

Drei Sätze über ebene Polygonzüge

Christian Blatter

1. Einleitung. Von den drei angesagten Polygonsätzen handeln die ersten beiden – der Jordansche Kurvensatz und der Umlaufsatz von Hopf – im Grunde genommen von “beliebigen” Kurven; nur der nachgeschobene Satz von Pick über den Flächeninhalt von Gitterpolygonen ist strikt ein Satz über Polygone. Der Jordansche Kurvensatz ist ein zentraler Satz der ebenen Geometrie; aber sein Beweis ist so aufwändig, dass sich nur die wenigsten Studenten je damit befassen müssen. Der Umlaufsatz von Hopf ist an sich einfacher; aber ein schlanker Beweis verlangt begriffliche Hilfsmittel, die an der Schule nicht zur Verfügung stehen. Indem wir diese Sätze auf Polygonniveau herunterbrechen, können wir viele Schwierigkeiten eliminieren, ohne an “globaler Geometrie” einzubüßen. Gleichzeitig steht uns damit das starke Werkzeug der vollständigen Induktion zur Verfügung, das erlaubt, geometrisch noch so komplexe Situationen in der Induktionsannahme abzulegen und in einem übersichtlichen Induktionsschritt weiterzuentwickeln. Unser Argumentieren wird sich auf einem Level bewegen, das Gymnasiasten zugänglich ist und ihnen ein mathematisches Erlebnis vermittelt, das über den Alltagstrott hinausweist.

2. Der Jordansche Kurvensatz. Eine *einfach geschlossene Kurve*, kurz: *Jordankurve*, ist das injektive und stetige Bild γ einer Kreislinie in der euklidischen Ebene E . Man stelle sich eine zur Endlosschleife verknotete Schnur vor, die ohne Überkreuzungen auf dem Tisch liegt. Der *Jordansche Kurvensatz* besagt, dass eine derartige Kurve die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt: ein *Innengebiet*, das beschränkt ist und topologisch äquivalent zu einer Kreisscheibe, und ein *Außengebiet*. Dies entspricht unserer Alltagserfahrung, und wir machen uns etwa beim Argumentieren über planare Graphen keinen zweiten Gedanken darüber. Jordan war der erste, der festgestellt hat, dass der beschriebene Sachverhalt nicht selbstverständlich ist, sondern ein *Satz*. Treffen dessen Voraussetzungen nicht zu, so sind andere Situationen möglich: Ist die Abbildung $f: S^1 \rightarrow E$, die γ erzeugt, nicht injektiv, so entstehen mehr als zwei Gebiete (siehe die Fig. 2, rechts). Eine Kurve, die einmal um einen Torus herumgeht, zerlegt die Torusfläche nicht, und auch ein Möbiusband zerfällt nicht in zwei Teile, wenn man es längs der Mittellinie zerschneidet. Jordans Beweis (1887) war allerdings nicht ganz wasserdicht, und heute wird Veblen (1905) die Priorität für einen korrekten Beweis zugeschrieben. Ein Beweis aus neuerer Zeit ist der von Twerberg [4], er beginnt ebenfalls mit Polygonen ...

Jeder Beweis des Kurvensatzes in seiner allgemeinen Form muss mit zwei ganz verschiedenen Schwierigkeiten fertig werden: Erstens mit der komplizierten Gestalt, die auch eine “schöne” Jordankurve haben kann (siehe die Fig. 1), und zweitens mit der unter Umständen sehr gekräuselten Mikrostruktur einer nur als stetig vorausgesetzten Kurve – man denke an die Kochsche Schneeflockenkurve oder an immer kleinere Spiralen und Gegenspiralen, die iterativ auf eine einfache Ausgangskurve aufgesetzt werden. Viele Beweise, zum Beispiel der in [1], setzen daher γ von Anfang an als stetig differenzierbar voraus. Dann ist jederzeit klar, ob man die Kurve tatsächlich überschritten hat oder nicht. Wir schränken uns hier sogar auf Polygonzüge ein. Auch mit Polygonzügen lassen sich beliebig vertrackte geometrische Situationen produzieren, eine “fraktale Kräuselung” allerdings nicht.

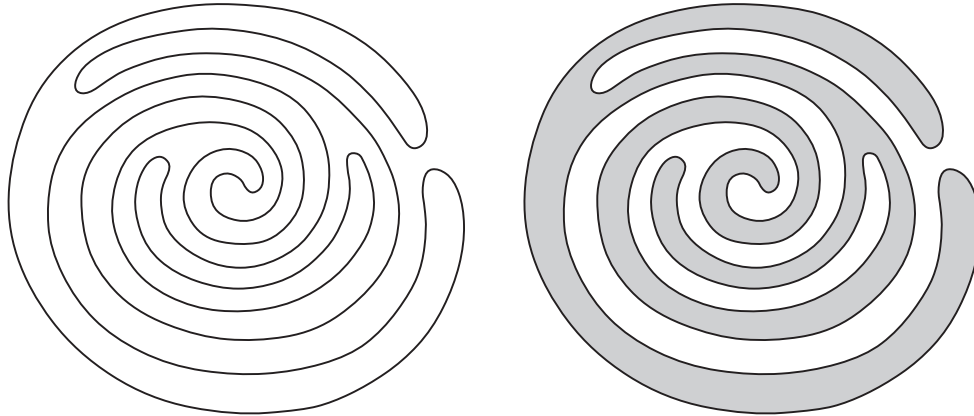


Fig. 1

Das Folgende spielt sich in der euklidischen Ebene E ab, wenn nötig mit einem rechtwinkligen (x, y) -Koordinatensystem versehen. Ein $(n + 1)$ -Tupel (z_0, \dots, z_n) von Punkten $z_k \in E$ definiert durch Aneinanderhängen der Streckenwege $\sigma_k := [z_{k-1}, z_k]$ ($1 \leq k \leq n$) einen Streckenzug γ von z_0 nach z_n . Ein derartiges γ besitzt eine stetige und stückweise lineare Parameterdarstellung $t \mapsto z(t)$ mit $z(k) = z_k$ ($0 \leq k \leq n$). Die Vereinigung der Teilstrecken σ_k , eine kompakte Teilmenge von E , bezeichnen wir ebenfalls mit γ . Eine offene Menge $\Omega \subset E$ ist *zusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $a, b \in \Omega$ einen Streckenzug γ von a nach b gibt, der ganz in Ω liegt. Im Allgemeinen zerfällt aber eine offene Menge Ω in disjunkte *Zusammenhangskomponenten*, kurz: *Komponenten*. Zwei Punkte $a, b \in \Omega$ gehören genau dann zur gleichen Komponente, wenn sie sich durch einen ganz in Ω liegenden Streckenzug miteinander verbinden lassen.

Ist $\gamma = (z_0, \dots, z_n)$, $n \geq 3$, ein Streckenzug mit $z_0 = z_n$ und $z(t) \neq z(t')$ ($t < t'$), ausser wenn $(t, t') = (0, n)$, so heisst γ ein *einfach geschlossener Polygonzug* oder ein *n -Jordanzug*. Für derartige Polygonzüge nimmt der Jordansche Kurvensatz die folgende Form an:

Satz 1. (a) *Es sei γ ein n -Jordanzug in der Ebene E . Dann zerfällt die Menge $E \setminus \gamma$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten Ω_i und Ω_a . Bei einmaligem Überschreiten von γ wechselt man von der einen in die andere Komponente.*

(b) *Das sogenannte Innengebiet Ω_i lässt sich durch Diagonalen triangulieren und ist topologisch äquivalent zu einem konvexen n -Eck.*

(c) *Das Aussengebiet Ω_a ist unbeschränkt und enthält alle Punkte $z \in E$, die hinreichend weit von γ entfernt sind.*

Wir beweisen den Satz 1 in Abschnitt 5.

3. Der Umlaufsatz von Hopf. Ein Wanderer unternimmt eine je nachdem verschlungene, aber stückweise glatte Rundwanderung

$$\gamma: t \mapsto z(t) \in E \quad (0 \leq t \leq T), \quad z(0) = z(T).$$

Längs der glatten Wegstücke hat sein Fortschreiten in jedem Moment ein ganz bestimmtes Azimut, *vulgo*: eine bestimmte Himmelsrichtung $\theta(t)$, und diese Richtung ändert sich kontinuierlich längs

gebogenen Wegstücken. In den Knickpunkten $z_k := z(t_k)$ von γ ändert sich $\theta(t)$ abrupt um den Winkel $\phi_k := \theta(t_k+) - \theta(t_k-)$, dabei gilt $-\pi < \phi_k < \pi$. Wir können die infinitesimalen und die abrupten Richtungsänderungen unter Berücksichtigung des Vorzeichens laufend aufaddieren: Ein 45° -Schwenk nach links schlägt mit $+\frac{\pi}{4}$ zu Buche (siehe die Fig. 2, links), ein Viertelkreis rechtsherum ändert θ um 90° und liefert den Beitrag $\phi = -\frac{\pi}{2}$, undsoweiter. Kommt der Wanderer mit anderem Azimut am Ausgangspunkt an, als er gestartet war, so ist natürlich ein entsprechender Schwenk mitzuzählen. Was lässt sich über die algebraische Summe Σ_γ dieser Richtungsänderungen sagen? Es ist klar, dass Σ_γ ein Vielfaches von 2π ist; das heisst, es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\Sigma_\gamma = n \cdot 2\pi .$$

Die Fig. 2, rechts, zeigt, dass für die Zahl n beliebige ganzzahlige Werte möglich sind.

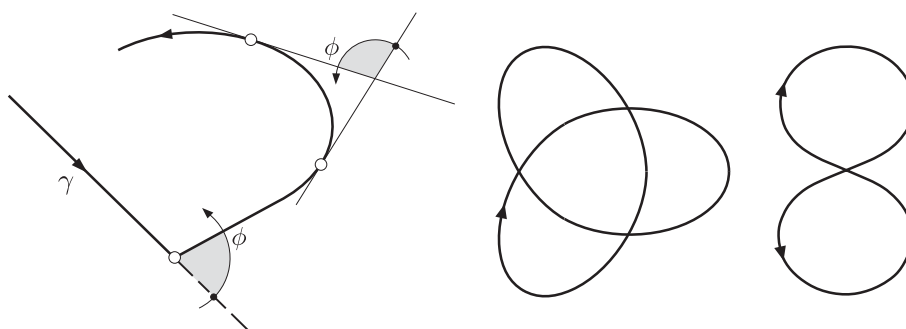


Fig. 2

Wenn wir nun annehmen, dass unser Wanderer an keinem Ort mehr als einmal vorbeikommt, so ist γ eine geschlossene Jordankurve. Hopf hat 1935 bewiesen [3], dass in diesem Fall $n = 1$ oder $n = -1$ sein muss. Bei einem konvexen Rundweg scheint das selbstverständlich; bei der Jordankurve von Fig. 1 müsste man es zur Sicherheit nachprüfen! Dieser “wohl auf Riemann zurückgehende” (so Hopf), aber heute nach ihm benannte *Umlaufsatz* ist gültig für beliebige stückweise stetig differenzierbare Jordankurven. Wir beweisen ihn in Abschnitt 6 für Jordanzüge:

Satz 2. (a) *Es sei γ ein Jordanzug in der Ebene E . Dann ist die algebraische Summe Σ_γ der Richtungsänderungen längs γ gleich 2π oder gleich -2π .*

Bei Satz 1 hat der Umlaufsinn von γ um Ω_i keine Rolle gespielt; dieses Mal müssen wir uns aber darum kümmern. Der Jordanzug γ hat nämlich nicht nur eine Innen- und eine Aussenseite, sondern auch eine linke und eine rechte Seite, die an die Fortschrittrichtung geknüpft sind: Wird im Mittelpunkt jeder Teilstrecke $[z_{k-1}, z_k] \subset \gamma$ ihr Richtungsvektor $u_k := (\cos \theta_k, \sin \theta_k)$ angeheftet und dreht man diese Vektoren an Ort und Stelle um 90° im Gegenuhrzeigersinn, so weisen die gedrehten Vektoren u_k^* entweder alle ins Innengebiet oder alle ins Aussengebiet von γ . Im ersten Fall sagen wir, das Innengebiet Ω_i befinde sich *zur Linken* von γ . Wir können damit die Aussage des Satzes wie folgt präzisieren:

(b) *Befindet sich Ω_i zur Linken von γ , so ist $\Sigma_\gamma = 2\pi$, andernfalls ist $\Sigma_\gamma = -2\pi$.*

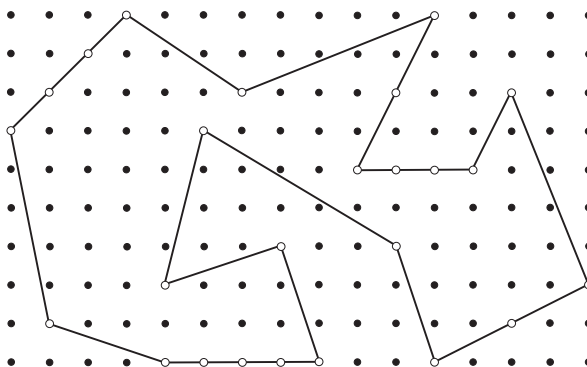


Fig. 3

4. Der Satz von Pick über den Flächeninhalt von Gitterpolygonen. Der Satz von Pick handelt von Jordanzügen $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$, deren Teilpunkte z_k ganzzahlige Koordinaten besitzen. Es geht also um das Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset E$. Ausser den gegebenen z_k können noch weitere Gitterpunkte “zufällig” auf γ liegen und sollen an entsprechender Stelle in die Liste der z_k aufgenommen werden, siehe die Fig. 3. Das Polygon $P := \overline{\Omega_i}$ besitze also insgesamt n_r Randgitterpunkte; ferner gibt es $n_i \geq 0$ innere Gitterpunkte. Unter diesen Annahmen gilt folgende *Formel von Pick* für den Flächeninhalt $A(P)$:

Satz 3.

$$A(P) = n_i + \frac{n_r}{2} - 1 .$$

Von diesem Satz gibt es unzählige Beweise. Die meisten operieren mit einer Triangulation von P durch Diagonalen und der nachfolgenden Analyse einzelner Dreiecke. Im Anschluss an den Beweis der Sätze 1 und 2 könnten wir mit dem vorhandenen Apparat auch für den Satz von Pick einen derartigen Induktionsbeweis anstrengen, argumentieren aber lieber mit Hilfe eines physikalischen Gedankenexperiments [2].

Beweis von Satz 3. Es gibt nur endlich viele Gitterpunkte, die nicht auf γ liegen, aber einen Abstand ≤ 1 von γ haben. Unter den auftretenden Abständen gibt es einen kleinsten; es sei $d > 0$ dieser kleinste Abstand.

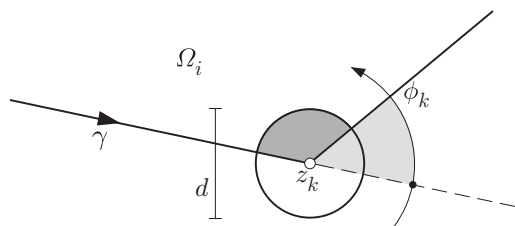


Fig. 4

Wir stellen nun auf jeden Gitterpunkt der Ebene eine Kerze mit Durchmesser d und Volumen 1. Die Grundfläche jeder Kerze enthält zwei Teilstücke von γ der Gesamtlänge d , aber keine weiteren Punkte von γ (siehe die Fig. 4). Werden diese Kerzen simultan zum Schmelzen gebracht,

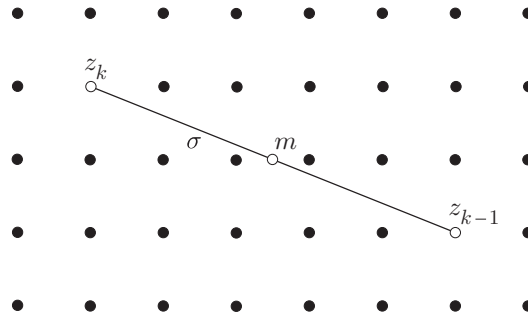


Fig. 5

so entsteht ein See aus flüssigem Wachs, der die ganze Ebene mit der konstanten Höhe 1 bedeckt. Das Wachsvolumen V über dem Polygon P beträgt daher genau $A(P)$.

Woher kommt dieses Wachs? Es sei $\sigma := [z_{k-1}, z_k]$ eine Teilstrecke von γ und m deren Mittelpunkt. Wie man der Figur 5 entnimmt, ist der ganze unendliche Kerzenwald zentralsymmetrisch bezüglich m . Per saldo ist also kein Wachs über die Strecke σ geflossen, und das gilt für jede Teilstrecke von γ . Somit ist das Wachsvolumen V über dem Polygon P am Ende des Prozesses dasselbe wie am Anfang und ist bestimmt durch die Kerzen auf den inneren Gitterpunkten und den Randgitterpunkten von P . Die inneren Kerzen liefern zusammen das Volumen n_i . Liegt Ω_i zur Linken von γ , so liefert die Kerze im Randgitterpunkt z_k den Volumenbeitrag

$$\frac{1}{2} - \frac{\phi_k}{2\pi},$$

wobei $\phi_k \in]-\pi, \pi[$ die Schwenkung von γ an der Stelle z_k darstellt (Fig. 4). Auf Grund von Satz 2 haben wir daher

$$A(P) = V = n_i + \sum_{k=1}^{n_r} \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi_k}{2\pi} \right) = n_i + \frac{n_r}{2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^r \phi_k = n_i + \frac{n_r}{2} - 1.$$

□

5. Beweis von Satz 1. Die Aussagen des Satzes treffen offensichtlich zu, falls $n = 3$. (Hier wurde schon benutzt, dass wir uns in der Ebene befinden!). Im Weiteren sei daher $n \geq 4$ und der Satz richtig für beliebige m -Jordanzüge mit $3 \leq m < n$.

Als erstes verschaffen wir uns eine Ecke von γ , bei der klar ist, was innen ist und was aussen: Unter den z_k mit maximaler x -Koordinate gibt es eines mit maximaler y -Koordinate; nach zyklischer Ummummerierung dürfen wir annehmen, das sei z_0 . In der Umgebung von z_0 haben wir dann die Situation von Fig. 6, (i)–(ii), wobei γ auch rechtsherum gehen könnte. Das würde aber an den folgenden Überlegungen nichts ändern.

Es bezeichne Δ das abgeschlossene Dreieck $[z_{n-1}, z_0, z_1]$ und γ^* den nach Entfernung des Teilstücks (z_{n-1}, z_0, z_1) verbleibenden Hauptteil $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ von γ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (i) Hat γ^* nur die Punkte z_1 und z_{n-1} mit Δ gemein, so sind sowohl $\gamma' := (z_0, z_1, z_{n-1}, z_0)$ wie $\gamma'' := (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_1)$ Jordanzüge mit weniger als n Teilstrecken, darunter die gemeinsame Teilstrecke $\delta := [z_{n-1}, z_1]$.

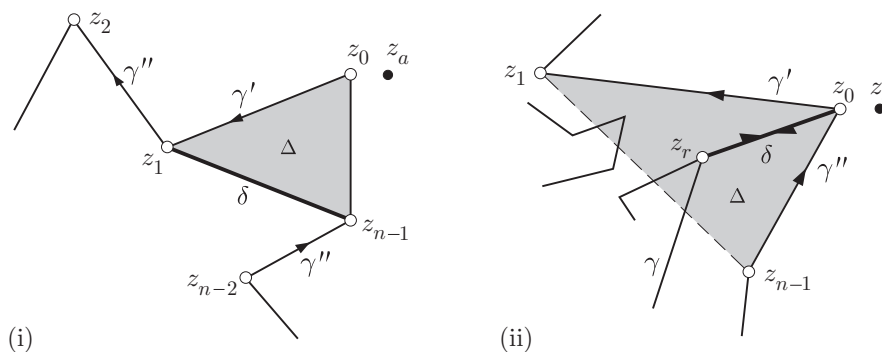


Fig. 6

- (ii) Trifft (i) nicht zu, so gibt es in Δ Punkte von γ^* mit maximalem Abstand von $[z_{n-1}, z_1]$, darunter wenigstens ein z_r mit $1 < r < n - 1$. Die Strecke $\delta := [z_0, z_r]$ hat nur die Punkte z_0 und z_r mit γ gemein, folglich sind $\gamma' := (z_0, z_1, \dots, z_r, z_0)$ und $\gamma'' := (z_0, z_r, z_{r+1}, \dots, z_{n-1}, z_0)$ zwei Jordanzüge mit weniger als n Teilstrecken, darunter die gemeinsame Teilstrecke δ .

In beiden Fällen können wir auf γ' und γ'' die Induktionsvoraussetzung anwenden: Die Menge γ' zerlegt E in zwei Gebiete Ω'_i und Ω'_a , so dass die Aussagen (a)–(c), bezogen auf γ' , gelten, und das Analoge trifft zu für γ'' . Da man von z_0 aus beliebig weit nach rechts gehen kann, ohne wieder auf γ' oder γ'' zu treffen, gehören die Punkte unmittelbar rechts von z_0 sowohl zu Ω'_a wie zu Ω''_a . Ein derartiger Punkt werde markiert und mit z_a bezeichnet.

Im Fall (i) ist Ω'_i das Innere des Dreiecks Δ . Von z_a aus gelangt man durch Überschreiten von $[z_1, z_2] \subset \gamma''$ ins Innengebiet Ω''_i . Die beiden Gebiete Ω'_i und Ω''_i stossen also längs δ aneinander. Im Fall (ii) gehören die nahe bei z_0 gelegenen Punkte des Sektors $\sphericalangle(z_r, z_0, z_1)$ dem Gebiet Ω'_i und die nahe bei z_0 gelegenen Punkte des Sektors $\sphericalangle(z_{n-1}, z_0, z_r)$ dem Gebiet Ω''_i an. Auch in diesem Fall stossen die beiden Gebiete Ω'_i und Ω''_i längs δ aneinander.

Dies legt nahe, das zu γ gehörende Innengebiet Ω_i wie folgt zu definieren:

$$\Omega_i := \Omega'_i \cup \Omega''_i \cup \delta^\circ ;$$

dabei bezeichnet δ° die jeweilige Strecke δ ohne deren Endpunkte. Die Menge Ω_i ist offensichtlich zusammenhängend.

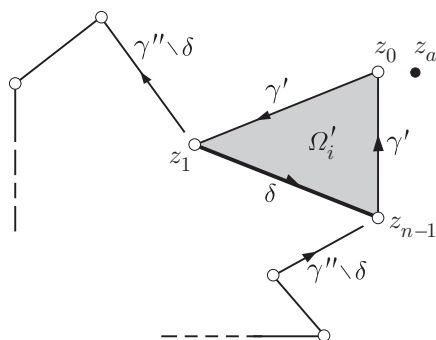


Fig. 7

Der Jordanzug γ'' hat nur die Strecke δ mit γ' gemein; folglich gehören alle Punkte von $\gamma'' \setminus \delta$ zur gleichen Komponente von $E \setminus \gamma'$, und ein Blick auf z_a in der Fig. 7 zeigt, dass das die Komponente Ω'_a sein muss. Somit hat γ'' keine Punkte mit Ω'_i gemein. Folglich liegen alle Punkte von Ω'_i in der gleichen Komponente von $E \setminus \gamma''$, und ein Blick auf z_a zeigt, dass das die Komponente Ω''_a sein muss. Somit gilt $\Omega'_i \subset \Omega''_a$; und daraus folgt weiter, dass die beiden Teilgebiete Ω'_i und Ω''_i disjunkt sind.

Nach Induktionsvoraussetzung besitzen sowohl Ω'_i wie Ω''_i eine Triangulation durch Diagonalen. Ergänzt man diese Triangulationen durch die Diagonale δ , so erhält man eine Triangulation von Ω_i durch Diagonalen. Es sei jetzt $P = (w_0, w_1, \dots, w_r, \dots, w_{n-1}, w_0)$ ein beliebiges konvexes n -Eck, und für jede Diagonale $[z_j, z_k]$ von Ω_i werde die entsprechende Diagonale $[w_j, w_k]$ in P gezeichnet. Jedes Dreieck $[z_j, z_k, z_l]$ der Triangulation von Ω_i lässt sich affin auf das entsprechende Dreieck $[w_j, w_k, w_l]$ von P abbilden. Da die Teilverhältnisse auf den Dreiecksseiten erhalten bleiben, entsteht dabei insgesamt eine bijektive, stetige und stückweise lineare Abbildung von Ω_i auf P .

Inspiriert von der Figur definieren wir nun das zu γ gehörende Aussengebiet Ω_a durch

$$\Omega_a := \Omega'_a \cap \Omega''_a .$$

Man überzeugt sich anhand der Regeln für \cup und \cap leicht davon, dass die drei Mengen γ , Ω_i und Ω_a eine disjunkte Zerlegung der Ebene E bilden. Die folgenden zwei Dinge sind jedoch nicht selbstverständlich: (i) Beim Überschreiten von γ wechselt man von Ω_i nach Ω_a oder umgekehrt, und (ii) Ω_a ist zusammenhängend.

Ad (i): Bei einmaligem Überschreiten von γ überschreitet man γ' oder γ'' , aber nicht beide. Man wechselt also z.B. von $\Omega'_i \subset \Omega''_a \cap \Omega_i$ nach Ω'_a (oder umgekehrt), bleibt aber in Ω''_a . Folglich wechselt man von Ω_i nach Ω_a .

Ad (ii): Es sei z ein beliebiger Punkt von Ω_a , und es sei z_* der z am nächsten gelegene Punkt von γ . Man kann dann von z aus zunächst bis kurz vor z_* gehen und anschliessend in sehr kleinem Abstand dem "Zaun" γ entlang bis zum Punkt z_a , ohne γ je zu überschreiten. Somit lässt sich jeder Punkt $z \in \Omega_a$ durch einen in Ω_a verlaufenden Streckenzug mit z_a verbinden. \square

6. Beweis von Satz 2. Für Dreieckszüge $\gamma := (z_0, z_1, z_2, z_0) \subset E$ trifft das Behauptete zu: Befindet sich Ω_i zur Linken von γ , so ist Σ_γ gleich der Summe der drei Aussenwinkel und damit gleich der doppelten Summe der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta := [z_0, z_1, z_2]$, also gleich 2π . Im Weiteren sei daher $n \geq 4$ und der Satz richtig für beliebige m -Jordanzüge mit $m < n$.

Wir benützen weiterhin die Beweisordnung von Satz 1 und nehmen zusätzlich an, Ω_i befinde sich zur Linken von γ . Dann befindet sich Ω'_i zur Linken von γ' und Ω''_i zur Linken von γ'' . Es bezeichne Φ (resp. Φ' , Φ'') die Summe der Schwenkungen von γ (resp. γ' , γ'') in den Endpunkten der Diagonale δ . Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\Sigma_\gamma = (\Sigma_{\gamma'} - \Phi') + (\Sigma_{\gamma''} - \Phi'') + \Phi = 4\pi + \Phi - \Phi' - \Phi'' .$$

Wir müssen uns also mit der Diagonale δ beschäftigen. Hierzu dient die Figur 8. Nach Konstruktion sind die eingezeichneten Winkel α' , α'' , β' , β'' alle > 0 . Die Schwenkung von γ' an der Stelle z_r beträgt dann $\pi - \alpha'$. Insgesamt hat man

$$\Phi' = (\pi - \alpha') + (\pi - \beta') , \quad \Phi'' = (\pi - \alpha'') + (\pi - \beta'') .$$

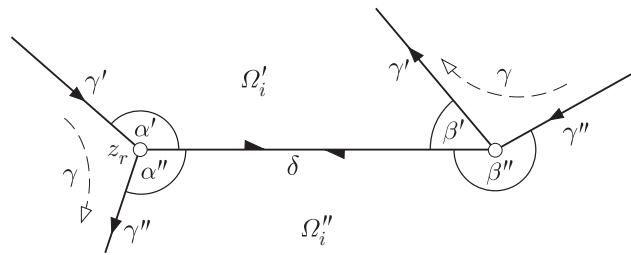


Fig. 8

Bezüglich Φ kann man folgendermassen überlegen: Der auf γ' daherkommende Wanderer schwenkt im Punkt z_r zunächst in die Richtung von δ , besinnt sich dann aber und macht zusätzlich einen Rechtsschwenk der Grösse α'' ; und analog im anderen Endpunkt von δ . Zusammen ergibt sich

$$\Phi = (\pi - \alpha' - \alpha'') + (\pi - \beta'' - \beta')$$

und folglich

$$\Phi - \Phi' - \Phi'' = -2\pi,$$

was zu beweisen war. □

Literatur

- [1] Marcel Berger & Bernard Gostiaux: *Géométrie différentielle: Variétés, courbes et surfaces*. 2e éd., Paris 2005.
- [2] Christian Blatter: *Another proof of Pick's area theorem*. Math. Mag. 70 (1997), 200. – <http://www.math.ethz.ch/~blatter/Pick.pdf>
- [3] Heinz Hopf: *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*. Compositio Math. 2 (1935), 50–62. – <http://www.math.harvard.edu/~knill/graphgeometry/hopf/>
- [4] Helge Tverberg: *A proof of the Jordan curve theorem*. Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 34–38 – <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/jordan/tverberg.pdf>

E-mail-Adresse des Autors: christian.blatter@math.ethz.ch