Empilement de cercles (I)

Shaula Fiorelli Vilmart, Université de Genève, shaula.fiorelli@unige.ch

Résumé : La *conjecture de Kepler* [1] est une hypothèse relative à la densité maximale occupée par certains objets, comme par exemple un arrangement de disques de même diamètre dans un plan. Il a fallu plus de trois siècles à la communauté mathématique pour mener des recherches, apparemment sans lien entre elles et qui pourtant ont conduit à une démonstration irréfutable de cette affirmation.

Introduction

Comment ranger de manière optimale des bocaux dans un placard ? Si vous posez cette question à un scientifique, il vous bombardera de questions : Qu'entend-on par optimal ? Est-ce qu'on tient compte du bord du placard ? Est-ce qu'on peut empiler les bocaux ? Est-ce que tous les bocaux ont le même diamètre ? … Précisons donc la question : comment arranger de manière la plus dense possible (et sans les empiler) des bocaux de même diamètre sur une étagère, sans tenir compte des bords du placard ? Comme on ne spécifie pas la hauteur des bocaux ni la dimension de l'étagère, un mathématicien réduira la question à son essence même, à savoir : **comment arranger des cercles dans le plan de la manière la plus dense possible.**
Pratiquement, quelques essais avec des bocaux de confiture ou des pièces de monnaie permettent de se convaincre qu'un arrangement possible consiste à placer les centres des cercles sur des sommets d'hexagones réguliers (Figure 1). **Quelle est la densité d'un tel arrangement ?** La densité est définie comme le rapport entre la surface couverte par les cercles et la surface totale. Or, si on considère un arrangement de cercles dans tout le plan, on a une infinité de cercles disposés sur une surface infinie ; pas évident de faire un tel calcul ! Ce qui rend possible le calcul de densité est le fait que l'arrangement est régulier, autrement dit quel que soit le cercle que vous choisissez, les cercles qui le touchent ont leur centre sur les sommets d'un hexagone régulier. On peut ainsi regarder seulement une partie du plan, par exemple l'hexagone défini par les centres des cercles autour d'un cercle donné. Comme les hexagones pavent le plan et que l'arrangement est régulier, on aura la même densité à l'intérieur de chaque hexagone et donc sur tout le plan.

Calcul de la densité de l'arrangement hexagonal

- Commençons par calculer la surface totale. Un hexagone régulier est formé de 6 triangles équilatéraux dont les sommets sont deux sommets consécutifs de l'hexagone et le point O milieu de l'hexagone (Figure 1). Si on note r le rayon des cercles, le côté de l'hexagone et celui du triangle, mesurent $2r$. La hauteur h du triangle est donnée par le théorème de Pythagore : $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$, car r est positif.
  Ainsi, l'aire de l'hexagone est donnée par :

$$A_{Hexagone} = 6A_{\Delta} = 6 \cdot \frac{2r \cdot \sqrt{3}r}{2} = 6\sqrt{3}r^2$$

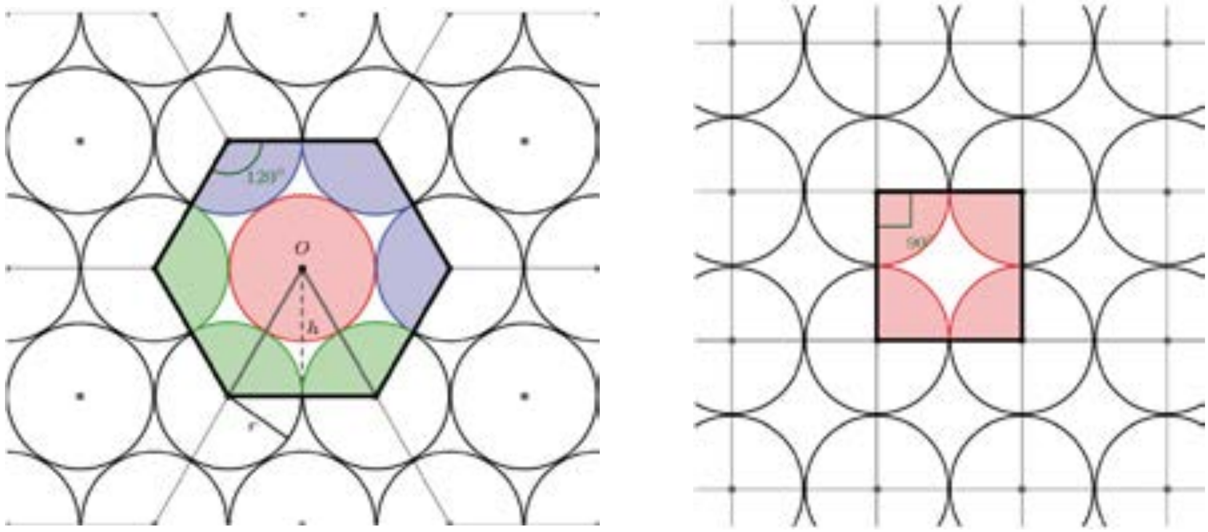

Figure 1 – L'arrangement hexagonal et l'arrangement carré

- Calcul de l'aire couverte par les cercles. A l'intérieur d'un hexagone régulier prennent place 3 cercles (1 cercle complet plus 6 secteurs d'angle 120°). Ainsi :
  $A_{couverte} = 3 \cdot A_{\circ} = 3 \cdot \pi r^2$

- Finalement, la densité *D* est donnée par : $D = \frac{A_{couverte}}{A_{Hexagone}} = \frac{3 \cdot \pi r^2}{6\sqrt{3}r^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \cong 90{,}7\%$

- A titre de comparaison, la densité *D'* de l'arrangement carré vaut :
  $D' = \frac{A_{couverte}}{A_{Carré}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \cong 76{,}53\%$

Avec une autre configuration, pourrait-on faire mieux ? Si vous deviez démontrer que votre arrangement est le meilleur arrangement possible, comment feriez-vous ? Par ailleurs, existe-t-il un arrangement non régulier qui pourrait être plus dense ?

L'origine du problème

En 1611, Johannes Kepler, célèbre pour ses trois lois sur le mouvement des corps célestes, décide de faire un cadeau de Noël à son ami et protecteur le Baron Wacker von Wackerfelds. Il lui écrit un petit livre intitulé *Strena, seu De nive sexangula*, dont la traduction en français est *L'étrenne ou la neige sexangulaire*. Comme le titre l'indique, Kepler se demande pourquoi les flocons de neige sont de forme hexagonale. Avant de tenter de répondre à ce problème, il s'intéresse à trois autres questions. Pourquoi les nids d'abeilles sont-ils de forme hexagonale ? Pourquoi les graines de grenades sont-elles en forme de dodécaèdres (non réguliers) ? Pourquoi les pétales de fleurs sont très souvent regroupés par cinq ?
La question sur les graines de grenades donnera lieu à un autre grand problème mathématique fortement lié à celui qui nous intéresse, à savoir quel est l'arrangement de sphères le plus dense possible. C'est dans les réflexions de Kepler sur les flocons de neige qu'est évoquée pour la première fois de l'histoire la question des arrangements de cercles. Il imagine deux explications au sujet de la forme des flocons de neige : d'une part, les

hexagones pavent le plan ; d'autre part, l'arrangement de cercles en hexagones est l'arrangement le plus dense possible. Il ne donne cependant pas de démonstration à cette deuxième affirmation ! Seule sa première hypothèse, le fait que les hexagones pavent le plan, correspond à la réalité. En effet, la forme des flocons de neige est intimement liée à la structure cristalline de la glace qui est hexagonale [2]. Comme Kepler ne donne aucune démonstration du fait que l'arrangement en hexagones est le plus dense possible, les historiens appelleront plus tard cette affirmation la *conjecture de Kepler* en dimension 2. Lorsque la dimension n'est pas précisée, on se réfère au problème à trois dimensions, à savoir : déterminer l'arrangement de sphères le plus dense possible.

Lagrange et les formes binaires quadratiques

Faisons maintenant un bond en avant dans l'histoire. Nous sommes en 1773, année de publication des *Recherches d'arithmétiques* de Joseph-Louis Lagrange [3]. L'objet de ces *Recherches* concerne les nombres entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $Bt^2 + Ctu + Du^2$, où *B*, *C* et *D* sont des nombres entiers donnés ; *t* et *u* sont des nombres entiers indéterminés. Une telle expression est une *forme binaire quadratique*. La donnée de trois nombres entiers permet de définir une forme binaire quadratique ; il existe donc une infinité de telles formes. Lorsque deux formes quadratiques différentes permettent d'obtenir les mêmes nombres, elles sont dites *équivalentes*. Par exemple, les deux formes binaires $f(t,u) = t^2 + tu + 3u^2$ et $g(t,u) = t^2 - 3tu + 5u^2$ permettent d'obtenir les nombres suivants $0 = f(0,0) = g(0,0)$, $1 = f(1,0) = g(-1,0)$, $3 = f(-1,1) = g(-2,-1)$, $4 = f(-2,0) = g(2,0)$, $5 = f(1,1) = g(-3,-1)$, $9 = f(-3,0) = g(-4,-1)$, $11 = f(-1,2) = g(-3,-2)$, $12 = f(0,-2) = g(-2,-2)$, $15 = f(-4,1) = g(5,2)$ et une infinité d'autres. De plus, chaque nombre peut être obtenu de plusieurs manières. Par exemple $3 = f(-1,1) = f(0,-1) = f(0,1) = f(1,-1)$). Lagrange s'intéresse d'une part à reconnaître les expressions donnant les même nombres et d'autre part à trouver des représentants pour des formes binaires quadratiques fournissant les mêmes nombres. Il montre en particulier que deux formes $Bt^2 + Ctu + Du^2$ et $B't^2 + C'tu + D'u^2$ sont équivalentes si $4BD - C^2 = 4B'D' - C'^2$. Cette quantité est le *discriminant*, noté Δ, des formes quadratiques considérées. Or, parmi toutes les expressions ayant le même discriminant, on peut trouver « la plus petite », au sens où le coefficient *C* est inférieur ou égal à chacun des deux autres coefficients. Cette expression sera la *forme réduite* cherchée. Ainsi, on peut arranger toutes les formes quadratiques en des ensembles (ou *classes d'équivalences*) de formes ayant le même discriminant, et pour chaque ensemble, on a un représentant idéal qui est la forme réduite. Lagrange montre aussi que le discriminant Δ est toujours supérieur ou égal à $3B^2$ (dans notre exemple, le discriminant vaut 11 et *f* est la forme réduite).

Gauss et les réseaux

Mais quel est le lien avec nos arrangements de cercles ? Ce lien ne sera établi que 58 ans plus tard par Karl Friedrich Gauss lorsqu'il introduira la notion de réseaux en 1831 [4]. Étant donné un point d'origine et deux vecteurs non colinéaires, on définit un réseau comme l'ensemble des points à coordonnées entières engendrés par les deux vecteurs (Figure 2). La seule donnée d'une origine et de deux vecteurs permet de définir un réseau, et comme il existe une infinité de choix d'origine et de vecteurs, il existe une infinité de réseaux. De plus, pour un réseau donné, on peut choisir n'importe quel triplet de points "proches" et définir ainsi deux nouveaux vecteurs qui engendreront le même réseau. Il en découle que pour un même réseau, il existe une infinité de vecteurs de base. Un vrai casse-tête pour différencier deux réseaux !

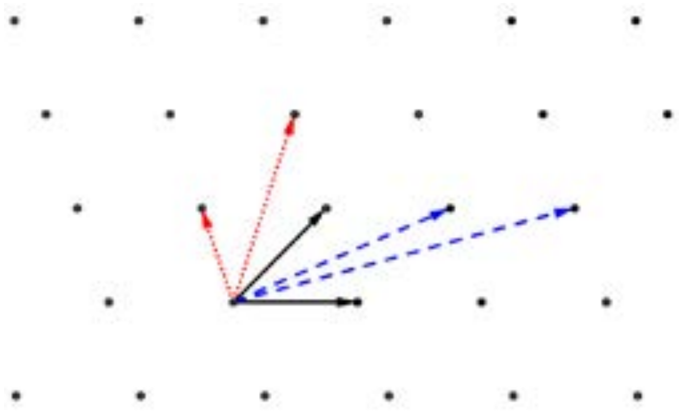

Figure 2 - Un réseau et trois couples de vecteurs qui permettent de l'engendrer

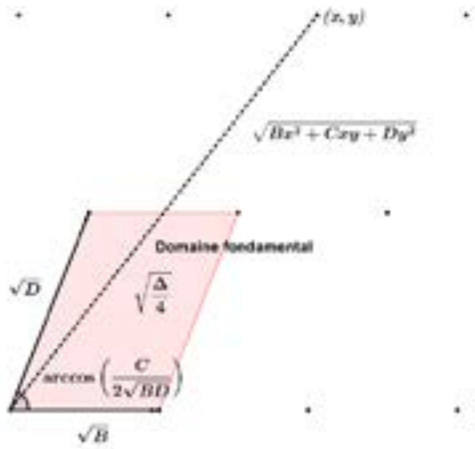

Figure 3 - Comment associer une forme binaire quadratique à un réseau

Ce que remarque Gauss est que l'on peut associer une forme binaire quadratique $Bt^2 + Ctu + Du^2$ à un réseau : les deux vecteurs de base auront une longueur respective de $\sqrt{B}$ et $\sqrt{D}$ et l'angle entre eux sera donné par $\arccos\left({C}/{2\sqrt{BD}}\right)$. De plus, l'aire du parallélogramme défini par l'origine et les deux vecteurs de base est donnée par le discriminant selon la relation $Aire = \sqrt{{\Delta}/{4}}$. Finalement (Figure 3), le carré de la distance entre l'origine et un point de coordonnées *(x,y)*, exprimées dans la base définie par les vecteurs, vaut exactement $Bx^2 + Cxy + Dy^2$ (*on a gardé ici la notation de Lagrange. Dans son article, Gauss considère des équations de la forme* $ax^2 + 2bxy + cy^2$*. Son discriminant est alors donné par* $ac - b^2$ *et l'aire d'un domaine fondamental s'exprime simplement comme* $\sqrt{\Delta}$*. Ces deux définitions sont équivalentes)*. Ainsi chaque forme binaire quadratique engendre un réseau et deux formes quadratiques équivalentes engendrent le même réseau.

Le lien entre les réseaux et nos arrangements de cercles sera présenté dans un prochain article.

Bibliographie

[1] G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, Wiley, John & Sons Inc, 2003
[2] K. G. Libbrecht, *The physics of snow crystals*, Reports on Progress in Physics, vol. 68 (14), 2005
[3] J.-L. Lagrange, *Recherches d'arithmétiques,* Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, pp. 695-795, 1773 et 1775
[4] K. F. Gauss, Besprechung des Buchs von L.A. Seeber : *Untersuchungen über die Eigenschaften der positive ternären quadratischen Formen*, Göttingsche Gelehrte Anzeugen, 1831.