Bildverzerrung durch Signalretardation

Bericht über eine Maturarbeit

Dr. Herbert Hunziker
Abteilung Mathematik
Alte Kantonsschule Aarau
Bahnhofstrasse 91
5000 Aarau

Die Arbeit über Signalretardation von Muriel Lüscher, betreut von ihrem Mathematiklehrer, ist ein Beispiel für die Anwendung mathematischer Methoden in einer Modellbildung, die von der Physik motiviert ist. Das Schwerpunktfach PAM sollte diese Möglichkeit erleichtern. Ich nutze diesen Anlass für einen Hinweis auf die Weiterbildungsveranstaltung

Horizonte im Mathematikunterricht erweitern *zusammenarbeiten mit Biologie, Chemie, Informatik oder Physik*

Sie wird am 30. März 2011 am PSI stattfinden. Die Organisatoren sind Meike Akveld, MNG Zürich, Fritz Gassmann, PSI, Norbert Hungerbühler, ETHZ, Hansruedi Schneebeli, KS Baden.
Interdisziplinäre Zusammenarbeit *auch – oder gerade – bei Maturarbeiten wird ein Schwerpunkt im Kurs sein. Wir wenden uns explizit an Unterrichtende aller angesprochenen Fachschaften. Bitte weisen Sie Kolleginnen und Kollegen auf diesen Anlass hin oder laden Sie sie gleich zum gemeinsamen Besuch ein! Aktuelle Informationen zur Weiterbildungsveranstaltung gibt es bei* www.math.ch/mathematics-at-school*, wo man sich auch anmelden kann. Anmeldungen für die Weiterbildungsveranstaltungen sind auch bei der wbz cps (*www.wbz-cps.ch*) ab sofort möglich.*

H.R. Schneebeli

Abbildung 1: Muriel Lüscher

Die Idee

Im Jubeljahr 2005 besuchten wir mit unserer ganzen Schule die Ausstellung *Albert Einstein (1879 - 1955)* im Berner Historischen Museum. Dort durften die Schüler mit dem Fahrrad ungestraft, beinahe mit Lichtgeschwindigkeit, durch die Berner Altstadt kurven. Die dabei auftretenden Bildverzerrungen vermochten ungemein zu faszinieren und lösten nachhaltiges Staunen aus. Das Simulationsprogramm, das von einer Arbeitsgruppe um Prof. Dr. Hanns Ruder, Universität Tübingen, entwickelt worden war, berücksichtigte nebst relativistischen Effekten die Endlichkeit der Lichtlaufzeit. Siehe dazu [1], S. 14 - 23. Damals kam mir die Frage, ob die Signallaufzeiten im Alltag, bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten, eine Rolle spielen könnten, beispielsweise dann, wenn die Signale nicht durch Licht, sondern durch den viel langsameren Schall vermittelt werden. Eine Idee für eine Maturarbeit! Der Titel war schnell gefunden *Bildverzerrung durch Signalretardation* und die aufgeweckte Maturandin Muriel Lüscher, Bild 1, zögerte nicht und nahm die Arbeit auf.

Das Modell

Vorerst geht es darum, einen Mechanismus zur Wahrnehmung bewegter Objekte zu entwerfen und in der Sprache der Mathematik festzuhalten. Wahrnehmbar sollen bewegte Partikel, im Folgenden *Objekte* genannt, sein. Die Bauweise des Rezeptors orientiert sich am menschlichen Auge und ist vereinfachend als Lochkamera ausgebildet. Die Vermittlung zwischen Objekt und Rezeptor ist durch Signalteilchen (Photonen, Schallwellen usw.) modelliert, die von den Objekten permanent, mit konstanter Geschwindigkeit c bezogen auf den Rezeptor, in alle Richtungen ausgesendet werden. Siehe Abbildungen 2 und 3. In jedem Zeitpunkt T treten Signalteilchen in die Pupille der Lochkamera ein und erzeugen auf der Netzhaut ein Abbild - *Realbild* genannt - des Objektes. Das Realbild wird verglichen mit jenem Bild - *Idealbild* - das entstünde, wenn sich die Signalteilchen mit unendlich grosser Geschwindigkeit ausbreiteten. Für einige einfache Modellsituationen wurden die zugehörigen Abbildungsgleichungen bestimmt.

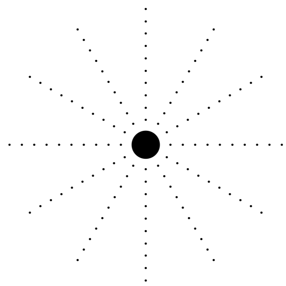

Abbildung 2: Objekt und Signalteilchen

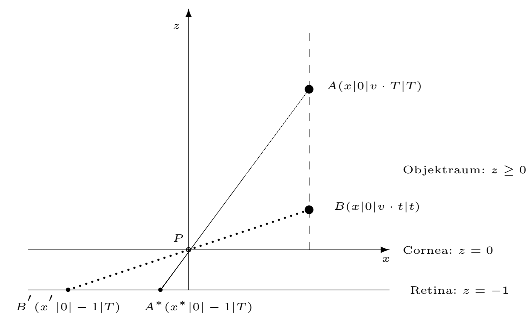

Abbildung 3: Rezeptor und Objektraum

Die Rechnung

Ein Objekt A bewegt sich mit Geschwindigkeit v in z-Richtung. Seine Position im Zeitpunkt T ist gegeben durch $A(x|0|v \cdot T|T)$. Es geht nun darum, die Emissionszeit t und die Position B des Objektes derart zu bestimmen, dass die von ihm ausgesendeten Signalteilchen zum Zeitpunkt T in die Pupille $P(0|0|0|T)$ einfallen. Aus der Bedingung

$$T - t = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \beta^2 t^2}\,, \quad \beta := \frac{v}{c}$$

erhält man die quadratische Gleichung

$$(1-\beta^2)t^2 - 2T \cdot t + T^2 - \frac{x^2}{c^2} = 0$$

mit den Lösungen

$$t_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{(1-\beta^2)\frac{x^2}{c^2} + \beta^2 T^2}}{1-\beta^2}\,.$$

Aus $x^* = -\frac{x}{v \cdot T}$ und $x^{'} = -\frac{x}{v \cdot t}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{x^{'}}{x^*} &= \frac{T}{t} \\ &= \frac{T(1-\beta^2)}{T - \sqrt{(1-\beta^2)\frac{x^2}{c^2} + \beta^2 T^2}} \\ &= \frac{1-\beta^2}{1 - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2 x^{*2} + \beta^2}} \end{aligned}$$

und daraus

$$x^{'} = \frac{(1-\beta^2)x^*}{1 - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2 x^{*2} + \beta^2}}\,.$$

Wählt man nebst $x \neq 0$ auch $y \neq 0$, so erhält man die allgemeinen Abbildungsgleichungen vom Idealbild A^* zum Realbild $B^{'}$

$$x^{'} = \frac{(1-\beta^2) \cdot x^*}{1 - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2(x^{*2} + y^{*2}) + \beta^2}}\,, \quad (1)$$

$$y^{'} = \frac{(1-\beta^2) \cdot y^*}{1 - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2(x^{*2} + y^{*2}) + \beta^2}}\,. \quad (2)$$

Wendet man diese Abbildung beispielsweise auf ein Gittermuster an, so erkennt man die Verwandtschaft mit den Verzerrungen, die man auf der Velofahrt durch die Berner Altstadt wahrgenommen hat, siehe Bild 4. Es stellt sich hier in natürlicherweise die Frage, von welcher Art die verzerrten Kurven sind. Wir fixieren

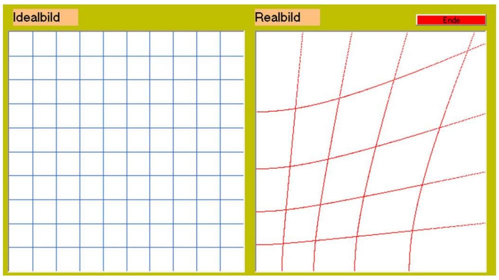

Abbildung 4: Ideal- und Realbild eines Gitters

$y^* = 1$ und erhalten durch die Division (1) : (2) der beiden Abbildungsgleichungen

$$(3): x^* = \frac{x^{'}}{y^{'}}\,.$$

Setzt man (3) in (2) ein, erhalten wir

$$y^{'} = \frac{1-\beta^2}{1 - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2\left(\frac{x'^2}{y'^2} + 1\right) + \beta^2}}\,.$$

Der Einfachheit halber schreiben wir anstelle von $x^{'}$ nur noch x und anstelle von $y^{'}$ setzen wir y, teilen die Gleichung durch y und erhalten

$$1 = \frac{1-\beta^2}{y - \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2 x^2 + (2-\beta^2)\beta^2 y^2}}$$

und weiter

$$y - (1-\beta^2) = \sqrt{(1-\beta^2)\beta^2 x^2 + (2-\beta^2)\beta^2 y^2}\,.$$

Quadrieren und Ordnen liefert

$$(1-\beta^2)y^2 - 2y - \beta^2 x^2 = -(1-\beta^2)$$

und durch quadratisches Ergänzen erhalten wir die Hyperbelgleichung

$$\left(y - \frac{1}{1-\beta^2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \cdot x^2 = \frac{\beta^2(2-\beta^2)}{(1-\beta)^2}\,.$$

Ein Ausblick

Naturgemäss konnte die Thematik der Bildverzerrung durch Signalretardation im Rahmen einer Maturitätsarbeit bei weitem nicht erschöpfend behandelt werden. Immerhin wurde durch die ausdauernde Beschäftigung mit endlichen Signallaufzeiten ein erstes Verstehen für die Verzerrungen von Bern ermöglicht. Aus meiner Sicht ist das behandelte Thema sowohl konzeptionell als auch technisch anforderungsreich. Die erforderliche Betreuungsarbeit war entsprechend intensiv, sie war aber auch mit Freude und Befriedigung verbunden. Besonders deshalb, weil man beim Betreuen von Maturarbeiten immer wieder auf junge Menschen trifft, die sich für anspruchsvolle Fragestellungen begeistern lassen, die bereit sind, sich vorbehaltlos einzubringen und die sich von Schwierigkeiten nicht entmutigen lassen.

Literatur

[1] Deutsches Museum (Hrsg.), *Einsteins Relativitätstheorien*, Deutsches Museum München, 2005