Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ...

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

In seinem Artikel [2] im Juni-Heft des VSMP-Bulletins des Jahres 2012 beschreibt der Autor Martin Lieberherr warum er dazu gekommen ist, die sogenannte Duffing-Gleichung zu untersuchen: Er war mit seinem kleinen Sohn auf einem Kinderspielplatz und dem Buben bereitete es Vergnügen mit einem 'Flugsimulator' zu 'fliegen', Abbildung 1. Der 'Flugsimulator' für Kinder besteht im wesentlichen aus einer grossen, starken Feder, die senkrecht montiert und oben mit einem Sitz versehen ist. Darauf hatte der Junge Platz genommen und man kann sich gut vorstellen, dass er – mit Papas Hilfe oder gar ganz allein – eine vertikale Auf- und Abwärtsbewegung zustande brachte: und schon erlebte er einen Hauch von Fliegen!

Abbildung 1: 'Flugsimulator' für Kinder

Die *Duffing-Gleichung* ist eine (gewöhnliche) Differenzialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \alpha x(t) - \gamma x(t)^3 = k\cos(\Omega t) \tag{1}$$

Sie ist benannt nach dem deutschen Ingenieur *Georg Duffing* (1861-1944), der sich mit ihr sowohl experimentell als auch theoretisch auseinandersetzte, siehe [1]. Die Gleichung hat folgende *mechanische Deutung*: x bezeichnet die Auslenkung eines sich entlang einer Geraden bewegenden Massenpunkts, bezogen auf einen Nullpunkt O. Auf den Massenpunkt wirken drei *Kräfte* (pro Masseneinheit):

- die von der Auslenkung abhängige *Rückstellkraft*

$$-\left(\alpha x - \gamma x^3\right)$$

  hervorgerufen zum Beispiel durch eine Feder

- die von der Geschwindigkeit $v := \dot{x}$ abhängige *Reibungs-* oder *Dämpfungskraft*

$$-\,2\delta\dot{x}$$

- eine periodisch einwirkende *Anregungskraft*

$$k\cos(\Omega t)$$

  mit der Periode

$$\frac{2\pi}{\Omega}$$

Newtons *Grundgesetz der Mechanik*[1] liefert umgehend die Differenzialgleichung (1).

In der Community derjenigen, die sich mit Differenzialgleichungen und Dynamischen Systemen befassen, ist die Duffing-Gleichung bestens bekannt – weil viel zitiert und intensiv studiert! Sie gehört in die Kategorie der (mathematischen) *Juwelen.* Ein Juwel ist in diesem Zusammenhang ein Problem, das schwierig, ja sehr schwierig, aber nicht hoffnungslos schwierig ist, sondern so, dass sich an ihm mit (hartnäckiger) Arbeit neue *Ideen* entwickeln, neue *Einsichten* gewinnen lassen.

2

Ist die Duffing-Gleichung das plausibelste Modell für die Bewegung, die Lieberherrs Sohn mit seinem 'Flugsimulator' ausführte?

Durch die Feder ist beim 'Flugsimulator' eine rücktreibende Kraft im Spiel (linear oder nicht). Ferner die Schwerkraft, weil die Feder vertikal montiert ist. Und (viel) Reibung. Wenn der Bub einfach ruhig sitzen würde, würde sein 'Flugzeug' bald stillstehen: Das System würde bald im Gleichgewicht verharren, das eintritt, wenn sich die einwirkenden Kräfte gegenseitig kompensieren.

Aber der Bub sitzt nicht einfach still. Er bewegt sich, führt dem System (vielleicht von Papa unterstützt) Energie zu. Aber wie? Nach einem bestimmtem Rythmus, einem festen Fahrplan (wie der Term $k\cos(\Omega t)$ bei der Duffing-Gleichung)? Ich glaube eher nicht.

Ich meine, dass die Bewegung, die beim kindlichen 'Flugsimulator' zustandekommt, anders erklärt werden kann: mit dem Mechanismus, der zu sogenannten

selbsterregten Schwingungen

führt. Bei diesem Mechanismus wird die Energiezufuhr durch den *Systemzustand* geregelt.

Ich möchte das Phänomen selbsterregter Schwingungen anhand der *Kinderschaukel* erklären. Der Ausgangspunkt zur Entwicklung eines Modells ist natürlich das (mathematische) Pendel: An einer um einen Aufhängepunkt in einer Ebene drehbaren, masselosen Stange ist am freien Ende eine Masse angebracht. Lenkt man das Pendel aus und lässt es los, beginnt es zu schwingen – hin und her: von rechts nach links und zurück, von rechts nach links und zurück, usw.

Idealisiert man zunächst und stellt sich vor, dass man den Versuch im Paradies macht, wo keinerlei Reibung wirkt, dann wiederholt sich der immergleiche Vorgang ad infinitum (damit ist im Paradies freilich die Zeit erfunden ...). Richten Sie Ihr Augenmerk nun bitte auf die (Momentan-)Geschwindigkeit v mit

[1] Masse m mal Beschleunigung a gleich einwirkende (Gesamt-)Kraft F: $m\,a = F$.

der das Pendel von rechts nach links durch die vertikale Lage (also seine "untere" Gleichgewichtslage) schwingt. Bei reibungsfreier Bewegung bleibt diese Geschwindigkeit immer gleich gross.

Wenn man die Geschwindgkeit bei jedem Durchgang (einfachheitshalber nur, wenn das Pendel von rechts nach links schwingt) protokolliert, lautet das Protokoll

$$v, \quad v, \quad v, \quad v, \quad v, \; ... \tag{2}$$

Denkt man sich das Experiment aus dem Paradies in unsere Welt geholt, in der Reibung durch allerhand Massnahmen (Kugellager im Aufhängepunkt, Durchführung im Vakuum ...) zwar reduziert werden kann aber nicht vollständig vermeidbar ist, wird die Bewegung des schwingenden Pendels gebremst: die Geschwindigkeit beim Durchgang von rechts nach links durch die vertikale Lage nimmt von Durchgang zu Durchgang ab.

Man kann das Phänomen der Reibung modellieren, indem man etwa annimmt, dass die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die vertikale Lage jeweils um einen gewissen konstanten Prozentsatz reduziert ist, im Vergleich zum Durchgang zuvor. Anstelle von (2) tritt dann das folgende Protokoll

$$v_0 := v, \; v_1 := \lambda v_0, \; v_2 := \lambda v_1, \; v_3 := \lambda v_2, \; ... \tag{3}$$

Dabei bezeichnet λ eine Zahl zwischen 0 und 1. Die Geschwindigkeit des Pendels wird also bei diesem Reibungsmodell bei jedem Durchgang von rechts nach links durch die vertikale Lage um

$$(1-\lambda)\cdot 100\,\%$$

reduziert[a].

Aus (3) folgt

$$v_n = \lambda^n\, v \quad \text{für } n = 0,\, 1,\, 2,\, ... \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die vertikale Lage nimmt demzufolge wie eine *geometrische Folge* ab. Je nach dem Wert von λ steht das Pendel früher oder später defacto still – die Uhr aus dem Paradies tickt in dieser unserer Welt nicht ewig ...

Zurück zur Kinderschaukel. Solange das Kind noch ganz klein ist, kann es die Bewegung der Schaukel nicht selber aufrecht erhalten. Papa oder Mama müssen helfen. Wie? Immer wenn die Schaukel durch den *tiefsten Punkt* geht, geben sie ihr einen "Schubs"!

Ich schlage vor, diese Unterstützung von Mami oder Papi wie folgt zu modellieren. Immer wenn das Pendel von rechts nach links *durch die untere Gleichgewichtslage* geht, wird dem Pendel ein "Kick" nach links erteilt, der die *Geschwindigkeit* des Pendels um einen bestimmten *festen Betrag*, den ich mit Δ bezeichne, *erhöht*. Das bedeutet, dass das Protokoll (3) durch folgendes ersetzt wird:

$$v_0 := v, \; v_1 := \lambda v_0 + \Delta, \; v_2 := \lambda v_1 + \Delta, \; ... \tag{5}$$

Es ist nicht schwer v_1, v_2, v_3 ... mit Hilfe von v, λ und Δ auszudrücken:

$$\begin{array}{rcl} v_1 &=& \lambda v + \Delta \\ v_2 &=& \lambda v_1 + \Delta = \lambda(\lambda v + \Delta) + \Delta = \\ &=& \lambda^2\, v + (1+\lambda)\Delta \\ v_3 &=& \lambda v_2 + \Delta = \lambda^3\, v + (1+\lambda+\lambda^2)\Delta \\ ... &=& ... \\ v_n &=& \lambda^n\, v + (1+\lambda+\lambda^2+...+\lambda^{n-1})\Delta = \\ &=& \lambda^n\, v + \dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\,\Delta \end{array} \tag{6}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Summenformel für geometrische Reihen benutzt.

Was lernen wir aus dem Resultat (6)?

Zunächst einmal, dass

$$v_n \quad \longrightarrow \quad v_\infty := \frac{1}{1-\lambda}\,\Delta \;\text{ für }\; n \to \infty \tag{7}$$

gilt (denn λ ist ja eine Zahl zwischen 0 und 1). Das heisst: Die Geschwindigkeit beim Durchgang des Pendels von rechts nach links durch die vertikale Lage strebt im Laufe der Zeit gegen den Wert v_∞. Und diese Geschwindigkeit hängt von λ ab, und von Δ, aber *nicht* von der Geschwindigkeit $v_0 = v$ beim allerersten Durchgang.

Wie entwickelt sich die Bewegung, wenn die Geschwindigkeit schon im ersten Durchgang durch die vertikale Gleichgewichtslage den Wert v_∞ hat? Aus der ersten Gleichung (6) folgt mit der Wahl

$$v = v_\infty := \frac{1}{1-\lambda}\,\Delta$$

nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v + \Delta = \lambda v_\infty + \Delta = \lambda\,\frac{1}{1-\lambda}\,\Delta + \Delta \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\,\Delta = v_\infty \end{aligned}$$

Folglich liefert der "Startwert" $v = v_\infty$ das Protokoll

$$v = v_\infty = \frac{1}{1-\lambda}\,\Delta v,\; v_1 = v_\infty,\; v_2 = v_\infty,\; \dots \tag{8}$$

Durch (8) wird *periodisches Verhalten beschrieben*: Das Pendel führt immer die genau gleiche Bewegung aus. Und (7) bedeutet, dass sich die Pendelbewegung der durch (8) definierten periodischen Bewegung nähert, wenn die Bewegung davon abweicht.

Im Jargon der Theorie der Dynamischen Systeme nennt man (8) einen *Fixpunkt* des durch die Abbildung

$$v_0 \quad \longrightarrow \quad \lambda v_0 + \Delta$$

definierten *diskreten dynamischen Systems*, der wegen der Eigenschaft (7) ein *globaler Attraktor* ist.

3

Betrachten wir den Vorgang selbsterregter Schwingungen allgemeiner. Im Zentrum steht eine schwingungsfähige Einheit – zum Beispiel ein Pendel, eine Feder, ... , kurz: ein *Schwinger*. Da die Schwingungen, die der Schwinger ausführt, gedämpft werden, muss die dem System dadurch "verlorengehende" Energie ersetzt werden, wenn die Schwingung nicht de facto zum Erliegen kommen soll. Es braucht eine *Energiequelle* und ein Mechanismus, der *regelt*, wann dem Schwinger *wie* und *wieviel* Energie zugeführt wird. Einen solchen Mechanismus nennt man *Regler*.

Bei selbsterregten Schwingungen ist der *Zustand* des *Systems* massgeblich, *wann* dem Schwinger Energie zugeführt wird. Beim Beispiel in Abschnitt 2 erhält das Pendel den "Kick", wenn es von rechts nach links durch die *untere Gleichgewichtslage* geht (und zwar in Richtung der Bewegung).

Die Anbindung der Energiezufuhr an den Systemzustand nennt man *Rückkopplung*. Und man spricht von einem *rückgekoppelten System*.

4

Wer einen periodischen Vorgang erzeugen kann, hat (im Prinzip) eine *Uhr* erfunden. Insofern stellt das in Abschnitt 2 beschriebene Pendel, dem jeweils beim Durchgang durch die vertikale Gleichgewichtslage von rechts nach links ein Schlag erteilt wird um die Reibung zu kompensieren, den Prototyp einer Uhr dar. Unbefriedigend am Design dieser “Uhr” ist, dass es eine Person braucht, die dem Pendel jeweils den “Kick” gibt, also die Funktion sowohl der Energiequelle als auch des Reglers übernimmt.

Es gibt jedoch sehr wohl elegantere *Realisierungen* des Konzepts aus den Abschnitten 2, 3. Ein schönes Beispiel ist der von K. Magnus in [3] beschriebene “Kippschwinger”, siehe Abbildung 2. Es fliesst ständig Wasser mit konstanter Rate (vertikaler Pfeil). Solange das Gefäss des Kippschwingers nur wenig Wasser enthält sorgt das Gegengewicht (in der Abbildung als schwarze Kugel markiert) dafür, dass der Kippschwinger nahezu vertikal steht und Wasser ins Gefäss einfliessen kann.

Wenn der Wasserstand im Gefäss ein gewisses Niveau erreicht hat, reicht das Gegengewicht nicht mehr aus, um die “Hantel” in der (fast) vertikalen Position zu halten, sie kippt – sie geht in die in Abbildung 2 gestrichelt gezeichnete Position über. In dieser neuen Position fliesst das Wasser aus dem Gefäss aus (schräger Pfeil), bis das Gegengewicht den Kippschwinger in die alte Position zurückdreht, in der wieder Wasser ins Gefäss einfliesst. Dieser Vorgang wiederholt sich ad infinitum. Der Kippschwinger ist (im Prinzip) eine Uhr.

Der Kippschwinger ist verwandt mit einem Spielzeug, das unter der Bezeichnung “*Trinkvogel*” in der Literatur verbreitet ist. Dazu die Website:

http://de.wikipedia.org/wiki/Trinkvogel

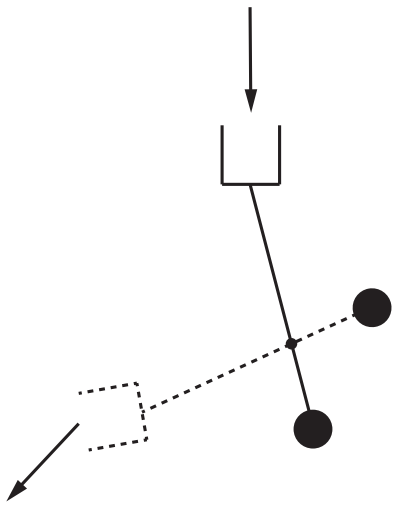

Abbildung 2: Kippschwinger, nach K. Magnus: *Schwingungen - Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 3, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1961, Kapitel 3: *Selbsterregte Schwingungen*, Abbildung 84, p. 91, mit freundlicher Genehmigung durch Springer Science+Business Media.

Anschauliches Beispiel für eine reale Uhr ist Grossmamis prächtige Pendeluhr. Wenn man hinter das Zifferblatt schaut, zeigt sich der (geniale) Mechanismus! Die Kernidee besteht darin, eine Pendelbewegung mit einer Drehbewegung zu koppeln, siehe Abbildung 3. Ein Zahnrad dreht sich, weil es zum Beispiel durch eine Schnur mit einem Gewicht verbunden ist: Die Schnur ist um den Schaft des Zahnrads gewickelt und am Schaft befestigt und wickelt sich ab, wenn sich das Zahnrad dreht.

Der Drehpunkt des Pendels ist zugleich der Mittelpunkt des sogenannten Ankers, der fest mit der Pendelstange verbunden ist. Er koppelt Pendel- und Drehbewegung und hat eine doppelte Funktion: 1) Indem er je nach Auslenkung des Pendels immer wieder zwischen die Zähne des Zahnrads greift, regelt er dessen Drehbewegung und sorgt dafür, dass sich das Zahnrad nicht einfach dreht und die Schnur sich in Nullkommanichts abwickelt, sondern nur schrittweise. 2) Via Zähne des Zahnrads übt das Gewicht Druck auf den Anker aus und wirkt so auf die Pendelbewegung. Es sorgt damit für die Kompensation von Energieverlusten durch Reibung. Die Energiezufuhr wird also vom Gewicht durch Abbau von potentieller Energie geliefert. Es entsteht eine selbsterregte Schwingung.

Der folgende Link führt zu einer Animation, die das Zusammenspiel von Pendel- und Drehbewegung schön illustriert:

http://commons.wikimedia.org/wiki/ File:Scappamento.gif?uselang=de

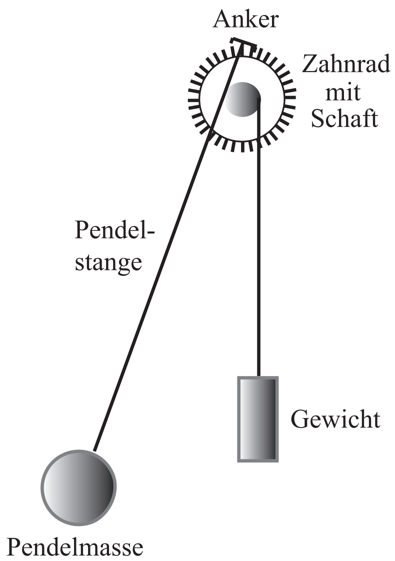

Abbildung 3: Grossmamis Pendeluhr – Das Prinzip. Ein Gewicht ist via eine Schnur, die um den Schaft eines Zahnrads gewickelt ist, fest mit dem Zahnrad verbunden. Ein Anker, der an einem Pendel befestigt ist, koppelt die Drehbewegung des Zahnrads mit der Bewegung des Pendels und sorgt dafür, dass die Schnur nur in kleinen Portionen, die durch den Gang des Pendels bestimmt werden, abgewickelt wird. Umgekehrt wirkt das Gewicht via Zahnradzähne auf den Anker und damit auf die Pendelbewegung und sorgt so für die Kompensation von Reibungsverlusten.

5

Kehren wir einen Moment zur *Kinderschaukel* zurück, siehe Abschnitt 2. Grössere Kinder sind nicht darauf angewiesen, dass Vater oder Mutter mithelfen die Schwingung aufrecht zu erhalten: Sie können ihr durch geeignete Körperbewegungen, zum Beispiel durch passendes Beugen und Strecken der Wadenbeine, selber Energie zuführen, und so die Bewegung aufrecht erhalten. In [3], p. 131, wird dieser Vorgang modelliert und das Modell analysiert.

Auch beim ‘Flugsimulator’, siehe Abschnitt 2, werden die Kinder versuchen die Schwingung durch geeignete Körperbewegung selber aufrecht zu erhalten.

6

Im nächsten Teil dieser kleinen Artikelreihe wird es noch einmal um selbsterregte Schwingungen gehen, dann um Differenzialgleichungsmodelle. Ein weiteres Juwel aus der Sammlung "schöner Probleme" in der Theorie der Differenzialgleichungen und Dynamischen Systeme ist nämlich die sogenante *van der Pol*-Gleichung. Sie ist benannt nach dem holländischen Physiker und Elektroingenieur *Balthasar van der Pol* (1889-1959), der sie 1927 zur Modellierung eines elektrischen Schwingkreises, in den eine *Elektronenröhre* eingebaut ist, einführte. Die Gleichung lautet:

$$\ddot{x}(t) - \epsilon[1 - x(t)^2]\dot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{9}$$

(9) ist wie die Duffing-Gleichung eine Differenzialgleichung 2. Ordnung, aber im Gegensatz zu (1) enthält sie *keinen* in der Zeit t periodischen Anregungsterm und beschreibt trotzdem einen "persistenten" Schwingungsvorgang, wie sich in der Fortsetzung dieses Artikels zeigen wird.

In einer weiteren Folge soll dann noch etwas zur Gleichung (1) von Duffing gesagt werden.

7

Der Autor dankt N. Hungerbühler, M. Lieberherr, W. Schiehlen (Stuttgart) und D. Stoffer herzlich für wertvolle Bemerkungen, die er gerne eingearbeitet hat, M. Lieberherr für die Erlaubnis, Abbildung 1 wiedergeben zu dürfen, und A. Nüesch für seine Hilfe bei der Beschaffung der Erlaubnis zur Publikation von Abbildung 2.

Notes

[a]Diese Annahme kann man leicht durch ein Differenzialgleichungsmodell stützen. Die Differenziagleichung des Pendels mit linearer Dämpfung lautet:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{g}{\ell}\sin x = 0$$

Dabei bezeichnet x die Auslenkung des Pendels gegenüber der Vertikalen, ℓ die Länge der Pendelstange, g die Erdbeschleunigung. Wählt man die Einheiten so, dass $g/\ell = 1$ gilt und ersetzt $\sin x$ für geringe Pendelauslenkungen durch x, lautet die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + x = 0$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -v_0$ ist

$$x(t) = -\frac{1}{\omega}e^{-\delta\,t}\,\sin(\omega\,t)\,v_0, \quad \omega = \sqrt{1-\delta^2}$$

Hieraus folgt

$$\dot{x}(0) = -v_0, \quad \dot{x}(2\,\pi/\omega) = e^{-\delta\frac{2\,\pi}{\omega}}(-v_0)$$

Dieses Modell liefert also $\lambda = e^{-\delta\frac{2\,\pi}{\omega}}$.

Literatur

[1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
[2] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.
[3] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976[3].

UK/20150313