„Das Känguru“ – Der etwas andere Mathematikwettbewerb

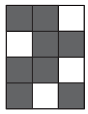
Hansjürg Stocker, Wädenswil

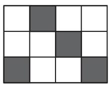
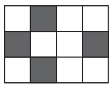
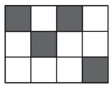
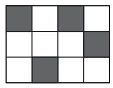
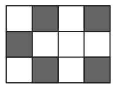
Vier Aspekte sind‘s, die seit eh und je den Känguruwettbewerb auszeichnen, der übrigens dieses Jahr in der Deutschschweiz just zum 10. Mal von der DMK organisiert wird. Erstens ist es ein Multiple Choice Wettbewerb, zweitens gibt es fünf Alterskategorien, drittens werden den Teilnehmenden im ersten Drittel leichte(re), im zweiten mittelschwere und erst im letzten Drittel schwierige(re) Aufgaben gestellt und viertens schliesslich ist die Themenvielfalt alle Jahre wieder sehr beeindruckend. Nebst algebraischen Aufgaben gibt es rein arithmetische, auch Gleichungen und Ungleichungen müssen gelöst oder untersucht werden, ebenso treten Funktionen auf, mit und ohne Graphen. Die Geometrie ist mit allen Facetten vertreten: ebene Geometrie, Raumgeometrie und Topologie (Stichwort: Knoten) mit zig möglichen Fragestellungen, wobei oft auch das reine Vorstellungsvermögen gefordert ist. Kombinatorische Fragestellungen können einen geometrischen oder algebraischen Hintergrund haben, aber auch im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben vorkommen oder beim Erkennen von Wachstumsgesetzen bei Folgen von Figuren. Auf keinen Fall darf natürlich das „Kryptische, Logische und Magische“ fehlen. Hingegen müssen abmachungsgemäss Probleme aus der Analysis „draussen“ bleiben, obwohl etwa der Ableitungsbegriff in der obersten Alterstufe bekannt sein dürfte.

Wie der Name „Multiple Choice“ ja sagt, stehen bei jeder Aufgabe mehrere Antworten zur Auswahl, fünf sind‘s exakt beim Känguruwettbewerb, wobei – und das ist wohl das Besondere – stets nur eine einzige korrekt ist. Und genau diesem Umstand kann, darf, ja soll sogar gelegentlich Rechnung getragen werden, wenn es darum geht, das Kreuz am richtigen Ort zu setzen. Wenn beispielsweise eine Anzahl von Möglichkeiten zu bestimmen ist, und erste Überlegungen zeigen, dass die gesuchte Zahl gerade sein muss und bei den fünf Antwortvarianten nur eine einzige gerade aufgeführt ist, so ist die richtige Antwort bereits gefunden. Der Nachweis für die Korrektheit der angekreuzten Antwort muss dann *nicht* mehr erbracht werden; beim Känguruwettbewerb entfällt er. Analog ist die Situation, wenn etwa herauszufinden ist, welche von fünf vorgeschlagenen Figuren sich unter Berücksichtigung der Vorgaben *nicht* realisieren lässt. So kann es einfacher sein, umgekehrt zu überlegen, welche Figuren sich realisieren lassen. Können dann vier der fünf bei den Distraktoren „offerierten“ Figuren schnell gefunden werden, so ist die Aufgabe damit bereits gelöst; denn auch hier muss der Nachweis der Nicht-Existenz der angekreuzten Figur nicht nachgeliefert werden. Dieser Umstand löst bei Fachkolleginnen und Fachkollegen ein gelegentliches Unbehagen aus, weil der Gedankengang oder Lösungsweg lückenhaft bleibt. Dem kann entgegen gehalten werden, dass es ohne vorbereitende mathematische Überlegungen ja gar nicht möglich ist, das Kreuzchen richtig zu placieren – ausser es werde einfach geraten, was sich bei einem Fehler aufgrund der Punkteabzugsklausel in der Regel überhaupt nicht auszahlt. Ich finde es auch noch aus dem folgenden Grund nicht problematisch: erstens muss auf dieser Stufe auch nicht immer und alles restlos bewiesen werden und zweitens werden die vollständigen Lösungen in der Broschüre präsentiert, welche die SuS nach dem Känguruwettbewerb jeweils erhalten. Der Kreis schliesst sich also. Es gibt noch weitere Aufgabentypen, bei welchen eine geschickte Strategie schnell(er) zum Ziel führen kann. Wenn etwa für natürliche Zahlen herauszufinden ist, welcher der fünf angegebenen Terme den kleinsten Wert hat oder welche der angegebenen Relationen die gültige ist, so dürfen durchaus spezielle Zahlenwerte gewählt und eingesetzt werden, um die Frage beantworten zu können. Auch hier wird also im Wettbewerb der allgemeine Nachweis *nicht* verlangt.

Die folgenden zwölf Aufgaben sind nach aufsteigender Altersstufe geordnet und innerhalb derselben Stufe chronologisch nach dem Jahr des Wettbewerbs, an dem sie gestellt worden sind. Es liegt aber keine Unterteilung in leicht, mittel und schwer vor, also in 3-, 4- und 5-Punkteaufgaben. Im Anschluss daran werden jene Aufgaben gemeinsam betrachtet, die sich in gleicher oder ähnlicher Weise lösen lassen. Weiter soll demonstriert werden, dass sich gelegentlich unterschiedliche Lösungsstrategien anbieten oder zum Zuge kommen können – ein weiteres typisches Merkmal, das den Känguruwettbewerb attraktiv macht. – Wer löst das Dutzend von Aufgaben in einer halben Stunde, bevor die daran anschliessenden Ausführungen studiert werden?!

1. Stell dir vor, dass das rechts abgebildete Rechteck, das aus lauter kleinen Quadraten besteht, auf eine durchsichtige Folie gedruckt ist. Welches der unten abgebildeten Rechtecke kannst du damit so überdecken, dass dann alles dunkel erscheint?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

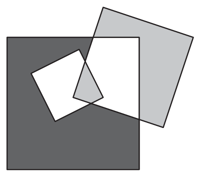
2. Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden wir alle möglichen 5-stelligen Zahlen, wobei jede Ziffer genau einmal benutzt wird. Gesucht sind nun jene Zahlen $\overline{abcde}$ unter ihnen, für die gilt: Die Zahl $\overline{a}$ ist durch 1, die Zahl $\overline{ab}$ durch 2, die Zahl $\overline{abc}$ durch 3, die Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 und die Zahl $\overline{abcde}$ ist durch 5 teilbar. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) fünf (**E**) 60

3. Stell dir vor, du hättest einen $(9 \times 9 \times 9)$-Würfel aus 9^3 gleich großen kleinen Würfeln gebaut. Weil er so gut gelungen ist, fotografierst du den großen Würfel und fragst dich, wie viele der kleinen Würfel auf dem Foto höchstens zu sehen sind. Es sind

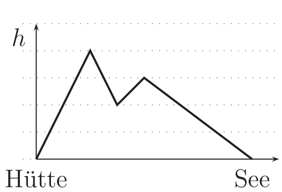
(**A**) 261 (**B**) 243 (**C**) 225 (**D**) 217 (**E**) 192

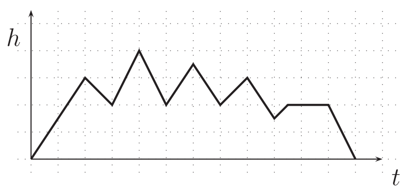
4. In einem Quadrat mit Seitenlänge 7 cm liegt ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm schneidet beide Quadrate (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Um wie viel ist die schwarze Fläche größer als die Summe der beiden grauen Flächen?



(**A**) um $0\,\mathrm{cm}^2$ (**B**) um $3\,\mathrm{cm}^2$ (**C**) um $9\,\mathrm{cm}^2$
(**D**) um $11\,\mathrm{cm}^2$ (**E**) um $15\,\mathrm{cm}^2$

5. Ein ziemlich zerstreuter Bergwanderer überquerte die links abgebildete Bergkette von der Hütte zum See, wobei er ab und zu etwas verlor und dann umkehren musste, um es einzusammeln. Sein mitgeführter Höhenmesser zeichnete sein Auf und Ab in Abhängigkeit von der Zeit t auf (rechte Abb.).





Wie oft ist er auf dem Weg von der Hütte zum See umgekehrt?

(**A**) zweimal (**B**) dreimal (**C**) fünfmal (**D**) siebenmal (**E**) neunmal

6. Beim Lösen einer Känguruaufgabe zieht Carolin die folgenden richtigen Schlüsse:

1) Wenn die Antwort (**A**) richtig ist, dann ist auch (**B**) richtig.
2) Wenn Antwort (**C**) falsch ist, dann ist auch (**B**) falsch.
3) Wenn Antwort (**B**) falsch ist, dann ist weder (**D**) noch (**E**) richtig.

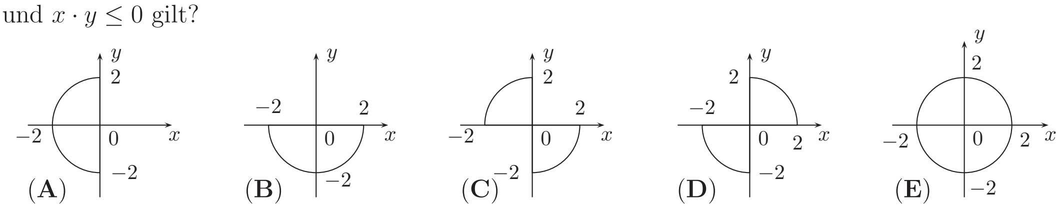
Welche der Antworten ist wahr? (Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei den Aufgaben des Känguruwettbewerbs stets nur genau eine der Antworten richtig ist.)

(**A**) Antwort (**A**) (**B**) Antwort (**B**) (**C**) Antwort (**C**)
(**D**) Antwort (**D**) (**E**) Antwort (**E**)

7. Die Zahlen x und y sind beide größer als 1. Welcher der folgenden Brüche hat den größten Wert?

(**A**) $\dfrac{x}{y-1}$ (**B**) $\dfrac{x}{y+1}$ (**C**) $\dfrac{2x}{2y-1}$ (**D**) $\dfrac{2x}{2y+1}$ (**E**) $\dfrac{3x}{3y-1}$

8. Welches ist die graphische Darstellung der Menge aller Punkte (x, y) der Ebene, für die $x^2+y^2 = 4$ und $x \cdot y \leq 0$ gilt?



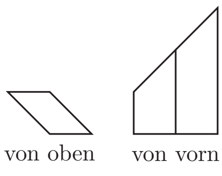
9. Beim Programmieren ihrer vier sprachbegabten Roboter ist Ines eventuell ein Fehler unterlaufen. Wahrscheinlich hat sie einen oder auch mehrere der Roboter, die sonst stets die Wahrheit sagen, so programmiert, dass sie stets lügen. Sicher gibt es viele Möglichkeiten, die fehlprogrammierten Roboter herauszufinden; sie entschließt sich zu der Frage: „Wie viele von euch lügen?“ Darauf antwortet der erste Roboter: „Einer“, der zweite: „Zwei“, der dritte: „Drei“, der vierte: „Vier“. Wie viele lügen?

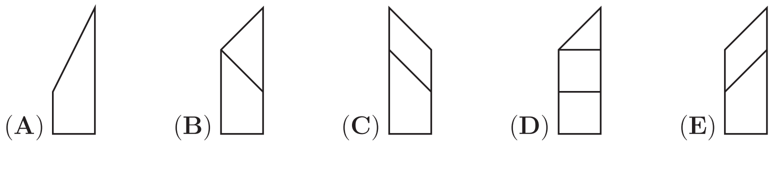
(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle

10. Ann, Belinda und Charles werfen nacheinander einen Würfel. Ann gewinnt, wenn sie eine 1, 2 oder 3 wirft. Belinda gewinnt, wenn sie eine 4 oder eine 5 wirft. Charles gewinnt, wenn er eine 6 wirft. Ann beginnt und gibt den Würfel an Belinda, diese gibt ihn an Charles, Charles gibt ihn an Ann usw., solange, bis jemand zum ersten Mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der offenbar benachteiligte Charles gewinnt?

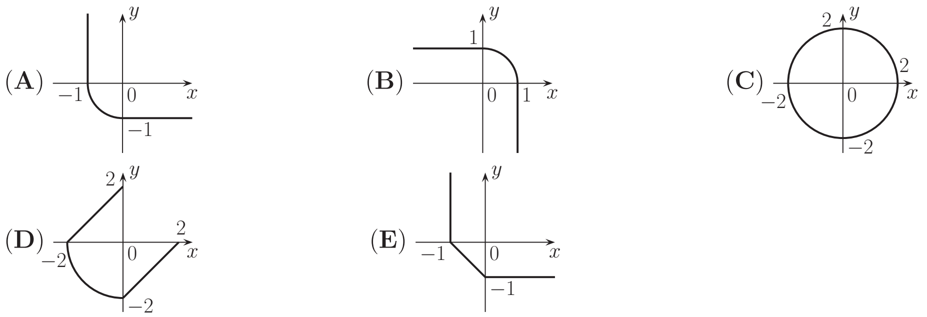
(**A**) $\dfrac{1}{6}$ (**B**) $\dfrac{3}{23}$ (**C**) $\dfrac{1}{11}$ (**D**) $\dfrac{3}{38}$ (**E**) $\dfrac{1}{13}$

11. Rechts sind zwei Skizzen desselben, von ebenen Flächen begrenzten Körpers abgebildet. Welche der folgenden Skizzen gibt den Anblick von links wieder?





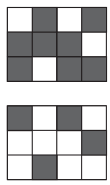
12. Welcher der in (**A**) bis (**E**) dargestellten Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $(x-|x|)^2+(y-|y|)^2=4$?



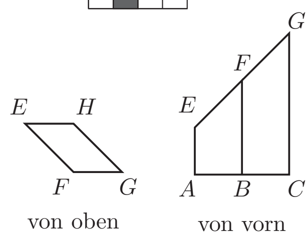
Die Lösungen der nachfolgenden Aufgaben sind im Wortlaut dieselben, wie sie in den am Schluss aufgeführten Känguru-Büchern publiziert worden sind, die ihrerseits praktisch identisch sind mit den Lösungen in den jeweiligen Broschüren, welche alljährlich im Anschluss an den Wettbewerb den SuS abgegeben werden.

Vorstellungsvermögen

Bei den ersten beiden der hier präsentierten Beispielen von Lösungen steht das reine Vorstellungsvermögen im Zentrum. Im ersten Fall müssen sich die Teilnehmenden ein gemustertes Rechteck vorstellen können, das einer Vierteldrehung im Uhr- oder Gegenuhrzeigersinn unterworfen worden ist, wenn sie aufs zeitraubende Skizzieren verzichten möchten. Und bei der zweiten Lösung muss der anhand zweier Risse dargestellte Körper in Gedanken schrittweise „aufgebaut“ und mit den inneren Augen vorgestellt werden können. Im zweiten Fallbeispiel spielt zudem das Eliminieren von Lösungsvorschlägen eine Rolle, dem wir uns dann am Schluss eingehender widmen werden.



L1. Wir drehen das neben der Aufgabe abgebildete Stück Folie um 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn und zeichnen es über das unter (**D**) gezeichnete, dann erkennt man sofort, dass dies die Lösung ist.



L 11. Zunächst bezeichnen wir in den gegebenen Perspektiven die sichtbaren Eckpunkte des Körpers.
In dem ebenen Viereck $EFGH$ sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Wären nämlich zwei gegenüberliegende Seiten nicht parallel, so würden sich die Verlängerungen dieser Seiten schneiden, also auch in der Sicht von oben, wo sie jedoch parallel erscheinen. Das Viereck $EFGH$ ist also ein Parallelogramm, welches der Sicht von vorn zufolge nach links geneigt ist. Daher ist es von links betrachtet vollständig als Parallelogramm sichtbar.
Folglich kommen nur noch die Antworten (**C**) und (**E**) in Frage. Weil E tiefer als G liegt (Sicht von vorn) und weiter hinten als G (Sicht von oben), entfällt Antwort (**C**), und (**E**) ist die Lösung.

Schrittweise und systematisch

Sehr oft bei Teilbarkeitsfragen und speziell im Bereich der Logik ist ein schrittweises und systematisches Vorgehen meist die zweckmässigste Methode. Immerhin stehen uns gelegentlich unterschiedliche Anfangsglieder in der logischen Kette von Schlussfolgerungen zur Verfügung.

L 2. Da die 5-stellige Zahl $\overline{abcde}$ durch 5 teilbar sein soll, muss $e = 5$ sein. Da die 4-stellige Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 teilbar sein soll, muss zunächst $d = 2$ oder $d = 4$ sein. Die Zahl $\overline{abcd}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $\overline{cd}$ durch 4 teilbar ist. Falls also $d = 4$ wäre, müsste $c = 2$ sein, denn weder 14 noch 34 ist durch 4 teilbar. Die Ziffer c kann aber nicht gleich 2 sein, da ja die 2-stellige Zahl $\overline{ab}$ durch 2 teilbar sein soll, und folglich $b = 2$ oder $b = 4$ sein muss. Demzufolge muss $d = 2$ sein. Folglich besteht die 3-stellige Zahl $\overline{abc}$ aus den Ziffern 1, 3 und 4. Die Summe dieser Ziffern ist jedoch nicht durch 3 teilbar, also ist $\overline{abc}$ keine durch 3 teilbare Zahl. Folglich gibt es keine Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

L 6. Da beim Känguruwettbewerb stets nur genau eine der fünf vorgeschlagenen Antworten richtig ist, kann dies gewiss nicht (**A**) sein, da sonst nach Aussage 1 auch (**B**) richtig wäre. Nehmen wir an (**C**) wäre falsch. Dann wäre nach Aussage 2 auch (**B**) falsch, und nach Aussage 3 würden dann auch (**D**) und (**E**) falsch sein. Hieraus folgte, dass (**A**) richtig wäre, was wir ja bereits ausschließen konnten. Also war die Annahme, (**C**) wäre falsch, falsch. (**C**) ist richtig.

Wir hätten auch nach der ersten Schlussfolgerung, dass nämlich aus der Richtigkeit von Antwort (**A**) auch die von (**B**) folgte und demzufolge (**A**) nicht richtig sein kann, folgendermaßen weiter überlegen können: (**B**) kann nicht richtig sein, da sonst wegen Aussage 2 (**C**) richtig sein müsste (wieder zwei Antworten richtig, was beim Känguruwettbewerb ausgeschlossen ist). (**D**) oder (**E**) können nicht richtig sein, da sonst wegen Aussage 3 wiederum jeweils auch (**B**) richtig wäre. Also bleibt nur die Möglichkeit, dass (**C**) richtig ist.

L 9. Alle nicht fehlprogrammierten Roboter geben auf die gestellte Frage die gleiche richtige Antwort. Da es auf dieselbe Frage insgesamt vier verschiedene Antworten gegeben hat, kann höchstens einer der Roboter ohne Fehler sein, mindestens drei lügen. – Würden alle 4 Roboter lügen, wäre im Widerspruch dazu die Antwort des 4. Roboters wahr. Also sind genau 3 der Computer aufs Lügen programmiert, und nur einer ist ohne Fehler im Programm.

Unterschiedliche Lösungswege

Der volle Gehalt vieler Aufgaben erschliesst sich natürlich erst beim Studium der (in der Regel ausführlichen) Lösungen in der Broschüre – egal, ob die teilnehmenden SuS selbst darauf gekommen sind oder nicht. Es ist an sich weder erstaunlich noch überraschend, dass es bei der einen oder anderen Känguruaufgabe unterschiedliche Lösungswege gibt. Spannend wird‘s aber natürlich besonders dann, wenn zwei unterschiedliche Vorgehensweisen interessante mathematische Zusammenhänge aufdecken, wie‘s etwa in den beiden folgenden Beispielen der Fall ist.

Bei der ersten Aufgabe liefern die beiden präsentierten Lösungen einen direkten Zusammenhang zwischen der Ein- und Ausschaltformel, die der ersten Zählweise zugrunde liegt, und einer binomischen Formel, die bei der zweiten Abzählung zum Zuge kommt. – Die 2. Lösung im Nachfolgebeispiel **10** eröffnet eine mögliche Variante zur Herleitung der Summenformel und damit zur Bestimmung der Summe für die unendliche geometrische Reihe, die der 1. Lösung zugrunde liegt.

L 3. Von einem Würfel können im günstigsten Fall drei Seitenflächen gesehen werden. Die Anzahl der kleinen Würfel auf diesen drei Seiten kann „ausgezählt“ werden. Dies ist z. B. folgendermaßen möglich: Jede der drei Seiten besteht aus $9 \cdot 9 = 81$ kleinen Würfeln, das sind insgesamt 243. Davon sind jene abzuziehen, die sich auf gemeinsamen Kanten befinden, da wir sie doppelt berücksichtigt haben, also $243 - 3 \cdot 9 = 216$. Allerdings ist der Würfel, der den gemeinsamen Eckpunkt der drei Seiten bildet, nun zwar dreimal gezählt, aber auch dreimal wieder abgezogen worden. Er muss einmal wieder hinzugefügt werden, die gesuchte Anzahl ist 217.

Ein eleganterer Lösungsweg, der sich dann auch gut verallgemeinern lässt, ist der folgende:

Im günstigsten Fall können wir drei Seitenflächen eines Würfels sehen. Nehmen wir nun alle Würfelchen dieser drei Seitenflächen (Schichten) weg, so bleibt ein kleinerer Würfel zurück, nämlich ein $(8 \times 8 \times 8)$-Würfel. Für die Anzahl Würfelchen der drei Seitenflächen erhalten wir folglich das Ergebnis: $9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$.

Dieser Lösungsansatz lässt sich sehr gut verallgemeinern: Wäre der große Würfel aus k kleinen aufgebaut gewesen, so hätten wir zur Berechnung der Anzahl x der sichtbaren Würfelchen wie folgt rechnen müssen: $x = k^3 - (k-1)^3$. Durch Anwendung der binomischen Formel auf den zweiten Term erhalten wir $k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$. Für $k = 3$ erhalten wir Schritt für Schritt die Rechnung gemäss der ersten Abzählvariante.

L 10. Die Wahrscheinlichkeit, dass Charles bei seinem ersten Würfeln gewinnt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ann keine 1 oder 2 oder 3 würfelt, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass Belinda keine 4 oder 5 würfelt, und der Wahrscheinlichkeit, dass Charles dann eine 6 würfelt, also $P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$. Hinzuzufügen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Charles bei seinem zweiten Würfeln gewinnt, also $P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ usw. Wir finden für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 6}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{5}{18}}{\left(1 - \frac{5}{18}\right)} = \frac{1}{13}$$

Wir geben eine 2. Lösung:

Charles gewinnt, wenn er das erste Mal an der Reihe ist, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$; mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ wirft er keine „6“, und die Würfelei beginnt von vorn. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P gilt also die folgende Gleichung:

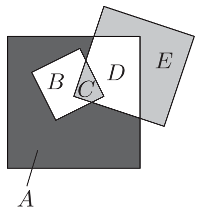
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} P = \frac{1}{18} + \frac{5}{18} P$$

mit der Lösung $P = \frac{1}{13}$.

Spezialfälle und Einsetzproben

Es ist selbstverständlich schon nicht so, dass der (mathematische) Zweck die eingesetzten Strategien und Mittel heiligt, doch es ist eine der weiteren Facetten des Känguruwettbewerbs, dass es für den Nachweis allgemein geltender Sachverhalte durchaus genügt, geeignete Spezialfälle zu untersuchen oder besonders einfache Zahlen zur Kontrolle und Überprüfung heranzuziehen.

Die drei Quadrate in der geometrischen Aufgabe **4** dürfen bezüglich ihrer gegenseitigen Lage speziell so gewählt oder auf die Ebene gelegt werden, dass das kleinste Quadrat exakt der gemeinsamen Überschneidungsfläche des mittleren und des grossen entspricht. Dann kommen überhaupt keine weissen Teilflächen mehr vor und die graue Fläche entspricht just dem mittleren Quadrat; denn ‚grau‘ ist, was ausserhalb des grossen und innerhalb des kleinen Quadrates liegt. Die graue Fläche misst folglich 5^2 cm^2. Und für die schwarze Fläche ergibt sich der Inhalt $(7^2 - 3^2)$ cm^2. Für den Unterschied erhalten wir auch hier wie in der „offiziellen“ Lösung: 40 cm$^2 - 25$ cm$^2 = 15$ cm^2. – Die Einsetzvariante bei der Lösung vom recht anspruchsvollen Beispiel **12** führt gleichzeitig auf ein Eliminieren von angegebenen Lösungsmöglichkeiten hinaus. Ich komme am Schluss meiner Ausführungen auf dieses „Ausscheidungsverfahren“ zurück.



L 4. Wir bezeichnen die Flächenteile wie im Bild mit A bis E. Gesucht ist $A-(C+E)=A-C-E$. Bekannt sind die Flächeninhalte der 3 Quadrate:

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=49\\ B+C&=9\\ C+D+E&=25 \end{aligned}$$

Wir stellen die gesuchte Größe $A-C-E$ als Kombination der Quadratflächen dar:

$$\begin{aligned} A-C-E&=(A+B+C+D)-(B+C)-(C+D+E)\\ &=49-9-25=15 \end{aligned}$$

Der gesuchte Flächeninhalt hängt nicht von der Lage der Quadrate ab. Wir könnten also auch eine ganz spezielle, zum Rechnen günstige Lage wählen.

L 12. Da genau einer der Graphen richtig ist, liegt es bei dieser Aufgabe nahe, die falschen auszuschließen. Dazu wählen wir geeignete Werte für x bzw. y. Setzen wir $x=0$, so muss $|y-|y||=2$ gelten, was nur für $y=-1$ gilt. Damit sind nur die Lösungsmöglichkeiten (**A**) und (**E**) möglich. Wir können auf dieselbe Weise ausschließen, dass (**E**) Lösung sein kann. Falls nämlich (**E**) Lösung wäre, müsste an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$ auch $y=-\frac{1}{2}$ gelten. Jedoch ist $\left(-\frac{1}{2}-\left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2=2\neq 4$.

Vergleichen und Interpretieren

Im Känguruwettbewerb kommen natürlich immer auch wieder Aufgaben vor, bei deren Lösung jegliche Originalität fehl am Platze ist; denn es geht schlicht und ergreifend nur darum, Texte, Graphiken, Figuren und (räumliche) Bilder konzentriert zu studieren oder – wie konkret bei der nachfolgenden Aufgabe – die beiden Diagramme sorgfältig miteinander in Beziehung zu setzen und richtig zu interpretieren.

L 5. Bevor der Wanderer die volle Höhe erreicht hat, steigt er abwärts. Das ist ein sicheres Zeichen, dass er umkehren musste. Nachdem die volle Höhe von 4 Höheneinheiten erreicht ist, geht der Weg abwärts bis zu einer Höhe von 2 Höheneinheiten. Der Wanderer steigt jedoch anschließend auf *mehr als* 3 Höheneinheiten hoch, also musste er auch hier umkehren. Und als er schließlich auf dem langen Abstieg ist, muss er erneut etwas vergessen haben und noch einmal umkehren, denn es ist ein Aufstieg eingezeichnet, bevor er sich eine längere Ruhepause gönnt und dann schnell abwärts zum See geht. Er ist an drei Stellen umgekehrt.

Ausschliessen und eliminieren

Wie bereits einleitend hervorgehoben, und bei den Lösungen der Aufgaben 11 und 12 schon genutzt oder erwähnt, ist beim Känguruwettbewerb das Eliminieren der falschen Antworten nicht selten eine kluge und darüber hinaus meist eine effiziente Lösungsstrategie; denn es müssen ja höchstens vier Fälle ausgeschlossen werden. Und es ist schon viel gewonnen, wenn sich zwei oder drei Lösungsvorschläge als falsch entpuppen.

Die nachfolgend präsentierte Lösung der Bruchtermaufgabe **7** liefert den Bruchterm mit dem grössten Wert in voller Allgemeinheit. Als Alternative können die sicher falschen Antworten schrittweise auch wie folgt eliminiert werden: Beim Vergleich der Antwortvorschläge (A) und (B) fällt (B) mit dem grösseren Nenner weg und ebenso (D) im Vergleich mit (C). Für die drei verbleibenden Bruchterme (A), (C) und (E) genügt es – in echter Kängurumanier – durch Einsetzen von $x=y=2$ bloss einen Spezialfall zu betrachten, womit dann beim direkten Vergleich der Brüche auch noch (C) und (D) entfallen. Viele SuS setzen natürlich schon von Anfang an einfache Zahlen für x und y ein, speziell jene, die im rechnerischen Umgang mit Brüchen gewieft sind. Dieses Beispiel hätte demnach ebenso gut in der früheren Rubrik ‚Spezialfälle und Einsetzproben' placiert werden können.

L 7. Bringen wir alle fünf Brüche auf denselben Zähler, indem wir (**A**) und (**B**) mit 6, (**C**) und (**D**) mit 3 bzw. (**E**) mit 2 erweitern, so erhalten wir:

(**A**) $\frac{6x}{6y-6}$ (**B**) $\frac{6x}{6y+6}$ (**C**) $\frac{6x}{6y-3}$ (**D**) $\frac{6x}{6y+3}$ (**E**) $\frac{6x}{6y-2}$

Bei gleichem Zähler ist der Bruch mit dem größten Nenner am kleinsten und der mit dem kleinsten Nenner am größten. Der gesuchte Bruch ist also (**A**).

Das letzte aufgeführte Beispiel **8** ist insofern ein Klassiker, als beim Heranziehen *einer* verlangten Eigenschaft auf Anhieb *alle vier* falschen Lösungsvorschläge „hängen" bleiben.

L 8. Die Punkte (x, y) gehören wegen $x^2 + y^2 = 4$ zu der Kreislinie mit Radius 2 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Dies trifft auf alle 5 Lösungsvorschläge zu. Der Bedingung $x \cdot y \leq 0$ genügen genau die Punkte der Kreislinie, die im II. und IV. Quadranten liegen. Damit ist (**C**) richtig.

Literatur

Sämtliche zwölf Beispiele sind den folgenden Sammelbänden entnommen worden, die im **Fachbuchverlag Leipzig** im Carl Hanser Verlag erschienen sind:

- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 1 (2007), ISBN 978-3-446-40713-8
  1 (A4.5, p. 68 & L4.5, p. 164); **5** (A2.76, p. 52 & L2.76, p. 151);
  8 (A4.63, p. 80 & L4.63, p. 175); **9** (A5.10, p. 100 & L5.10, p. 188)
- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 2 (2009), ISBN 978-3-446-41647-5
  3 (A3.42, p. 57 & L3.42, p. 143); **6** (A5.5, p. 85 & L5.5, p. 169);
  10 (A3.35, p. 55 & L3.35, p. 140)
- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 3 (2012), ISBN 978-3-446-42820-1
  2 (A1.54, p. 21 & L1.54, p. 112); **4** (A4.62, p. 74 & L4.62, p. 168);
  7 (A2.58, p. 40 & L2.58, p. 129); **11** (A4.99, p. 84 & L4.99, p. 176);
  12 (A2.66, p. 42 & L2.66, p. 131)

E-mail-Adresse des Autors: hjstocker@bluewin.ch