

Leistungsnachweise und Prüfungen in Mathematik – einmal anders

Martin Huber, ZHAW und UZH

Kollege Karl Weber und ich unterrichten seit einigen Jahren das Fach „Mathematik für Architekten“ am Baudepartement der ZHW/ZHAW. Neu für die Fachhochschule in Winterthur ist die Einteilung des Unterrichts in zwei Stunden Vorlesung und zwei Stunden Übungen, beides am selben Vormittag. Etwa 60 Studierende besuchen im ersten Studienjahr diesen Unterricht, welcher im Campus Tössfeld in der ehemaligen Sulzer-Halle 180 stattfindet, wo die Studierenden auch ihre Arbeitsplätze haben. Vom didaktischen Standpunkt scheint der Vorlesungs-/Übungsbetrieb gegenüber dem bis anhin gepflegten Unterricht in Klassen von 20 bis 30 Studierenden ein Rückschritt zu sein. Im Ganzen machen wir jedoch gute Erfahrungen, namentlich wohl auch durch die gute Betreuung in den Übungsstunden und die sorgfältige Ausarbeitung der Musterlösungen zu den Übungsaufgaben, die wir ja nicht irgend einem Assistenten übertragen können.

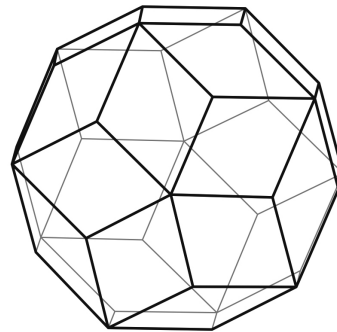
In anderen Studiengängen an der Fachhochschule oder auch an Gymnasien wird die Mathematik oft als „Killerfach“ empfunden. Dass dies hier in keiner Weise der Fall ist, liegt an der vorwiegend unkonventionellen Art unserer Prüfungen bzw. Leistungsnachweise. Während der Semester gibt es neben den üblichen Einzelprüfungen auch *Prüfungen in Zweier- oder Dreiergruppen*, *Gruppenhausaufgaben* sowie *Gruppen-Referate*.

Die Gruppen-Hausaufgabe, welche zum Leistungsnachweis des vergangenen Herbstsemesters zählt, haben wir am 23. Dezember gestellt; sie muss am 20. Januar abgegeben werden. Dazwischen liegen vier Wochen; es ist allerdings zu bedenken, dass diese Wochen nicht nur Weihnachten und Neujahr enthalten, sondern dass die Studierenden im Januar auch ihre Arbeiten in den Architekturhauptfächern abschliessen und abgeben müssen.

Unsere **Gruppen-Hausaufgaben** bestehen jeweils aus zwei Teilen. Der erste Teil ist einem Thema gewidmet, welches in direktem Zusammenhang steht mit der Vorlesung. Die folgende Aufgabe dieser Art stellten wir vor einem Jahr:

Aufgabe 1

Im Bild sehen Sie ein *Rhombentricontaeder* (auch Rhombendreissigflächner genannt). Dieses Polyeder besteht aus dreissig kongruenten Rhomben. Es entsteht als Hülle der Durchdringung eines regulären Ikosaeders und eines regulären Dodekaeders; d.h. als kleinstes konvexes Polyeder, welches das Ikosaeder und das Dodekaeder umfasst. Das Rhombentricontaeder gehört zur Klasse der dual-archimedischen oder Catalanschen¹ Körper.



¹ Benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugène Ch. Catalan (1814–1894)

- Stellen Sie das Rhombentricontaeder normal-axonometrisch dar. Beginnen Sie mit einem Würfel mit der Kantenlänge a . Zeichnen Sie darin zunächst das reguläre Ikosaeder (Konstruktion gemäss Vorlesung). Zeichnen Sie dann im Würfel auch das reguläre Dodekaeder (vgl. Übung 4, Aufgabe 5) und zwar so, dass je eine Ikosaederkante und eine Dodekaederkante aufeinander senkrecht stehen und sich gegenseitig halbieren. Jede Seitenfläche des Rhombentricontaeders hat nun eine Ikosaederkante als lange und eine Dodekaederkante als kurze Diagonale.
- Alle Seitenflächen sind zueinander kongruente Rhomben. Berechnen Sie die Seite s , die Diagonalen e und f sowie die Winkel eines solchen Rhombus. Geben Sie s, e, f als Ausdrücke in der Variablen a (Würfelkantenlänge) an. Stellen Sie Zahlenwerte, die nicht rational sind, in Wurzelform dar.
- Bestimmen Sie die Anzahl k der Kanten sowie die Eckenzahlen e_3 und e_5 . Dabei bedeutet e_m die Anzahl der Ecken, in denen sich m Kanten treffen.
- Die Kanten des Rhombentricontaeders können in Parallelscharen eingeteilt werden. Die Rhomben, zu welchen die Kanten einer solchen Schar gehören, bilden eine sog. *Zone*. Aus wie vielen Rhomben besteht jede Zone? Wie viele Zonen gibt es? Begründen Sie Ihre Antworten!

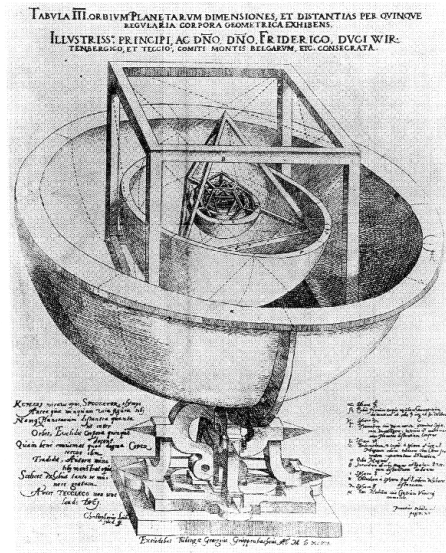
Der zweite Teil der Hausaufgabe steht meistens in einem lockereren Zusammenhang mit der Vorlesung. Er kann beispielsweise einem Bild geweiht sein, in welchem mathematische Objekte dargestellt werden. Hier ist eine solche Aufgabe; sie wurde ebenfalls vor einem Jahr gestellt.

Aufgabe 2 (Aufgabe der besonderen Art)

Im Vortrag von U. Wittorf wurde die nebenstehende, von Johannes Kepler (1571–1630) stammende Zeichnung projiziert. Als 25-Jähriger publizierte Kepler das „Mysterium Cosmographicum“, zu deutsch *das Weltgeheimnis*, ein Werk, in welchem diese Figur zu finden ist. Um Ihnen das Umfeld, in welchem die Figur entstanden ist, leichter zugänglich zu machen, haben wir einen von M. Huber verfassten Artikel über die Entstehung des astronomischen Weltbildes aufs Netz kopiert.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

- Beschreiben Sie zuerst einmal, was Sie in der Figur sehen.
- Stellen Sie die Bedeutung dar, welche die in der Figur sichtbaren geometrischen Objekte für das Weltbild Keplers hatten. Besprechen Sie auch wichtige Phasen der Geschichte dieser Weltvorstellung.
- Berechnen Sie sodann die Radien der In- und Umkugeln der fünf regulären Polyeder in Abhängigkeit von deren Seite.



d) Berechnen Sie aufgrund der Resultate von c) die Verhältnisse zwischen den Radien der in der Figur sichtbaren Kugelflächen und vergleichen Sie mit den heutigen Werten. Zum Vergleich geben wir Ihnen die Zahlen für die mittleren Radien der Planetenbahnen.

Merkur: $57.9 \cdot 10^6$ km, Venus: $108.2 \cdot 10^6$ km, Erde: $149.6 \cdot 10^6$ km,
Mars: $27.9 \cdot 10^6$ km, Jupiter: $779 \cdot 10^6$ km, Saturn: $1432 \cdot 10^6$ km.

Damit solche Aufgaben für den Leistungsnachweis brauchbar sind, müssen Spielregeln aufgestellt werden:

Spielregeln für diese Gruppenarbeit:

In der Regel nützen Sie das Wissen und Können, das in der Gruppe vorhanden ist. Allerdings können und wollen wir nicht verhindern, dass Sie Gedanken mit Mitgliedern anderer Gruppen austauschen. Aber die Lösung, die Sie abgeben wollen, sollen Sie innerhalb der eigenen Gruppe gestalten. Falls Sie von jemand ausserhalb Ihrer Gruppe profitiert haben, so schreiben Sie auf Ihr Blatt, wer der Urheber der guten Idee ist (eine Art Quellenangabe, wie bei einer wissenschaftlichen Arbeit). Selbstverständlich ist Abschreiben nicht gestattet. Identische Aufgaben oder Aufgabenteile werden mit 0 Punkten bewertet – gleichgültig, ob es sich dabei um das Original oder die Kopie handelt.

Die Ergebnisse übertreffen regelmässig unsere Erwartungen. Vor allem zeigt sich, dass bei diesen Arbeiten von fast allen Gruppen viel Zeit und Sorgfalt investiert wird. Es gibt auch immer wieder Studierende, welche bei der Darstellung der Lösungen ungewöhnliche und kreative Ideen verwirklichen, an welche die Aufgabensteller gar nicht gedacht haben. Abgeschrieben wird selten und wenn schon, dann nur im Kleinen. Durch gute Lösungen gelingt es dadurch manchen Studierenden, ungenügende Leistungen aus den Einzelprüfungen wettzumachen.

Mit den **Gruppenreferaten** werden die folgenden *Ziele* angestrebt:

1. Das ausgewählte Thema wird sorgfältig erarbeitet, didaktisch aufbereitet und in freier Rede verständlich vorgetragen.
2. Die Referate ergänzen die im Modul „Mathematik für Architekten“ behandelten Themen und tragen zu einem umfassenderen Bild der Mathematik bei.
3. Die Schlüsselqualifikationen *Selbständigkeit* und *Teamfähigkeit* werden durch diese Gruppenarbeit gefördert.

Der *Auftrag* an die Studierenden lautet wie folgt:

Die Studierenden bilden Zweier- oder Dreiergruppen. Jede Gruppe bearbeitet eines der nachstehenden Themen. Die Gruppen arbeiten weitgehend selbstständig. Sie treffen die Dozenten in der Regel zu zwei Besprechungen. Bei diesen Besprechungen sind alle Mitglieder der Gruppe anwesend. Die Vorträge dauern 20–25 Minuten; alle Gruppenmitglieder beteiligen sich daran. Den Mitstudierenden ist vor dem Vortrag eine Zusammenfassung (maximal 3 Seiten) abzugeben, die als Einführung in das Thema dient. Vortrag und Zusammenfassung werden benotet.

Es folgt hier ein Auszug aus der Themenliste:

- Die Lösung geometrischer Aufgaben mit Kongruenztransformationen
- Die perspektivische Affinität
- Die Inversion
- Das Problem des Apollonios
- Geometrische Konstruktionen mit dem Zirkel allein
- Das Steinersche Problem
- Parkettierungen der Ebene

- Flächenberechnung bei Polygonen
- Fraktale Geometrie
- Proportionen in der Architektur 1: Ist architektonische Schönheit messbar?
- Proportionen in der Architektur 2: „Architektur ist gefrorene Musik“
- Proportionen in der Architektur 3: Die Harmonik des Hans Kayser
- Proportionen in der Architektur 4: Le Corbusiers Modulor
- Der Satz des Pythagoras
- Aufsetzen von Pyramiden
- Symmetrische Würfeldurchdringungen
- Fullerene: Kohlenstoff-Moleküle mit vielen Atomen

Dass die Studierenden den Ansprüchen des von ihnen gewählten Themas nicht immer genügen können, ist nicht zu verhindern; kennen wir doch bei der Themenvergabe (jeweils im November) die Einzelnen noch zu wenig. Wenn aber gute Studierende anspruchsvolle Themen bearbeiten, dann können ausgezeichnete Vorträge resultieren. In sehr guter Erinnerung sind mir Referate zu den Themen „Steinersches Problem“, „Parkettierungen der Ebene“ und „Symmetrische Würfeldurchdringungen“ geblieben.

Die vier Themen über „Proportionen in der Architektur“ werden meistens von Studierenden gewählt, welche wenig Vertrauen in ihr mathematisches Können haben. Es ist jedoch mindestens so anspruchsvoll, zu einem Thema wie „Modulor“ einen guten Vortrag zu halten wie zu einem der geometrischen Themen. Bei ungenügender Leistung darf der Vortrag mit demselben Thema wiederholt werden.

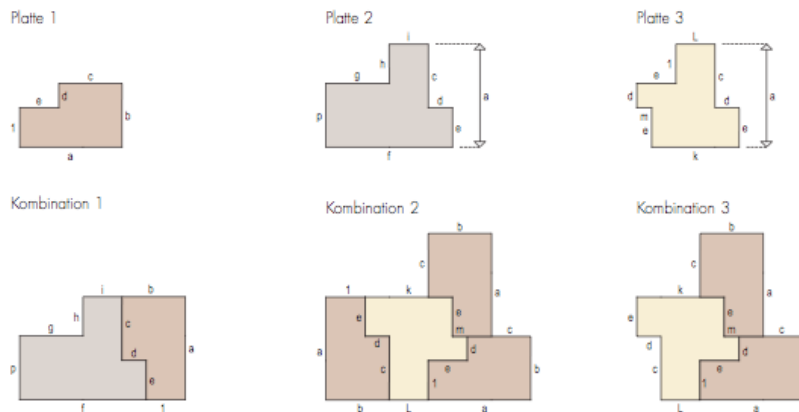
Die Assessment-Prüfung

Am Ende des ersten Studienjahrs findet die Assessment-Prüfung statt. Das Ergebnis hat für die Schlussnote dasselbe Gewicht wie jede der beiden Semesternoten. Zunächst führten wir diese Prüfung in schriftlicher Form durch. Sie bestand aus zwei Teilen, einer Einzel- und einer Gruppenprüfung. Diese Form behagte uns von Jahr zu Jahr weniger. Nach Absprache mit dem Studiengangleiter entschlossen wir uns vor drei Jahren, diese Prüfung von da an als mündliche Einzelprüfung durchzuführen. Neu daran ist, dass die Studierenden die Wahl haben zwischen einem Referat und einer (konventionellen) Prüfung über Inhalte der Vorlesung. Die Idee des Referates schlug von Anfang an ein. Jedes Jahr sind es mindestens 90% der zu Prüfenden, welche diese Option wählen. Konkret bedeutet dies, dass der/die Studierende Aspekte des Gruppenthemas vertiefen oder aber ein völlig neues Thema wählen kann. Neu stehen solche Themen zur Verfügung, welche Inhalte des zweiten Semesters voraussetzen. Beispiele sind:

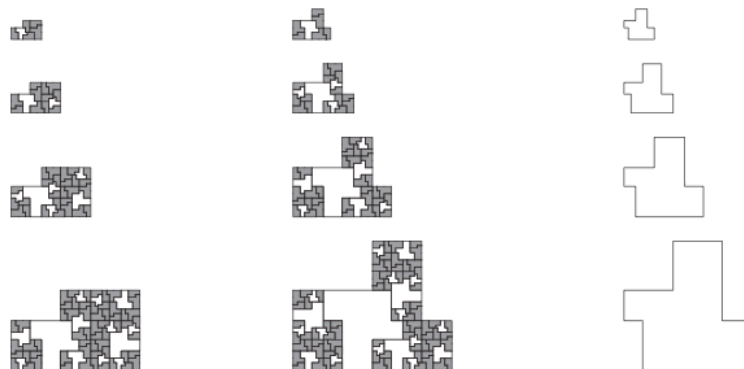
- Die Orientierung von Sakralbauten
- Die Keplerschen Gesetze: Sonne, Erde und Mond
- Sonnen- und Mondfinsternisse
- Bestimmung des Osterdatums
- Von der Kugel zur Karte: Kartenentwürfe der Erde
- Funkortung: Fremd- und Eigenpeilung

Weil die Assessment-Prüfung erst im August stattfindet, haben die Studierenden genügend Zeit für die Vorbereitung. Zur Unterstützung bieten wir an vier Vormittagen während der unterrichtsfreien Zeit Besprechungen an. Studierende, welche bei der Prüfungsvorbereitung wenig Aufwand treiben wollen, wählen meistens die Option „konventionelle mündliche Prüfung“. Dementsprechend sind die Resultate hier eher unbefriedigend. Nicht so bei den Referaten. Neben braven Vorträgen, welche knapp das umsetzen, was in den Besprechungen erarbeitet wurde, gibt es auch sehr gute, ja in seltenen Fällen hervorragende Leistungen.

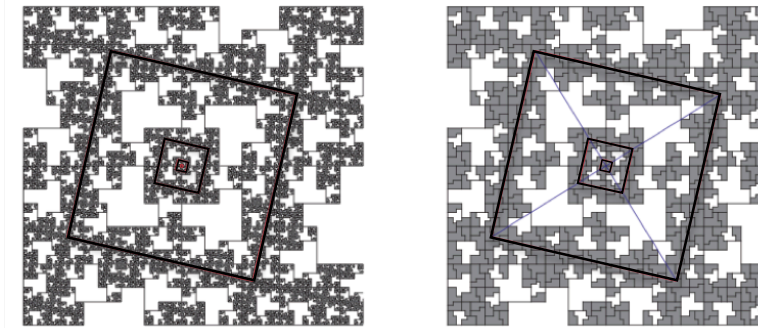
So hat etwa der Student Roman Pfister im Sommer 2008 die Parkettierung untersucht, welche von Daniel Libeskind und Cecil Balmond für die Fassade des Erweiterungsbaus des Victoria and Albert Museums in London vorgesehen worden war. Es handelt sich dabei um eine Weiterentwicklung der aperiodischen A3-Parkettierung des Amateur-Mathematikers Robert Ammann. Die drei Grundbausteine der A3-Parkettierung sind so beschaffen, dass sie bei geeigneter Kombination wieder dieselben Formen ergeben.



Im Gruppenvortrag war es im Wesentlichen darum gegangen, das – aus Geldmangel nicht zur Ausführung gelangte – Projekt von Libeskind und Balmond vorzustellen und die Proportionen der Grundbausteine des A3-Parketts zu berechnen. Im Parkettierungsschema für das Projekt von Libeskind und Balmond sind der erste und der zweite Baustein und ihre Vergrößerungen stets dunkel, der dritte und seine Vergrößerungen stets weiss gefärbt. Werden die weiss gefärbten Teile als leer interpretiert, so entsteht eine Art fraktaler Struktur. In einer Publikation von Balmond wird die Parkettierung deshalb „Fractile“ genannt.

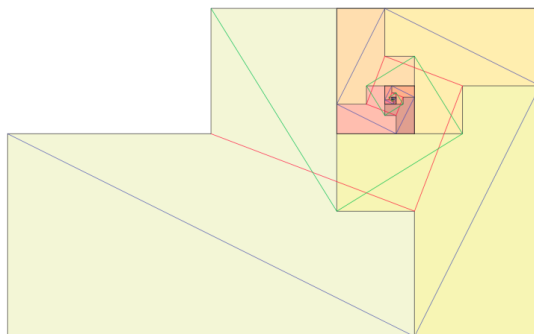
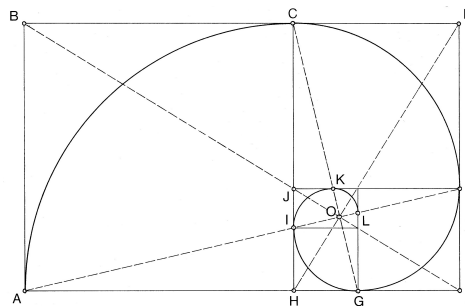


Für den Vortrag an der Assessment-Prüfung hat Pfister diese Struktur untersucht und ist dabei zu interessanten Entdeckungen gekommen. Ich möchte hier nur auf zwei Aspekte eingehen. Einerseits entstehen bei diesem Muster zwei senkrechte Scharen von parallelen Strecken, welche bei einer grösseren parkettierten Fläche gut sichtbar sind, weil sie die leeren Flächen meiden. Wie den folgenden Ausschnitten zu entnehmen ist, bilden diese Scharen konzentrische Quadrate. Man beachte, dass die Figur rechts eine Vergrößerung des Zentrums der linken Figur wiedergibt.



Roman Pfister hat nun gezeigt, dass bei diesen Figuren das Verhältnis $1 : \rho^3$ gleich mehrfach vorkommt, wobei $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ der Major der im goldenen Schnitt geteilten Einheitsstrecke bezeichnet.

Ferner hat er einen Zusammenhang mit der sog. *Goldenen Spirale* herausgearbeitet. Letztere besteht aus einer geometrischen Folge von Viertelskreisen mit Quotient r . In der nebenstehenden Figur sind die ersten sechs Viertelskreise eingezeichnet. Die goldene Spirale hat fraktalen Charakter und windet sich um den Schnittpunkt der Diagonalen BF bzw. DH der goldenen Rechtecke AFDB bzw. CHFD. Der elementarste Zusammenhang zum A3-Parkett besteht darin, dass das Sechseck AHJEDB gerade die Form des ersten Bausteins besitzt.



Inspiziert von der goldenen Spirale, hat Pfister auch gesehen, dass der Baustein 1 in eine unendliche geometrische Folge (mit Quotient r) von Bausteinen der Form 2 zerlegt werden kann. Mit diesem schönen Resultat und der zugehörigen Figur möchte ich diesen Bericht abschliessen.