Mittelwerte und Zahlenfolgen

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Das Bilden von Mittelwerten ist ein zentrales Konzept in der Mathematik: Lagemasse in der Statistik (Mittelwert, Median, Modus); Mitten, Mittellinien oder Schwerpunkte in geometrischen Figuren; Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Mittelwertsatz der Integralrechnung, etc. Klassische Mittelwerte wie das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel tauchen bereits in der Antike auf.

Zwischen Mittelwerten und Zahlenfolgen besteht ein enger Zusammenhang: So ist bei einer arithmetischen Zahlenfolge jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder. Analoges gilt für geometrische und harmonische Zahlenfolgen.

2 Mittelwerte

2.1 Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Für n positive reelle Zahlen $a_1, \; a_2, \; \ldots, a_n$ ist:

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{das arithmetische Mittel;}$$

$$\mathcal{G}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{das geometrische Mittel;}$$

$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \qquad \text{das harmonische Mittel.}$$

Beim Spezialfall $n = 2$ wird

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2} \;\; ; \;\; \mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab} \;\; ; \;\; \mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Bemerkungen:

1. Das arithmetische Mittel ist für beliebige reelle Zahlen definiert, das harmonische Mittel für Zahlen ungleich Null. Beim geometrischen Mittel darf das Produkt $\prod_{i=1}^{n} a_n$ für gerades n nicht negativ sein. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden ausschliesslich auf positive reelle Zahlen.

2. Das harmonische Mittel hängt mit dem arithmetischen Mittel zusammen:

   $$\frac{1}{\mathcal{H}(a, b)} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \mathcal{A}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

   Der Kehrwert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und b ist gleich dem arithmetischen Mittel der Kehrwerte von a und b.

Behauptung: Es gilt:

$$\mathcal{H}(a,b) \leq \mathcal{G}(a,b) \leq \mathcal{A}(a,b) \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } a=b$$

Beweis: Die beiden Ungleichungen ergeben sich aus elementaren Rechnungen.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2 \\ 0 &\leq a^2-2ab+b^2 \\ 4ab &\leq a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Daraus folgt einerseits} \quad ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \implies \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\text{anderseits} \quad \frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1 \implies \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \implies \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \implies \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$

Für $a=b$ wird $\mathcal{A}(a,b)=\mathcal{G}(a,b)=\mathcal{H}(a,b)=a=b$.

Die obigen Rechnungen zeigen umgekehrt, dass aus $\mathcal{A}(a,b)=\mathcal{G}(a,b)$ resp. $\mathcal{G}(a,b)=\mathcal{H}(a,b)$ jeweils $0=(a-b)^2$ und daher $a=b$ folgt. $\square$

Für n Zahlen beweist man die Ungleichungen
$\mathcal{H}(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq \mathcal{G}(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leq \mathcal{A}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ mit vollständiger Induktion (siehe z.B. [1]).

2.2 Interpretationen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels von n Zahlen

Die drei Mittelwerte können auf verschiedene Arten gedeutet werden:

$$\text{Arithmetisches Mittel:} \quad \underbrace{m+m+\cdot+m}_{n \text{ Summanden}} = a_1+a_2+\cdots+a_n \iff m=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$\text{Geometrisches Mittel:} \quad \underbrace{m\cdot m\cdots m}_{n \text{ Faktoren}} = a_1\cdot a_2\cdots a_n \iff m=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$$

$$\text{Harmonisches Mittel:} \quad \underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \iff m=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots}$$

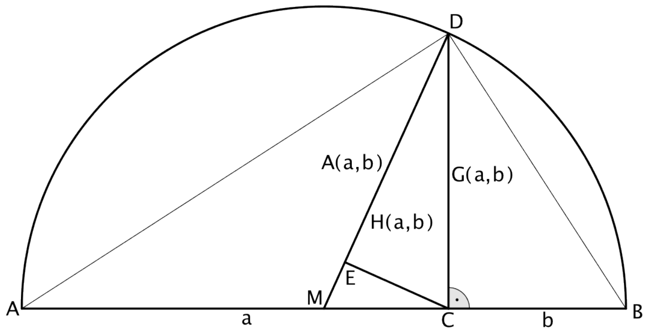
Bemerkung: Beim geometrischen Mittel liefert das Bilden von Kehrwerten nichts Neues:

$$\underbrace{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m}}_{n \text{ Faktoren}} = \frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n} \implies m=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}.$$

Geometrische Interpretationen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels von zwei Zahlen

Sind zwei Zahlen a und b positiv, dann können sie als Längen von Strecken interpretiert werden, und damit dann auch die Mittelwerte $\mathcal{A}(a,b) = \frac{a+b}{2}$, $\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{ab}$ und $\mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$.

<u>1. Art:</u> Über der Strecke AB der Länge $a+b$ wird ein Halbkreis mit Mittelpunkt M gezeichnet. Der Punkt C auf $\overline{AB}$ ist so gewählt, dass $AC = a$ und $CB = b$ gilt. Durch C wird die Senkrechte zu $\overline{AB}$ errichtet; diese schneidet den Halbkreis im Punkt D. Von C aus wird die Senkrechte $\overline{CE}$ zu $\overline{MD}$ errichtet.



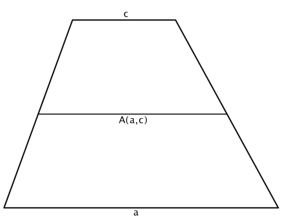
$$\text{Dann gilt:} \quad \begin{aligned} \overline{MD} &= \mathcal{A}(a,b) = \frac{a+b}{2} \\ \overline{CD} &= \mathcal{G}(a,b) = \sqrt{ab} \\ \overline{DE} &= \mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

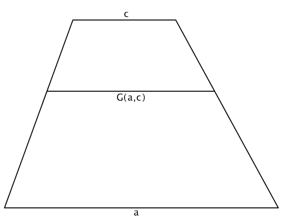
<u>Beweis:</u>
Arithmetisches Mittel: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \frac{a+b}{2}$ (= Radius der Halbkreises).

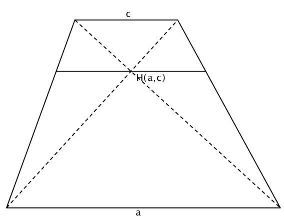
Geometrisches Mittel: Das ist der Höhensatz: Die Dreiecke ACD und DCB sind ähnlich, also gilt $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$ und somit $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB}$, resp. $\overline{CD}^2 = ab$ oder $\overline{CD} = \sqrt{ab}$.

Harmonisches Mittel: Die Dreiecke MCD und CED sind ähnlich, also gilt
$\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MD}}$ resp. $\overline{DE} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{MD}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$. □

<u>2. Art:</u> Die drei oben beschriebenen Mittelwerte können auch in einem Trapez dargestellt werden. Dazu wird das Trapez mit einer Strecke parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes in zwei Teiltrapeze geteilt.







Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die beiden Teiltrapeze gleich hoch sind, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem arithmetischen Mittel von a und c .

Beweis: Das ist eine wohlbekannte Tatsache für die Mittelparallele eines Trapezes.

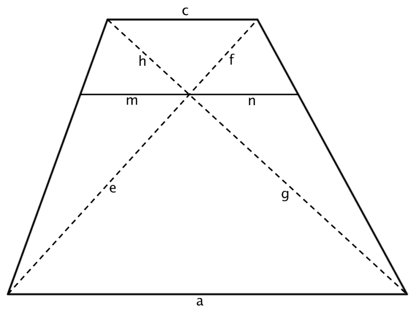
Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die beiden Teiltrapeze ähnlich sind, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem geometrischen Mittel von a und c .

Beweis: Sind die beiden Trapeze ähnlich, dann muss $\frac{a}{\mathcal{G}(a,c)} = \frac{\mathcal{G}(a,c)}{c}$ gelten, also

$$\mathcal{G}\left(a,c\right) = \sqrt{ac}$$

Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die "Mittellinie" durch den Diagonalenschnittpunkt geht, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem harmonischen Mittel von a und c .

Beweis: Mit den nachfolgenden Bezeichnungen und den Strahlensätzen gilt:



$$\frac{c}{m} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e} = 1 + \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c}{n} = \frac{g+h}{g} = 1 + \frac{h}{g} = 1 + \frac{c}{a}$$

Also ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{n}$ und folglich $m = n$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{c}{m} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} \quad \Longrightarrow \quad ac = m(a+c) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{ac}{a+c}$$

Die gesuchte Länge hängt also nur von a und c ab und beträgt

$$m + n = \frac{2ac}{a+c} = \mathcal{H}\left(a,c\right) \qquad \square$$

Bemerkung: Das arithmetische Mittel ist unter anderem wichtig in der Statistik (Mittelwert), das geometrische zum Beispiel beim Höhensatz. Auch das harmonische Mittel taucht in erstaunlich vielen Kontexten auf (siehe [3]).

3 Zahlenfolgen

Wie in der Einleitung erwähnt, besteht zwischen den oben beschriebenen Mittelwerten und gewissen Zahlenfolgen ein naheliegender Zusammenhang.

3.1 Definition von Zahlenfolgen durch Mittelwerte

Definition: Eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ heisst

$$\begin{aligned}
&\text{arithmetisch, wenn} \quad && a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \ \text{ gilt für } n \geq 2 \\
&\text{geometrisch, wenn} \quad && a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \ \text{ gilt für } n \geq 2 \\
&\text{harmonisch, wenn} \quad && a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}} \ \text{ gilt für } n \geq 2
\end{aligned}$$

Bei einer arithmetischen, geometrischen resp. harmonischen Folge ist also jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische, geometrische resp. harmonische Mittel seiner Nachbarglieder.

Auflösen der obigen Formeln nach a_{n+1} liefert zuerst rekursive Beschreibungen dieser Folgen. Daraus lassen sich schliesslich auch explizite Beschreibungen ableiten.

Folge	rekursive Beschreibung	explizite Beschreibung
arithmetisch	$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) = (n-1)a_2 - (n -$
geometrisch	$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$	$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1} = \frac{a_2^{n-1}}{a_1^{n-2}}$
harmonisch	$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_n}{2a_{n-1}-a_n}$	$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1}+(n-1)\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)} = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1-(n-2)a_2}$

a_1 und a_2 sind jeweils vorzugeben.

Bemerkungen:

1. Setzen wir bei der arithmetischen Folge $a_2 - a_1 = d$ und bei der geometrischen Folge $\frac{a_2}{a_1} = q$, so erhalten wir die wohlbekannten expliziten Beschreibungen $a_n = a_1 + (n-1)d$ resp. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

2. Zur expliziten Beschreibung der harmonischen Zahlenfolge: Für $n = 1$ und für $n = 2$ liefert die angegebene Formel $a_n = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1-(n-2)a_2}$ gerade a_1 resp. a_2.

   Eine ziemlich aufwändige Rechnung zeigt ferner, dass $a_n = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1-(n-2)a_2}$ gleich dem harmonischen Mittel von $a_{n-1} = \frac{a_1a_2}{(n-2)a_1-(n-3)a_2}$ und $a_{n+1} = \frac{a_1a_2}{na_1-(n-1)a_2}$ ist.

3. Bei einer harmonischen Zahlenfolge sind a_1 und a_2 so vorzugeben, dass der Nenner des Bruches $\frac{a_1a_2}{(n-1)a_1-(n-2)a_2}$ nicht gleich Null wird:

$$\begin{aligned}
(n-1)a_1 - (n-2)a_2 &\neq 0 \\
2a_2 - a_1 &\neq n(a_2 - a_1) \\
\frac{2a_2 - a_1}{a_2 - a_1} &\neq n
\end{aligned}$$

Die Anfangsglieder a_1 und a_2 sind also so vorzugeben, dass der Bruch $\frac{2a_2-a_1}{a_2-a_1}$ keine natürliche Zahl ist.

4. Die Verwandtschaft von arithmetischem und harmonischem Mittel überträgt sich auch auf die Zahlenfolgen:

   Eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ mit $a_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots$ ist genau dann harmonisch, wenn die Folge der Kehrwerte $\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots$ arithmetisch ist.

   Beweis:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)} \iff \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)$$

   Rechts steht die explizite Beschreibung einer arithmetischen Folge mit den Anfangsgliedern $\frac{1}{a_1}$ und $\frac{1}{a_2}$. □

3.2 Beispiele harmonischer Folgen

Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen werden in vielen Schulbüchern ausführlich behandelt; harmonische eher selten. Deshalb betrachten wir drei Beispiele.

Beispiel 1: Das berühmteste Beispiel einer harmonischen Folge ist $a_n = \frac{1}{n}$, also $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots$

In der allgemeinen Formel der expliziten Darstellung einer harmonischen Folge setzen wir $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{2}$ und bekommen

$$a_n = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{(n-1) \cdot 1 - (n-2) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2(n-1) - (n-2)} = \frac{1}{2n - 2 - n + 2} = \frac{1}{n}$$

Das harmonische Mittel von $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{n+1}$ ist tatsächlich

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{1}{n}$$

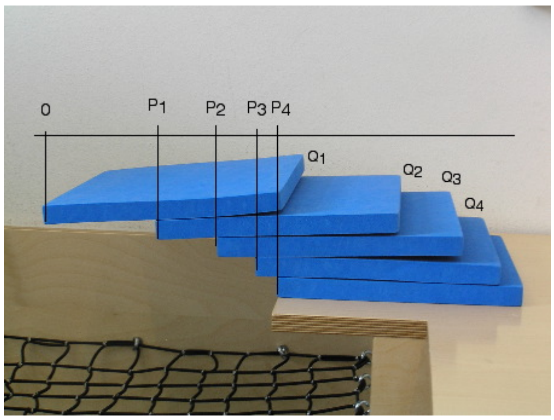
Beispiel 2: Perspektivisches Sehen

Behauptung: Die Längen der Bäume resp. der Holzschwellen bei den Geleisen bilden bei perspektivischer Abbildung eine harmonische Folge.

Begründung: Betrachte drei aufeinander folgende Bäume und das von ihnen aufgespannte Trapez.

Die Länge jeden Baumes (mit Ausnahme des ersten) ist gleich dem harmonischen Mittel der Längen der Nachbarbäume (siehe am Ende von Abschnitt 2.2).

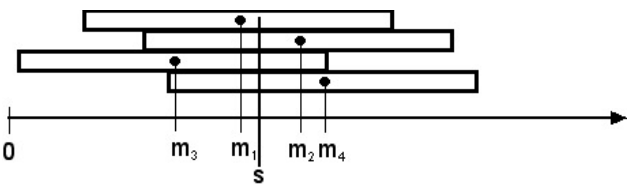
Beispiel 3: Die "Brücke"



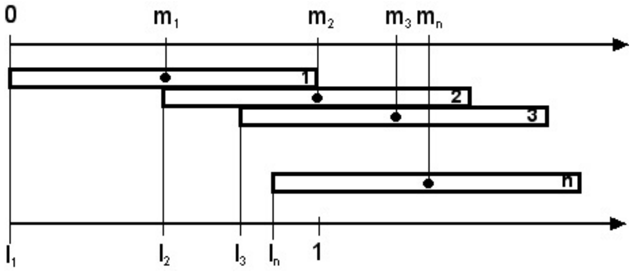
Die (kongruenten) Quader $Q_1,\ \ Q_2,\ \ Q_3,\ \ Q4,\ \ \ldots, Q_n$ sind so angeordnet, dass sie gerade nicht herunterfallen.

Behauptung: Die Strecken $OP_1,\ \ P_1P_2,\ \ P_2P_3,\ \ P_3P_4,\ \ \ldots$ bilden eine harmonische Zahlenfolge. (Wir nehmen an, dass theoretisch unendlich viele Quader aufgestapelt sind.)

Begründung: Zuerst etwas Physik: Sind homogene Quader zu einem Stapel aufgeschichtet, dann ist die x-Koordinate des Schwerpunktes des Stapels gleich dem arithmetischen Mittel der x-Koordinaten der Schwerpunkte (=Mittelpunkte) $m_1,\ \ m_2,\ \ \ldots, m_n$ der einzelnen Quader.



Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Länge der Quader gleich 1 ist.



Die Quader seien aufgestapelt wie in der obigen Zeichnung: l_i ist der linke Rand, m_i der Schwerpunkt des i-ten Quaders. Folglich ist $l_i = m_i + \frac{1}{2}$. Wir wählen den Zahlenstrahl so, dass $l_1 = 0$ und damit $m_1 = \frac{1}{2}$ ist.

Damit der Stapel nicht herunterfällt, muss sich der linke Rand des $(i+1)$-ten Quaders beim Schwerpunkt des Stapels der ersten i Quader befinden, also ist

$$l_{i+1} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{i} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots l_i}{i} + \frac{1}{2}$$

(Da $l_i = m_i + \frac{1}{2}$ für jeden einzelnen Quader gilt, gilt die entsprechende Gleichung auch für den ganzen Stapel.)

Behauptung: Es ist $l_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdot + \frac{1}{2(i-1)}$ mit $i = 2,\ 3,\ 4, \ldots$.

Begründung: Mit vollständiger Induktion: Für $i = 2$ stimmt die Behauptung: $l_2 = \frac{l_1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Die Behauptung stimme für $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ i$. Dann wird

$$\begin{aligned}
\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_i}{i} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{i}\left[0 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(i-1)}\right)\right] + \\
&= \frac{1}{i}\left[(i-1)\frac{1}{2} + (i-2)\frac{1}{4} + \cdots + (i-(i-1))\frac{1}{2(i-1)}\right] + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{i}\left[\frac{i}{2} + \frac{i}{4} + \cdots + \frac{i}{2(i-1)} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{i-1}{2(i-1)}\right] + \frac{1}{2} \\
&= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(i-1)}\right] - \frac{1}{i} \cdot \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(i-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(i-1)} + \frac{1}{2i} = l_{i+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

Die Strecken $OP_1,\ P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ \ldots$ (siehe Bild auf Seite 7) bilden tatsächlich eine harmonische Zahlenfolge, nämlich $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}, \ldots$.

4 Verallgemeinerter Mittelwert und verallgemeinerte Zahlenfolge

Die oben beschriebenen Mittelwerte lassen sich zu einem allgemeinen Mittelwert zusammengefassen. (siehe z.B. [1])

Definition: Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass m_1 das arithmetische und m_{-1} das harmonische Mittel von a und b ist.

Der Fall $r = 0$ ist besonders interessant: Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital kann man zeigen, dass m_0 das geometrische Mittel ist! (Siehe [2] oder [4]).

Gleich wie im Abschnitt 3.1 können wir mit dem allgemeinen Mittelwert Zahlenfolgen definieren. Jedes Folgeglied soll gleich dem verallgemeinerten Mittelwert seiner Nachbarglieder sein:

$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}^r + a_{n+1}^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

a_n hängt jetzt von r ab, aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir aber auf eine Anpassung der Notation.

Auflösen der Gleichung nach a_{n+1} liefert die rekursive Beschreibung $a_{n+1} = \left(2a_n^r - a_{n-1}^r\right)^{\frac{1}{r}}$ Daraus lässt sich ebenfalls eine explizite Darstellung gewinnen:

$$a_n = \left[(n-1)a_2^r - (n-2)a_1^r\right]^{\frac{1}{r}} = \left[2a_1^r - a_2^r + n\left(a_2^r - a_1^r\right)\right]^{\frac{1}{r}}$$

Ausgehend von zwei Anfangsgliedern a_1 und a_2 liefert diese Formel im Prinzip für jede reelle Zahl eine Zahlenfolge: Für $r = 1$ eine arithmetische, für $r = -1$ eine harmonische und für $r = 0$ eine geometrische. Diese Folge(n) und eine daraus abgeleitete "ziemlich" allgemeine Funktion ist in [2] genauer beschrieben.

Der Autor dieses Artikels führt in seinem Mathematikunterricht am Gymnasium Zahlenfolgen wie oben beschrieben ein und thematisiert vor allem harmonische Zahlenfolgen und das harmonische Mittel.

Literatur

[1] Hardy G. , J.E. Littlewood J.E., Polyá G., Inequalities, Second edition, Cambridge Mathematical Library, 1952

[2] Jaggi Beat, *Über eine ziemlich allgemeine Zahlenfolge und eine ziemlich allgemeine Funktion*, Bulletin der Schweizerischen Mathematik- und Physiklehrkräfte, Juni 2012

[3] Jaggi Beat, *Plädoyer für das harmonische Mittel*, Bulletin der Schweizerischen Mathematik- und Physiklehrkräfte, Januar 2013

[4] Von Mangold und Knopp, *Höhere Mathematik 1*, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1990