POKER AKQ

MAURICE FROIDCOEUR, ANDREA PELLEGRINELLI, PHILIP HUBERT

1. Introduzione.

J.-P. Delahaye tiene la rubrica *Logique et calcul* nel mensile *Pour la Science*. Presenta temi diversi di matematica, scritti per un largo pubblico, che sovente hanno il pregio di invogliare il lettore un poco più cognito a voler capire qualcosa di più per conto proprio. Nelle mie letture di fine estate mi sono imbattuto nell'articolo intitolato *Comment jouer parfaitemente au poker* nel numero 453 della rivista (luglio 2015). Mi ha particolarmente intrigato un riquadro nell'articolo intitolato *La stratégie optimale pour le micro-poker à trois cartes (poker AKQ)*. Mi sono messo allora a fare i calcoli in dettaglio per il valore atteso, appena accennati nel testo, che ho cercato di mettere in forma leggibile.

2. Il gioco.

Due giocatori pescano ognuno una carta da un mazzo di 3, composto dall'asso (A), dal re (K) e dalla regina (Q), dopo aver messo ognuno 1 CHF nel piatto. La forza delle carte è quella consueta nel poker: A è la più forte, e Q la più debole.

Una volta pescate le carte il primo giocatore, che chiamiamo L, decide sulla base della carta che ha se ritirarsi dal gioco o se rilanciare di 1 CHF. Se si ritira, il secondo giocatore, che indichiamo con V, vince il piatto e la partita si conclude. Se invece L rilancia, tocca a V decidere sulla base della sua carta se, puntando a sua volta 1 CHF, vedere la carta di L (nel qual caso vince il piatto il giocatore che ha la carta più alta), oppure ritirarsi, lasciando il piatto al giocatore L.

3. Prime osservazioni.

Vi sono solo 6 situazioni di gioco possibili, che possiamo elencare con coppie di lettere, la prima indicante la carta pescata da L e la seconda quella presa da V:

$$AK\,,\quad AQ\,,\quad KA\,,\quad KQ\,,\quad QA\,,\quad QK\,.$$

Ci sono alcune decisioni evidenti:

- se L ha pescato A non esiterà a rilanciare;
- se V ha pescato A certamente vorrà vedere;
- se V ha pescato Q abbandonerà.

4. L pesca A.

In questo caso certamente L rilancia. Se V ha in mano Q rinuncia subito, quindi L guadagna 1 CHF, mentre se ha K deve decidere cosa fare. Se rilancia, L vince 2 CHF, mentre se non rilancia L vince 1 CHF. Supponiamo che V decida di vedere con probabilità p. Il guadagno atteso di L è quindi $2p + 1(1-p) = p + 1$.

5. L pesca K.

Qui ci si può chiedere se L debba sistematicamente rilanciare oppure se debba scegliersi una strategia probabilistica per decidere (ad esempio rilanciando in media una volta su due). Ma considerando che se non rilancia L perde comunque 1 CHF, mentre che se rilancia V vede solo quando ha in mano A, quindi con una probabilità $\frac{1}{2}$. Rilanciando, L ha quindi un valore atteso pari a $1 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, cioè una perdita media di 0,50 CHF. Gli conviene quindi rilanciare sempre. Se gli va bene guadagna 1 CHF, mentre se gli va male perderà 2 CHF.

6. L pesca Q.

È se, si vuole, la situazione più intrigante per L. Infatti deve decidere se bluffare oppure no. Sia b la probabilità di un bluff da parte di L, quando questi ha pescato una regina. Se V ha in mano l'asso, certamente vorrà vedere. In questo caso L perde 2 CHF. Se V invece ha il re, dovrà a sua volta decidere se vedere o no. Supponiamo che anche qui la decisione di vedere avvenga con probabilità p. Possiamo quindi fare un poco di calcoli sul valore atteso per il giocatore L.

Nella mano QA abbiamo -2 con probabilità b e -1 con probabilità $1 - b$. Il valore atteso è quindi $-2b - 1 \cdot (1 - b) = -b - 1$.

Nella mano QK il calcolo è un poco più complesso. Disegnando l'albero ci si rende subito conto che L perde 2 CHF se entrambi decidono di giocare, quindi con probabilità bp. Se invece L bluffa, ma V ha non ci sta, allora L vince 1 CHF, e ciò avviene con probabilità $b(1 - p)$. Infine se L decide di rinunciare subito perde 1 CHF, con probabilità $1 - b$. Possiamo quindi determinare il valore atteso per L, in funzione di b e p, come segue:

$$-2bp + 1b(1 - p) - 1 \cdot (1 - b) = -2bp + b - bp - 1 + b = -3bp + 2b - 1 \,.$$

7. Il valore atteso complessivo del gioco.

Ricapitoliamo quanto sin qui calcolato sulla variabile aleatoria X che ci fornisce, in funzione di b e p, il guadagno di L.

mano	AK	AQ	KA	KQ	QA	QK
guadagno di L	$1 + p$	1	-2	1	$-1 - b$	$-3bp + 2b - 1$

Siccome immaginiamo che la partita si svolga correttamente, ognuna delle sei mani ha la stessa probabilità, pari quindi a $\frac{1}{6}$, di presentarsi. La speranza complessiva del gioco è quindi:

$$E[X] = \frac{1 + p + 1 - 2 + 1 - 1 - b - 3bp + 2b - 1}{6} = \frac{-3bp + b + p - 1}{6} \,.$$

Prima di andare oltre con l'analisi, possiamo vedere immediatamente cosa succede con alcune strategie estreme:

- L rilancia sempre e V vuole sempre vedere, cioè $b = p = 1$: $E[X] = -\frac{1}{3}$;
- L rilancia sempre e V non vede mai, cioè $b = 1$, $p = 0$: $E[X] = 0$;
- L non bluffa mai e V vede sempre, cioè $b = 0$, $p = 1$: $E[X] = 0$;
- L non bluffa mai e V non vede mai, cioè $b = p = 0$: $E[X] = -\frac{1}{6}$;
- L bluffa la metà delle volte e V vede la metà delle volte, cioè $b = p = \frac{1}{2}$: $E[X] = -\frac{1}{8}$.

La situazione non pare molto interessante per il primo che parla, cioè per L. Cerchiamo allora di vedere se ci sono strategie che diano una speranza positiva. Vogliamo quindi vedere se esistono situazioni nelle quali $-3bp+b+p-1>0$. Ricordiamo che $b,p\in[0;1]$, questo ci permetterà di semplificare grandemente lo studio della disequazione. In effetti:

$$-3bp+b+p-1>0 \iff b(1-3p)>1-p\,.$$

Considerando il caso $b\in]0;1]$ e $p\in[0;1[$ otteniamo direttamente

$$\frac{1-3p}{1-p}=1-\frac{2p}{1-p}>\frac{1}{b}>1\,,$$

disequazione manifestamente sempre falsa con $(b;p)\in]0;1]\times[0;1[$.

Ci rimangono due casi da analizzare:

- $b=0$: otteniamo subito $0>1-p$, che pure è impossibile per $p\in[0;1]$;
- $p=1$: otteniamo subito $-2b>0$, comunque impossibile per $b\in[0;1]$.

Nei calcoli immediati tuttavia abbiamo visto che in almeno due situazioni il gioco è onesto, cioè $E[X]=0$: si tratta dei casi $(b;p)\in\{(1;0);(0;1)\}$. Vogliamo studiare infine se esistono altre possibilità di scelta della strategia per realizzare un gioco onesto. In altre parole dobbiamo risolvere l'equazione $b(1-3p)=1-p$. Il caso $p=\frac{1}{3}$ porta immediatamente ad una equazione impossibile in b. In tutti gli altri casi per avere $E[X]=0$ occore avere

$$b=\frac{1-p}{1-3p}\,.$$

Un rapido studio della funzione $f(p)=\frac{1-p}{1-3p}$ ci indica che

$$f(p)=\begin{cases}=1, & \text{per } p=0\\ >1, & \text{per } p\in]0;\frac{1}{3}[\\ <0, & \text{per } p\in]\frac{1}{3};1[\\ =0, & \text{per } p=1\end{cases}$$

Siccome vogliamo $b\in[0;1]$, non esistono quindi altre strategie, al di fuori delle due già viste, per le quali $E[X]=0$.

Quindi il giocatore L, il primo che parla, è sempre svantaggiato, tranne nei due casi $b=1$, $p=0$ (L bluffa sempre quando ha Q, e V lascia sistematicamente) e $b=0$, $p=1$ (L non bluffa mai avendo Q, mentre V quando deve scegliere, vede sempre). In questi due casi il gioco è onesto.

8. Alcune osservazioni sul grafico della funzione $z=E[X](b,p)$.

- Vi è un'evidente simmetria rispetto al piano verticale $b=p$.
- Vi è una seconda simmetria rispetto al piano verticale $b+q=\frac{2}{3}$, in effetti

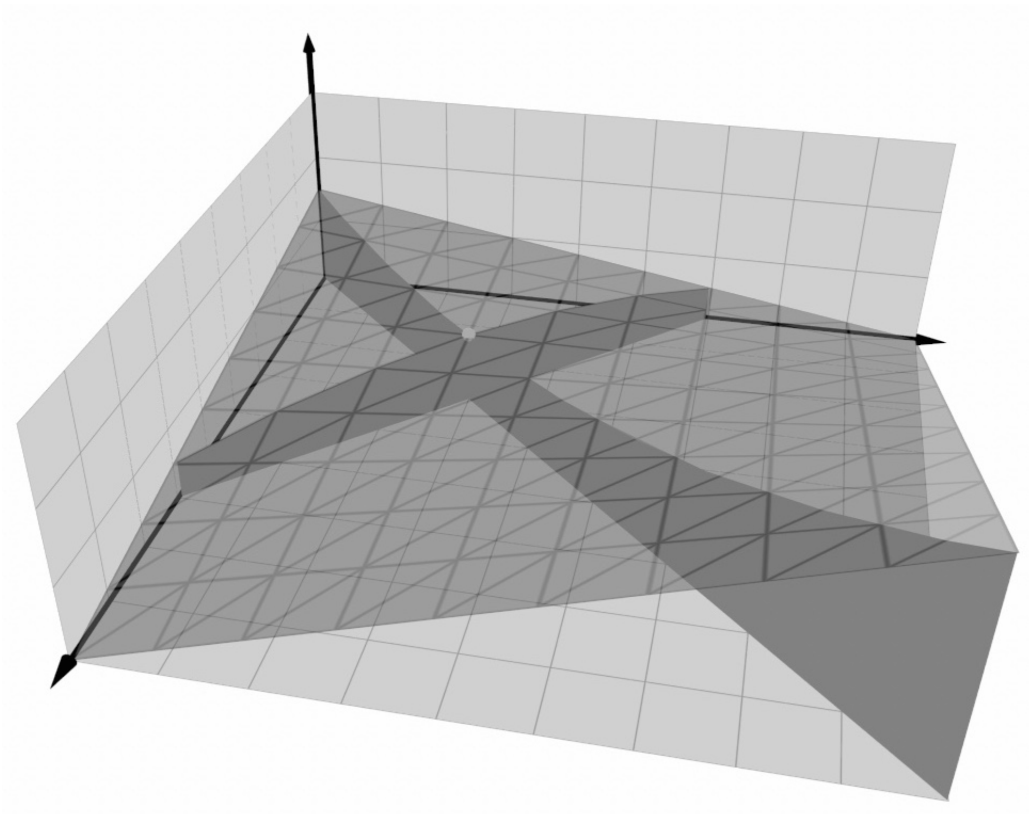
$$-3\left(\frac{2}{3}-p\right)\left(\frac{2}{3}-b\right)+\left(\frac{2}{3}-p\right)+\left(\frac{2}{3}-b\right)-1=-3pb+b+p-1\,.$$

- Il punto $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{9}\right)$, incontro tra i due piani e la superficie $z=E[X](b,p)$, è un punto sella.

Il grafico seguente evidenzia questi aspetti. Per comodità abbiamo rappresentato la funzione:

$$z=\frac{3bp-b-p+1}{6}$$

che è il valore atteso del giocatore V, in modo che con $(b,p)\in[0;1]\times[0;1]$ la funzione rimanga positiva, quindi il grafico sia sopra il piano $z=0$.



9. Osservazioni conclusive.

Delahaye segnala che l'equilibrio di Nash che dà la strategia mista ottimale per i due giocatori si ottiene nel punto dove le due derivate parziali della speranza rispetto a b e rispetto a p si annullano. In questo punto, se L modifica la sua strategia scegliendo un altro valore per b, allora V può aumentare la sua speranza (che è ovviamente l'opposto di quella di L) aggiustando p, e viceversa. Nella situazione di equilibrio nessuno dei due giocatori ha interesse cambiare la sua strategia. Il calcolo indica che questo equilibrio ha luogo con $b = p = \frac{1}{3}$ e quindi $E[X] = -\frac{1}{9}$. È il punto trovato con le considerazioni di natura geometrica sopra esposte.

Non ho purtoppo potuto approfondire questo tema per le mie troppo scarse conoscenze relative all'equilibrio di Nash, ma penso vi sia qui argomento per ulteriori riflessioni.