



Exzentrische Kuchenhalbierung

Peter Gallin, Universität Zürich

1 Einleitung

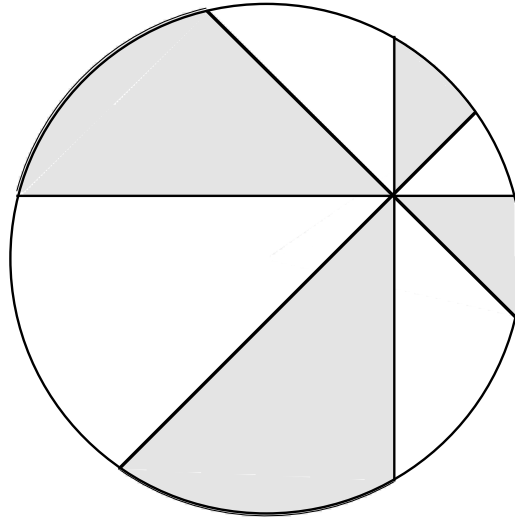


Abbildung 1: Exzentrische Halbierung eines Kuchens

Unterteilt man einen kreisrunden Kuchen (oder Pizza) mit vier geraden Schnitten derart, dass alle Schnitte durch einen beliebigen Punkt des Kreisinnern gehen und je zwei benachbarte Geraden einen 45° -Winkel miteinander einschliessen, so zerfällt der Kuchen in 8 Teile. Diese Teile nennen wir — sofern der beliebige Punkt nicht im Kreiszentrum liegt — Pseudosektoren, da sie wie Kreissektoren aussehen, aber eben keine wirklichen Kreissektoren sind. Wählt man nun vier nicht aneinander angrenzende Pseudosektoren aus — sie sind in Abbildung 1 gefärbt —, so beinhalten sie zusammen immer die halbe Kreisfläche unabhängig von der Lage des beliebigen Punktes. Diese Behauptung, in der Literatur auch als Pizza-Theorem¹ bezeichnet, soll hier auf verschiedene Arten bewiesen werden: Mit Hilfe eines Puzzles, dann elementargeometrisch, dann analytisch und in der Verallgemeinerung auf n gefärbte Pseudosektoren (n gerade und $n > 2$) einmal mit Vektorrechnung und einmal analytisch und schliesslich im allgemeinen Fall wiederum elementargeometrisch.

2 Zerlegung der Figur in ein Puzzle

Ein ganz elementarer Beweis der obigen Behauptung kann durch den Einsatz der Symmetrie gewonnen werden. Wir legen ein Koordinatensystem durch den Kreismittelpunkt M und nehmen an, dass die vier Schnitte parallel oder mit 45° geneigt zu den Achsen verlaufen. Wir bezeichnen mit P den Punkt, in dem sich die vier Kuchenschnitte treffen. Nun spiegeln wir P mitsamt den vier Schnitten an M , an den beiden Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems. So bilden die Bildpunkte von P ein Achteck, welches in Abbildung 2 fett ausgezogen ist. Wir betrachten zuerst das Äussere des Achtecks. Aus Symmetriegründen finden wir kongruente Stücke, und zwar 4 Stücke a , je 8 Stücke b , c und d , 4 Stücke e , 12 Stücke f , 8 Stücke g und 12 Stücke x . Man erkennt sofort, dass bei jeder Sorte gleich viele Stücke gefärbt und ungefärbt sind. Ausserhalb des Achtecks ist also schon einmal die Gleichheit der gefärbten und ungefärbten Stücke nachgewiesen. (Falls P weiter gegen die Kreisperipherie wandert, können gewisse Stücke verschwinden,

¹Weiterführendes und Literatur unter „http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem“ (10. Januar 2011)

was aber den Beweis nicht ändert, da das Achteck immer innerhalb des Kreises liegt.) Innerhalb des Achtecks könnte man ähnlich vorgehen, muss aber in der Regel Flächenverwandlungen vornehmen. Dank des schraffierten Trapezes im Achteck kann man aber die Gleichheit des gefärbten und ungefärbten Anteils direkt erkennen: Das schraffierte Trapez gehört zur ungefärbten Fläche und entspricht einem kongruenten gefärbten Trapez innerhalb des Achtecks. Der ungefärbte Rest des Achtecks ist offensichtlich gleich gross wie der gefärbte Rest.² Ein raffinierterer Puzzle-Beweis für allgemeines, gerades $n > 2$ wird am Schluss in Abschnitt 7 vorgestellt.

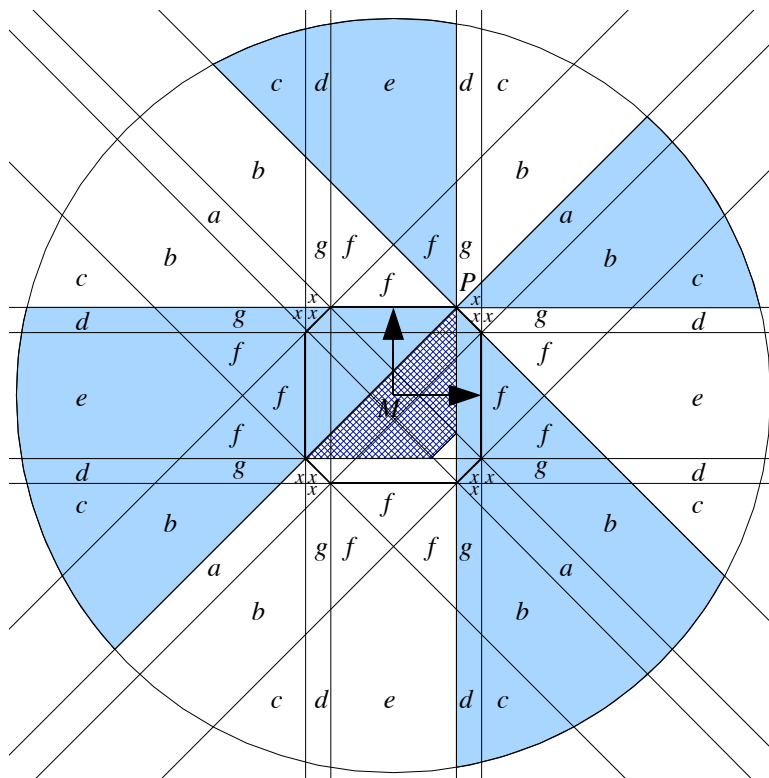


Abbildung 2: Punkt- und Achsensymmetrische Ergänzung der Kuchenschnitte

3 Elementargeometrischer Beweis mit einer ersten Verallgemeinerung

Wir verallgemeinern das Problem leicht, indem wir die gefärbten Pseudosektoren in Abbildung 1 nicht von vorneherein auf den Winkel 45° einschränken. Wir unterteilen also den Kuchen zuerst durch zwei senkrecht zueinander stehende Schnitte durch einen exzentrischen Punkt P in vier Stücke und anschliessend nochmals durch zwei senkrecht zueinander stehende Schnitte, so dass diese neuen Schnitte gegenüber den alten beiden um den Winkel β (in Bogenmass) verdreht sind (Abbildung 3). Dann wird behauptet, dass die in Abbildung 3 mit markierten Winkeln β gekennzeichneten Pseudosektoren zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie die vier wirklichen Sektoren, welche durch die Parallelschnitte durch das Kreiszentrum M gebildet werden. Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich dann sofort die behauptete Kuchenhalbierung.

Zunächst stellen wir — als Nebenbemerkung — fest, dass die vier Kreisbögen der vier Pseudosektoren zusammen die gleiche Länge haben wie die vier Kreisbögen der wirklichen Sektoren. Den Beweis dieser Tat-

²Dieser Beweis könnte als „Beweis ohne Worte“ gelten, während derjenige in Wikipedia von Carter & Wagon zwar mit weniger Teilen auskommt, deren Gleichheit aber nicht sogleich evident ist. Erst die Überlegungen aus Abschnitt 7 — auf $n = 4$ eingeschränkt — enthüllen dessen Grundgedanken.

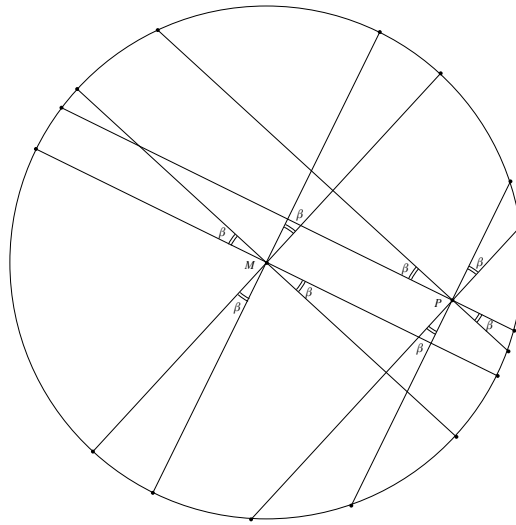


Abbildung 3: Verallgemeinertes Kuchenproblem mit vier Pseudosektoren

sache kann man führen, indem man nur zwei gegenüber liegende Pseudosektorbogen mit den entsprechenden gegenüberliegenden wirklichen Sektorbogen vergleicht (Abbildung 4). Der kürzere Pseudosektorbogen $B'D'$ in Abbildung 4 wird im Vergleich mit einem wirklichen Sektorbogen BD um so viel verkürzt wie der längere Pseudosektorbogen $A'C'$ im Vergleich mit dem Bogen AC verlängert wird. Bei der Länge des kürzeren $B'D'$ wird nämlich der Bogen BB' zum Bogen BD dazugezählt und der Bogen DD' abgezählt:

$$|B'D'| = |BD| + |BB'| - |DD'|$$

Bei der Länge des längeren $A'C'$ wird zum Bogen AC der Bogen CC' dazugezählt und der Bogen AA' abgezählt:

$$|A'C'| = |AC| + |CC'| - |AA'|$$

Nun sind aber die Bogen AA' und BB' einerseits und die Bogen CC' und DD' andererseits gleich lang und die ursprünglichen Sektorbogen AC und BD sind aus Symmetriegründen ebenfalls gleich lang, nämlich je $r\beta$ mit r als Kreisradius. Daher sind die Bogen $A'C'$ und $B'D'$ zusammen gleich lang wie die Bogen AC und BD zusammen:

$$\begin{aligned} |A'C'| + |B'D'| &= (|AC| + |CC'| - |AA'|) + (|BD| + |BB'| - |DD'|) \\ &= (|AC| + |CC'| - |AA'|) + (|BD| + |AA'| - |CC'|) \\ &= |AC| + |BD| = 2r\beta \end{aligned}$$

Diese Beweisidee inspiriert uns und kann beinahe auf die Flächenbetrachtung übertragen werden, um die es hier eigentlich geht. Wenn wir im Folgenden eine Folge von Punkten nennen, so meinen wir damit den Flächeninhalt der entsprechenden Figur mit diesen Eckpunkten. Insbesondere soll zwischen zwei Punkten der Kreisperipherie immer die dazwischen liegende kürzere Kreisbogenlinie als Begrenzung aufgefasst werden. Ferner führen wir die Lote $MX = PX'$ und $MY = PY'$ ein. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} PB'D' + PA'C' &= (MBD + MPB'B - MPD'D) + (MAC + MPC'C - MPA'A) \\ &= MBD + MAC + (MPB'B - MPA'A) + (MPC'C - MPD'D) \end{aligned}$$

Da nun die Lote MX und MY die beiden Flächen $ABB'A'$ und $CDD'C'$ je halbieren, bedeuten die beiden Klammern in der vorangehenden Gleichung die Flächen der Rechtecke $MX'PX$ und $MY'PY$, welche einmal weg- und einmal dazugezählt werden. Damit folgt

$$PB'D' + PA'C' = MBD + MAC + (-MX'PX) + (+MY'PY) \tag{1}$$

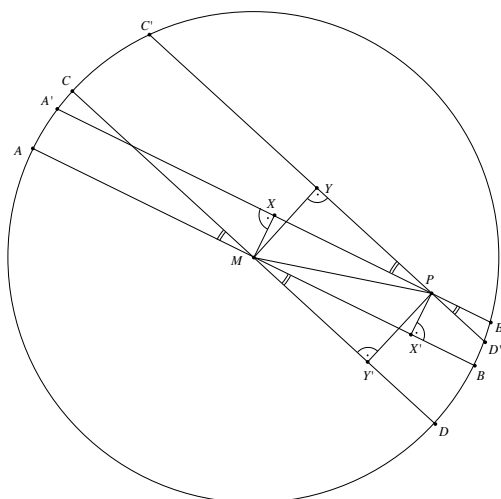


Abbildung 4: Erster Beweisschritt

Die beiden betrachteten Pseudosektoren haben also zusammen im Vergleich zu den parallel liegenden beiden wirklichen Sektoren eine Flächenveränderung erfahren, welche der Differenz der beiden inneren Rechtecke entspricht. Dabei wird das Y-Rechteck dazugezählt und das X-Rechteck abgezählt. Dies kann man sich so merken: Y ist der von M weiter entfernte Sehnenmittelpunkt als X.

In Abbildung 5 werden nun zusätzlich zu Abbildung 4 die beiden fehlenden Pseudosektoren und die dazu parallel liegenden wirklichen Sektoren betrachtet, welche senkrecht zu denjenigen in Abbildung 4 stehen.

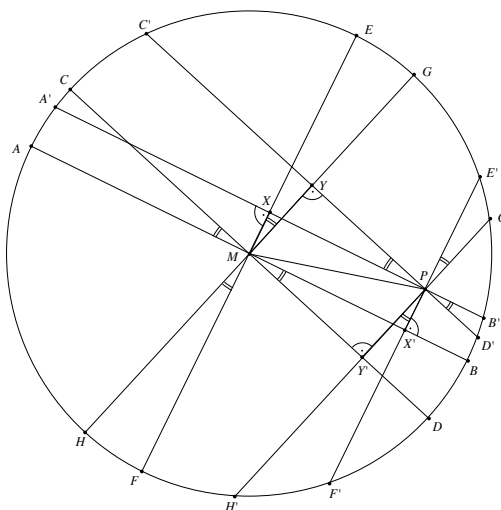


Abbildung 5: Zweiter Beweisschritt

Für diese neuen Pseudosektoren ist nun X' der von M weiter entfernte Sehnenmittelpunkt als Y' . Daher treten die beiden inneren Rechtecke vorzeichenmässig in umgekehrten Rollen auf und wir können die Summe der beiden Pseudosektorflächen analog zur obigen Rechnung aufstellen:

$$PE'G' + PF'H' = MEG + MFH + (+MX'PX) + (-MY'PY)$$

Damit gilt insgesamt mit dem Kreisradius r :

$$PB'D' + PA'C' + PE'G' + PF'H' = MBD + MAC + MEG + MFH = 4 \cdot MAC = 2r^2\beta$$

Die vier Pseudosektoren mit Zentriwinkel β haben also insgesamt den konstanten Flächeninhalt $F = 2r^2\beta$ unabhängig von der Ausrichtung der Figur im Kreis und unabhängig vom Abstand, den P von M aufweist. Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ ist die ursprüngliche Behauptung bewiesen: $F = \frac{1}{2}\pi r^2$.

4 Analytischer Beweis (nach Daniel Stoffer, ETH Zürich)

Wir legen den Kreismittelpunkt M in den Ursprung eines kartesischen (x, y) -Koordinatensystems und wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ und den Punkt P auf der positiven x -Achse im Abstand $a < 1$ von M : $P(a, 0)$. Sei ferner S ein Punkt auf der Kreisperipherie und $s(\phi)$ die Länge der Strecke PS , welche mit der positiven x -Achse den Winkel ϕ einschliesst (Abbildung 6). Mit Pythagoras erhält man sofort die Länge der halben Sehne durch S , von der noch $a \cos \phi$ subtrahiert werden muss:

$$s(\phi) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi} - a \cos \phi \tag{2}$$

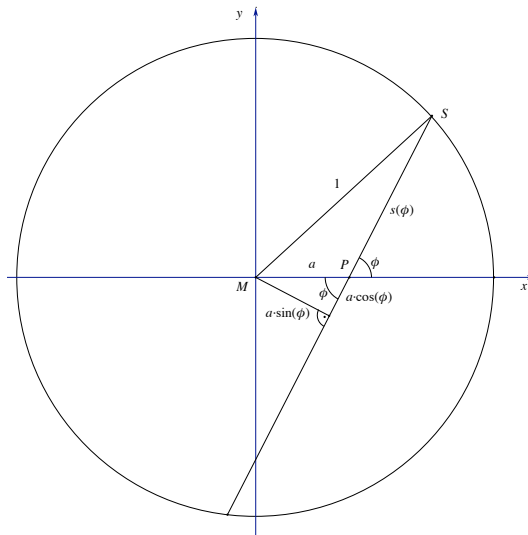


Abbildung 6: Berechnung von $s(\phi)$

Da wir zur Berechnung der Fläche, welche PS bei wachsendem ϕ' überstreicht, den Term

$$\frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} s(\phi')^2 d\phi'$$

benützen werden, untersuchen wir zunächst $s(\phi)^2$. Aus (2) folgt:

$$s(\phi)^2 = 1 - a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi - 2\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi} \cdot a \cos \phi$$

Addiert man π zum Argument, so wechselt nur das Glied mit der Wurzel das Vorzeichen. Also gilt:

$$s(\phi)^2 + s(\phi + \pi)^2 = 2(1 - a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi) \tag{3}$$

und

$$s(\phi + \pi/2)^2 + s(\phi + 3\pi/2)^2 = 2(1 - a^2 \sin^2(\phi + \pi/2) + a^2 \cos^2(\phi + \pi/2)) = 2(1 - a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$s(\phi)^2 + s(\phi + \pi)^2 + s(\phi + \pi/2)^2 + s(\phi + 3\pi/2)^2 = 4$$

Die Gesamtfläche, welche von den vier Strecken bei Drehung mit dem Winkel β überstrichen wird, ist also

$$F = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} (s(\phi')^2 + s(\phi' + \pi)^2 + s(\phi' + \pi/2)^2 + s(\phi' + 3\pi/2)^2) d\phi' = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{\phi+\beta} 4d\phi' = 2\beta. \quad (4)$$

Übertragen auf einen Kreis mit Radius r , ist also $F = 2r^2\beta$, was wir schon in Abschnitt 3 erhalten haben.

5 Verallgemeinerung von 4 auf n gefärbte Pseudosektoren

Im Abschnitt 3 haben wir in (1) festgestellt, dass die Summe $PB'D' + PA'C'$ (Flächeninhalt der beiden gegenüberliegenden Pseudosektoren mit Zentriwinkel β) im Vergleich zum Flächeninhalt $MBD + MAC$ der beiden wirklichen Sektoren eine Flächenveränderung erfahren, welche der Differenz der beiden Rechtecke $MY'PY$ und $entspricht. Diese Rechtecksflächen in Abbildung 4 kann man aber als Beträge von Vektorprodukten auffassen: $MY'PY = |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}|$ und $MX'PX = |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}|$. Damit gilt wegen der Parallelität der beiden Vektoren $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}$ und $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}$ — beide stehen senkrecht zur Zeichenebene — und wegen der Distributivität des Vektorprodukts folgendes:$

$$\begin{aligned} MY'PY - MX'PX &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY}| - |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MX}| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times (\overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MX})| \\ &= |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{XY}| \end{aligned}$$

Dabei wollen wir ab sofort den Winkel β orientieren und zwar im Uhrzeigersinn, so dass es immer einen ersten und einen zweiten Schenkel des Winkels β bei M oder P gibt. Damit gilt die Regel, dass die Flächenveränderung gleich dem Vektorprodukt von \overrightarrow{MP} mit \overrightarrow{XY} ist, wobei X auf dem ersten Schenkel und Y auf dem zweiten Schenkel liegt. (Die Flächenveränderung soll positiv sein, wenn das Vektorprodukt zum Betrachter weist, sonst negativ.) Mit dieser Vereinbarung wird die ursprüngliche Regel von den verschiedenen Entfernungen der beiden Sehnenmittelpunkte X und Y von M hinfällig, denn die Flächenveränderung erhält jetzt ein Vorzeichen.

Sei nun n eine gerade Zahl grösser oder gleich 4. Sie gibt an, wie viele gefärbte Pseudosektoren wir jetzt in der Verallgemeinerung betrachten. In Abbildung 5 galt $n = 4$. Dort ist der Spezialfall eingetreten, dass die beiden Flächenveränderungen der je gegenüberliegenden Pseudosektoren genau entgegengesetzten Vektoren entsprechen, nämlich einmal \overrightarrow{XY} und einmal $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{X'Y'}$, so dass sie sich in der Summe aufheben und die vier Pseudosektoren insgesamt den gleichen Flächeninhalt haben wie die zugehörigen wirklichen Sektoren.

Nun können wir den Beweis der Verallgemeinerung auf mehr als vier regelmässig verteilte (gefärbte, d. h. durch β markierte) Pseudosektoren geometrisch führen. Wir wählen zunächst $n = 6$ (Abbildung 7). Die Mittelpunkte der Sehnen durch P liegen auf dem Thaleskreis über MP . Und weil die Winkel bei allen Pseudosektoren β sind, müssen die Flächenveränderungsvektoren wegen dem Peripheriewinkelsatz alle gleich lang sein. Ausserdem sind sie schön regelmässig auf dem Thaleskreis verteilt, denn die nicht markierten Winkel zwischen den Pseudosektoren sind auch gleich gross, was mit dem Peripheriewinkelsatz gleiche Abstände zwischen den Anfangs- und Endpunkten der Vektoren ergibt. Somit bilden die drei zusammengesetzten Vektoren ein gleichseitiges Dreieck und ihre Summe ist Null, was zur Folge hat, dass alle Flächenveränderungen von je zwei gegenüberliegenden Pseudosektoren sich insgesamt zu Null addieren. Diese Überlegung lässt sich nun auf eine beliebige gerade Anzahl $n > 2$ von regelmässig verteilten Pseudosektoren verallgemeinern. Immer bilden die $\frac{n}{2}$ Flächenveränderungsvektoren bei der Addition ein regelmässiges $\frac{n}{2}$ -Eck. Damit ist gezeigt, dass für alle geraden $n > 2$ die Figur aus n Pseudosektoren die gleiche Fläche hat wie die zugehörige Figur aus wirklichen Sektoren, nämlich $n \cdot \frac{r^2\beta}{2}$.

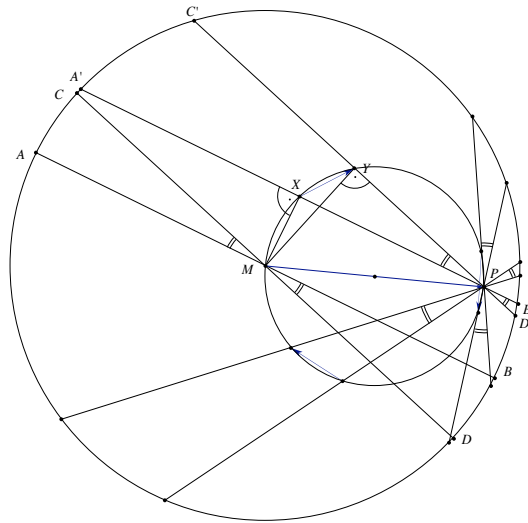


Abbildung 7: Figur mit sechs regelmässig verteilten Pseudosektoren, $n = 6$

Damit gilt folgender Satz: Wählt man $\beta = \frac{\pi}{n}$, so beträgt der Flächeninhalt der Figur aus n regelmässig verteilten Pseudosektoren für gerades $n > 2$ genau die halbe Kreisfläche. Die ursprüngliche Aufgabe war für $n = 4$ gestellt. Man macht sich schnell klar, dass diese Aussage für ungerade n nicht gilt.

6 Analytische Bestätigung (nach Daniel Stoffer)

Es seien S_j ($j = 0, \dots, n-1$) die n Punkte auf der Kreisperipherie, welche jeweils einen Anfangspunkt eines Pseudosektors markieren. Die Winkel ϕ_j sind die n zugehörigen regelmässig ansteigenden Winkel gegenüber der positiven x -Achse. Gemäss (2) gilt:

$$|PS_j| = s(\phi_j) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \phi_j - a \cos \phi_j}$$

Analog zu (4) treten jetzt bei der Berechnung von F im Integranden n Summanden $s(\phi_j)^2$ auf. Unter Verwendung von (3) lässt sich diese Summe stark vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} s(\phi_j)^2 &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} [s(\phi_j)^2 + s(\phi_{j+\frac{n}{2}})^2] = 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (1 - a^2 \sin^2 \phi_j + a^2 \cos^2 \phi_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{a^2}{2}(1 - \cos 2\phi_j) + \frac{a^2}{2}(1 + \cos 2\phi_j)\right) = 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (1 + a^2 \cos 2\phi_j) \\ &= n + 2a^2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos 2\phi_j = n \end{aligned}$$

Die Summe der $\frac{n}{2}$ Cosinuswerte ist Null, weil sich dahinter wieder ein regelmässiges $\frac{n}{2}$ -Eck versteckt. Damit ergibt sich für den Einheitskreis $F = \int_{\phi}^{\phi+\beta} nd\phi' = n \cdot \frac{\beta}{2}$ oder allgemein wie zuvor $F = n \cdot \frac{r^2\beta}{2}$.

7 Geometrischer Beweis bei n gefärbten Pseudosektoren

Wir wenden uns zum Schluss dem Fall zu, bei dem alle $2n$ Pseudosektoren, n gefärbte und n ungefärbte, den Zentriwinkel $\beta = 180^\circ/n$ aufweisen und somit die gefärbte Fläche die halbe Kreisfläche ausmachen soll.

Ausgehend von Abbildung 2 hatte Daniel Stoffer die Idee, den Beweis in zwei Teile zu trennen. Ein innerer Teil bezieht sich auf das Gebiet innerhalb des Kreises mit Zentrum M und Radius $|MP|$, wo wir einen auf Flächenverwandlung basierenden Beweis gefunden haben. Im äusseren Teil, ausserhalb dieses Hilfskreises, ist sogar ein Beweis über Zerlegungsgleichheit gelungen, ähnlich dem Puzzle-Beweis in Abschnitt 2. Da n gerade sein muss, wählen wir hier den Fall mit 10 gefärbten und 10 ungefärbten Pseudosektoren: $n = 10$ (Abbildung 8). Wir legen den Parameter m als die Hälfte von n fest: $n = 2m$.

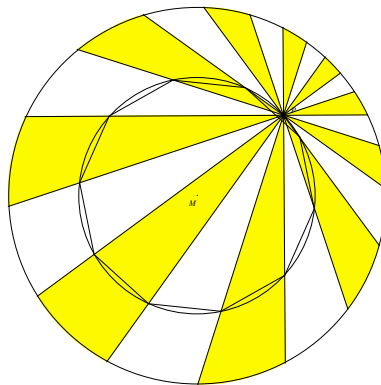


Abbildung 8: Hilfskreis für $n = 10$

Da P auf der Peripherie des Hilfskreises liegt, schneidet dieser genau m , hier also 5, gefärbte Pseudosektoren und zwar bilden diese Schnittpunkte dank des Peripheriewinkelsatzes und den lauter gleichen Peripheriewinkeln $\beta = 180^\circ/n$ auf dem Hilfskreis ein regelmässiges n -Eck. Jetzt betrachten wir nur das Innere des Hilfskreises mitsamt des regelmässigen n -Ecks und den m gefärbten Pseudosektoren, welche alle den Scheitelpunkt P besitzen. Zudem lösen wir P vorübergehend von seiner Bindung an den Hilfskreis und lassen ihn als Punkt X im Innern des Hilfskreises frei wandern. Es entsteht die Abbildung 9, in der wir zunächst nur die dreieckigen Teilbereiche der Pseudosektoren färben und sie ausserdem durch die Sekanten h_1 bis h_5 begrenzen. Wichtig ist jetzt, dass der Punkt X im Innern des von den m Geraden gebildeten regelmässigen m -Ecks liegt.

Nun zeigen wir, dass die gefärbten und ungefärbten Dreiecke mit Spitze X in Abbildung 9 die gleiche Fläche haben. Dazu denken wir uns im Kreiszentrum den Ursprung eines Koordinatensystems. Die m Geraden h_1, h_2, \dots, h_m seien durch die Hessesche Normalform gegeben, wobei alle m Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ nach aussen orientiert seien. Die Gleichungen der m Geraden lauten dann in Hessescher Normalform

$$h_i : \vec{r} \circ \vec{n}_i - d = 0 ,$$

wobei d der für alle m Geraden gleiche Abstand vom Ursprung ist. Da das m -Eck regelmässig ist, gilt zudem

$$\sum_{i=1}^m \vec{n}_i = 0 .$$

Da der Punkt X mit Ortsvektor \vec{x} im Innern des m -Ecks liegt, liefert die Hessesche Normalform $\vec{x} \circ \vec{n}_i - d$ beim Berechnen des Abstand von X zu der i -ten Geraden immer eine negative Zahl. Wir berechnen jetzt die Summe der m (positiven) Abstände des Punktes X von den m Geraden:

$$-\sum_{i=1}^m (\vec{x} \circ \vec{n}_i - d) = -\vec{x} \circ \left(\sum_{i=1}^m \vec{n}_i \right) + md = md$$

Die Summe aller Höhen der gefärbten Dreiecke ist also konstant für alle Lagen von X innerhalb des m -Ecks. Beträgt die Seitenlänge des $2m$ -Ecks a , so ist die Grundseite aller gefärbten Dreiecke a . Der Inhalt

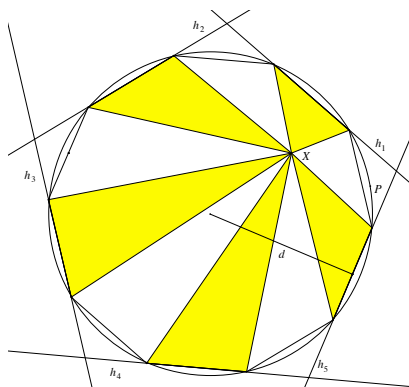


Abbildung 9: Beweisfigur fürs Innere

der gefärbten Fläche ist demnach $amd/2$ und macht damit genau die Hälfte des Inhalts des $2m$ -Ecks aus. Schliesslich ergänzen wir alle gefärbten und ungefärbten Dreiecke wieder durch die fehlenden Segmente zu den ursprünglichen Pseudosektoren. Es kommen damit gleich viele gefärbte wie ungefärbte Segmente hinzu. Identifiziert man X wieder mit P — das m -Eck kann immer so gewählt werden, dass P in dessen Innerem liegt —, ist gezeigt, dass in Abbildung 8 innerhalb des Hilfskreises gleich viel Fläche gefärbt wie ungefärbt ist.

Nun wenden wir uns dem Äusseren des Hilfskreises in Abbildung 8 zu. Hier ist ein „look-and-see-Beweis“ möglich (Abbildung 10). Die Flächengleichheit von gefärbtem und ungefärbtem Anteil ist direkt einsehbar dank kongruenter Stücke, welche stets den gleichen Namen mit oder ohne Strich tragen. Die Kongruenz bei den im Alphabet tiefen Buchstaben wird jeweils durch eine Spiegelung vermittelt, deren Achse durch M verläuft und eingezeichnet ist. Die Kongruenz der streifenartigen Gebilde mit Buchstaben von weiter hinten im Alphabet ergibt sich durch eine Drehung um M mit dem Winkel $360^\circ/n$. Diese Streifen entstehen durch Parallelverschieben von Begrenzungsgeraden der Pseudosektoren durch deren Schnittpunkte mit dem Hilfskreis. Dass eine Drehung vorliegt, beweist man durch die Tatsache, dass die Begrenzungsstrecken der Streifen auf Geraden liegen, welche im Winkel $360^\circ/n$ zueinander verdreht sind und gleichzeitig denselben Abstand von M besitzen, was aus der Symmetrie bezüglich der erwähnten Spiegelungsachsen hervorgeht.

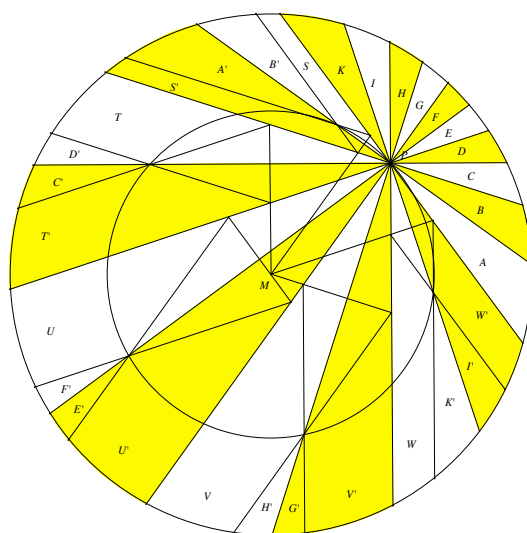


Abbildung 10: Beweisfigur fürs Äussere

Es bleibt dem Leser überlassen, diese Abbildung zurückzuübersetzen auf den Fall $n = 4$, womit man fürs Äussere des Hilfskreises eine sehr einfache Zerlegung findet, mit der die Gleichheit der gefärbten und ungefärbten Fläche einsehbar wird.