkte ebenso. In nicht normalen Zyklen muss in Jahrhundertjahren die Änderung Δ berücksichtigt werden: Da dabei M unverändert bleibt oder um 1 zunimmt, und D (je nachdem, ob p durch 4 oder nicht durch 4 teilbar ist) unverändert bleibt oder um 1 zunimmt, gilt für Δ *entweder* $\Delta = 0$, $\Delta = -1$ *oder* $\Delta = +1$, *wobei im Fall* $\Delta = -1$ *stets* p *durch 4 teilbar und im Fall* $\Delta = 1$ *nicht durch 4 teilbar ist.*

Um zu untersuchen, ob das früheste oder das späteste Osterdatum im Zyklus zweimal vorkommt, haben wir nun nachzusehen, wann zwei Jahre J_1, J_2 des Zyklus die gleiche Ostergrenze $d_1 = d_2 = 0$ oder $d'_1 = d'_2 = 28$ haben. Wie man aus den d-Werten normaler Zyklen ersehen kann, ist das nur in den folgenden 3 Fällen möglich, wobei der Wert Δ eines eventuell zwischen J_1 und J_2 liegenden Jahres $J = 100p$ mit $J_1 < J \leq J_2$ von ausschlaggebender Bedeutung ist:

1. Fall: $J_2 = J_1 + 11$ ohne Zwischenjahrhundert oder mit einem solchen mit $\Delta = 0$, und $d_1 = 29$, $d_2 = 28$.

2. Fall: $J_2 = J_1 + 11$ mit Zwischenjahrhundert mit $\Delta = 1$, und $d_1 = d_2 = 0$ oder $d_1 = d_2 = 28$ oder $d_1 = d_2 = 29$.

3. Fall: $J_2 = J_1 + 8$ mit Zwischenjahrhundert mit $\Delta = -1$, und $d_1 = 28$, $d_2 = 29$.

Im 2. Fall ist p nicht durch 4 teilbar, also gibt es zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 höchstens 2 Schalttage, also können gleiche Daten dieses Jahres nicht den gleichen Wochentag haben.

Im 3. Fall ist p durch 4 teilbar, also gibt es zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 ebenfalls höchstens 2 Schalttage, also folgt dasselbe wie im 2. Fall.

Im 1. Fall können 3 Schalttage zwischen den Ostergrenzen von J_1 und J_2 liegen, wenn kein Zwischenjahrhundert existiert oder eines mit durch 4 teilbarem p; dann können also gleiche Daten dieser Jahre gleiche Wochentage haben. Aber nach der *2. Ausnahmeregel* ist dann $d'_2 = 27$, womit ein zweimaliges Auftreten des spätesten Ostertermins verhindert wird.

Die 2. Ausnahmeregel leistet sogar zuviel des Guten, denn in gewissen Fällen würde auch ohne ihre Anwendung keine Wiederholung des spätesten Ostertermins eintreten (z. B. für $J_2 = 2106$).

8 Berechnung des Osterdatums aus der Ostergrenze; die Gausssche Osterformel

Aus der Ostergrenze lässt sich nun das Osterdatum sehr leicht bestimmen.

Zunächst erhält man den Wochentag W der Ostergrenze, indem man nach (17) $21 + d'$ in (7) für t einsetzt:

$$W = \left(J + \operatorname{int}\frac{J}{4} + 21 + d' - D\right) \bmod 7. \tag{18}$$

Nun ist Ostern $7 - W$ Tage nach der Ostergrenze, also

$$\text{Ostern} \;=\; \text{März } 28 + d' - W. \tag{19}$$

Wir formen diesen Ausdruck um durch Anwendung von (4) auf (18) und erhalten

$$\begin{aligned} -W &= \left(6 - J - \operatorname{int}\tfrac{J}{4} - 21 - d' + D\right) \bmod 7 - 6 \\ &= \left(6 + 6J - 8\operatorname{int}\tfrac{J}{4} + 6d' + D\right) \bmod 7 - 6. \end{aligned}$$

Hier kann nach (1)

$$8\operatorname{int}\frac{J}{4} = 2J - 2(J \bmod 4)$$

gesetzt werden, was zu

$$-W = (6 + 4J + 2(J \bmod 4) + 6d' + D) \bmod 7 - 6$$

oder mit den Abkürzungen

$$b = J \bmod 4, \quad c = J \bmod 7 \tag{20}$$

zu

$$-W = (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 - 6$$

führt, oder mit

$$e = (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 \tag{21}$$

zu

$$-W = e - 6.$$

Aus (17), (19) und (20) erhält man damit

$$\text{Ostern} \;=\; \text{März } 28 + d' + e - 6 \;=\; \text{März } 22 + d' + e. \tag{22}$$

Zusammengefasst: Für den *Gregorianischen Kalender* gilt:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
a & = & J \bmod 19 \\
b & = & J \bmod 4 \\
c & = & J \bmod 7 \\
p & = & \text{int}\,\frac{J}{100} \\
D & = & p - \text{int}\,\frac{p}{4} - 2 \\
M & = & \text{int}\,\frac{8p+13}{25} - 2 \\
d & = & (19a + 15 + D - M) \bmod 30 \\
d' & = & \begin{cases} 28, & \text{falls } d = 29 \\ 27, & \text{falls } d = 28 \text{ und im gleichen Metonischen Zyklus} \\ & \text{vorher schon } d = 29 \text{ auftritt} \\ d & \text{sonst} \end{cases} \\
e & = & (6 + 2b + 4c + 6d' + D) \bmod 7 \\
\text{Ostergrenze} & = & \text{März } 21 + d' \\
\text{Ostern} & = & \text{März } 22 + d' + e
\end{array}}$$

Für den *Julianischen Kalender* muss $M = D = 0$ gesetzt werden; die Voraussetzungen der Ausnahmeregeln sind nie erfüllt (d.h. $d' = d$).

Bemerkungen:

1. Da die Zurücksetzung der Ostergrenze um 1 Tag das Osterdatum im Fall $e < 6$ unverändert lässt, aber im Fall $e = 6$ um 1 Woche verfrüht, müssen die Ausnahmeregeln nur im Fall $e = 6$ berücksichtigt werden (d.h., im Fall $e < 6$ kann $d' = d$ gesetzt werden). Für die Programmierung bringt diese Fallunterscheidung allerdings eher eine (überflüssige) Erschwerung mit sich.

2. In der *Ostkirche* wird das Osterdatum nach wie vor nach dem Julianischen Kalender definiert (wobei, wie erwähnt, in den obigen Formeln $M = D = 0$ zu setzen ist); man erhält das entsprechende Datum im Gregorianischen Kalender durch Addition der (nicht nullgesetzten) Kalenderdifferenz $D = p - \text{int}\,\frac{p}{4} - 2$:

$$\text{März } 22 + d + e + D.$$

9 Die Gauss-Bachsche Formulierung der 2. Ausnahmeregel

Die 2. Ausnahmeregel

$$d' = 27, \quad \begin{array}{l}\text{falls } d = 28 \text{ und im gleichen Metonischen Zyklus} \\ \text{vorher schon } d = 29 \text{ auftritt,}\end{array}$$

wie sie oben formuliert ist, entspricht der ursprünglichen kirchlichen Version. Da im Fall 1 von Abschnitt 7, in dem sie angewendet wird, für J_2 gilt $J_2 \bmod 19 \geq 11$, formulierten Gauss und später Bach die Bedingung in der Form

$$d' = 27, \text{ falls } d = 28 \text{ und } a \geq 11.$$

Diese Bedingung ist aber nicht äquivalent der ursprünglichen und setzt in gewissen nicht-normalen Zyklen den Ostertermin vom 25. April auch dann eine Woche zurück, wenn dies von der kirchlichen Regel nicht verlangt wird. Das erste Jahr, in dem die Regeln verschiedene Osterdaten ergeben, ist $J = 8202$.

Die kirchliche Regel kann übrigens in äquivalenter Weise so formuliert werden:

$$\begin{aligned} d' = 27, \text{ falls } \quad & d = 28, \quad a \geq 11 \text{ und} \\ & \left(J \bmod 100 \geq 11 \text{ oder } 1 + \operatorname{int} \tfrac{p}{4} - \operatorname{int} \tfrac{8p+13}{25} = \operatorname{int} \tfrac{p-1}{4} - \operatorname{int} \tfrac{p+5}{25}\right). \end{aligned}$$

Damit kann im Fall $d = 28$, $a \geq 11$ das kirchliche Osterdatum ohne Rückgriff auf das 11 Jahre zurückliegende Jahr berechnet werden.

Bemerkung: Die wirklichen Zeitpunkte der Mondphasen der Jahre 1700 bis 2035 sind auf der Website [3] aufgeführt.

Literatur

[1] Heinz Bachmann. *Kalenderarithmetik*, vergriffen. Juris Druck + Verlag AG, Zürich, 1984 und 1986, ISBN 3 260 05035 3

[2] *Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris of the American Ephemeris and Nautical Almanac* , Londen 1960 / S. 422, 426

[3] U. S. Naval Observatory, `aa.usno.navy.mil/data/docs/MoonPhase.php`

[4] U. S. Naval Observatory, `aa.usno.navy.mil/data/docs/easter.php`

[5] Urs Oswald, `www.ursoswald.ch/download/KALENDERRECHNUNG.pdf`