

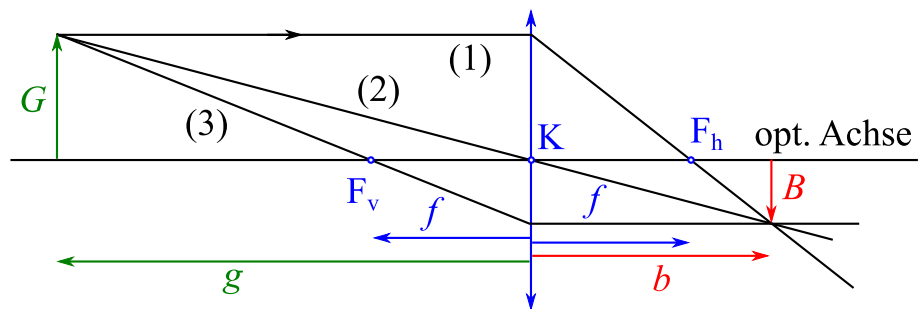
Axialer Abbildungsmaßstab

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Die Abbildung von Gegenständen durch dünne Sammellinsen ist ein gängiges Thema an Gymnasien, denn sie lässt sich geometrisch konstruieren, siehe Abbildung 1, oder algebraisch berechnen.

Abbildung 1: Konstruktion des Strahlengangs vom Gegenstand zum Bild bei der optischen Abbildung durch eine dünne Sammellinse. Die Linse ist auf ihrer Hauptebene, den Knotenpunkt und die zwei Fokusse reduziert.



Aus Abbildung 1 können mit den Strahlensätzen die Abbildungsgleichungen hergeleitet werden.

$$\text{Abbildungsmaßstab } A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \qquad \text{Gauss'sche Linsenformel } \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad (1)$$

In diesen Gleichungen ist f die Brennweite der Linse, g die Gegenstandsweite, b die Bildweite, G die Gegenstandsgröße und B die Bildgröße. Das Verhältnis $A = B/G$ heisst lateraler oder transversaler Abbildungsmaßstab, weil er quer zur optischen Achse gemessen wird. Das ist sinnvoll, weil der Bildschirm ja meistens auch quer (senkrecht) zur optischen Achse aufgestellt wird. Der laterale Abbildungsmaßstab ist für alle Strecken auf dem Bildschirm gleich.

Viel seltener wird der axiale oder Tiefen-Abbildungsmaßstab berechnet. Zwei Gegenstände, die Abstand dg parallel zur optischen Achse haben, werden auf zwei Bilder mit Abstand db projiziert. In welchem Verhältnis stehen diese Längen? Für kleine Abstände gilt

$$\frac{db}{dg} = \frac{d}{dg} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-1} = - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-2} \frac{1}{g^2} = - \frac{b^2}{g^2} = -A^2 \qquad (2)$$

Dummerweise bin ich nämlich auf die Idee gekommen, diese Aufgabe an einer Prüfung zu stellen (mit entsprechender Instruktion natürlich). Etwa die Hälfte von der besseren Hälfte der Klasse konnte die Ableitung formal korrekt durchrechnen, aber niemand konnte das Resultat interpretieren. Ich hätte gerne gelesen, dass die Abbildung längs und quer zur optischen Achse in der Regel verschiedene Abbildungsmaßstäbe aufweisen, das Bild also verzerrt erscheint.

Da ich mir das Ganze aber selber schlecht vorstellen konnte, habe ich im nächsten Abschnitt ein paar Bilder berechnet, damit man diese Verzerrung sieht.

2 Abbildung

Was passiert mit einem Gegenstand, der längs und quer zur optischen Achse ausgedehnt ist? Wir wollen einen Spezialfall untersuchen: Der Gegenstand liege in einer Ebene, welche die optische Achse enthält. Diese Ebene sei meine Zeichenebene. Als Gegenstand habe ich einfache Gitterstrukturen genommen. Für jeden Gegenstandspunkt (links von der Hauptebene der Linse) liess ich mit Hilfe der Abbildungsgleichungen (1) den korrespondierenden Bildpunkt berechnen und zeichnen. Einige Beispiele sind in Abb. 2-4 wiedergegeben.

Abbildung 2: (rechts) Optische Abbildung eines quadratischen Gitters durch eine Linse

Die Linse ist auf ihre Hauptebene (vertikaler Strich) und ihre zwei Brennpunkte reduziert. Die achsenparallelen Gitterstäbe werden auf Geraden abgebildet, die nicht mehr parallel zu einander sind. Der axiale Abbildungsmaßstab variiert über das Bild. Einige Bildpunkte sind virtuell.

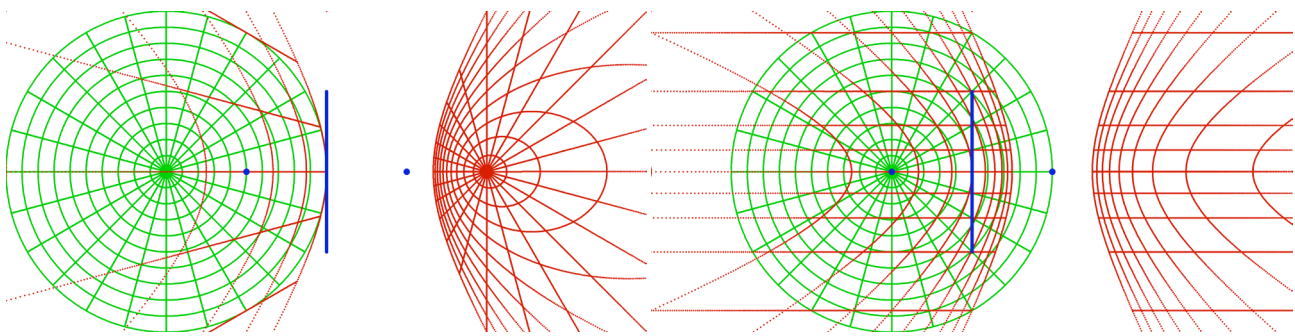
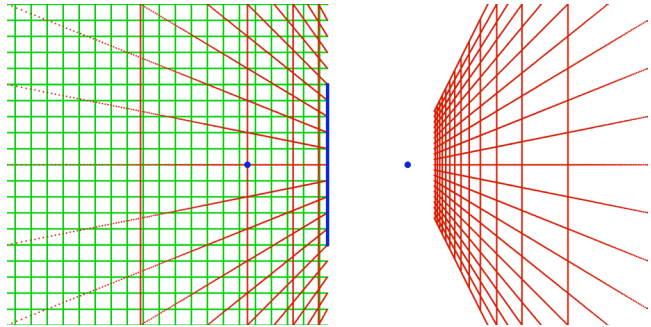
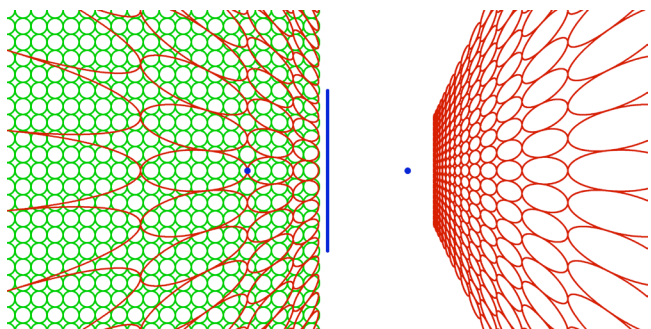


Abbildung 3: (oben) Optische Abbildung konzentrischer Kreise durch eine Sammellinse. Links sind die Kreise auf den Punkt $g = 2f$ auf der optischen Achse zentriert, rechts auf den Brennpunkt der Linse. Gegenstandspunkte auf einem Brennpunkt werden nach unendlich abgebildet, d.h. der Kreis wird aufgetrennt. Wir sehen auch, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Die Abbildung ist geradentreu.

Abbildung 4: (rechts) Optische Abbildung eines Gitters aus Kreisen durch eine Sammellinse

Die meisten Kreise werden auf auf geschlossene Ovale abgebildet, die wie Ellipsen aussehen.



Einige Bild-Kurven in den Abbildungen 3-4 sehen verdächtig aus wie Kegelschnitte (Ellipsen oder Hyperbeln). Ist das wahr oder nur eine Illusion?

3 Transformation

Die optische Abbildung, wie sie in den Abb. 2-4 dargestellt ist, kann mathematisch als Transformation der Ebene auf die Ebene betrachtet werden. Seien (x, y) Koordinaten in der Gegenstandsebene mit x parallel zur optischen Achse und y parallel zur Hauptebene der Linse. Der Nullpunkt liege im Haupt- respektive Knotenpunkt der Linse. Seien (ξ, ζ) die entsprechenden Koordinaten in der Bildebene. Die Abbildungsgesetze (1) liefern für diesen Fall

$$x = \frac{f\xi}{\xi - f} \qquad y = \frac{\zeta f}{\xi - f} \qquad (3)$$

Die Abbildungsgesetze sind symmetrisch bezüglich den Bild- und Gegenstandskoordinaten. Die Vorzeichendiskussion unterschlage ich. Ein Kreis in der Gegenstandsebene der Abbildungen 3-4 erfüllen die Gleichung

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad (4)$$

wobei (x_M, y_M) die Koordinaten des Mittelpunkts und r dessen Radius ist. Wollen wir die korrespondierenden Koordinaten in der Bildebene haben, müssen wir (3) in (4) einsetzen und die neue Gleichung untersuchen.

$$\left(\frac{f\xi}{\xi - f} - x_M \right)^2 + \left(\frac{\zeta f}{\xi - f} - y_M \right)^2 = r^2 \quad \| \cdot (\xi - f)^2 \qquad (5)$$

$$(f\xi - x_M\xi + x_M f)^2 + (\zeta f - y_M\xi + y_M f)^2 = r^2 \cdot (\xi - f)^2 \qquad (6)$$

Nun brauchen wir gar nicht weiter zu rechnen, denn wir erkennen sofort, dass Gleichung (6) eine quadratische Form ist, d.h. ein Polynom zweiten Grades in ξ und ζ . Die Graphen solcher Polynome sind Kegelschnitte (und ein paar Spezialfälle). Die Ovale in den Abbildungen 3-4 sehen nicht nur aus wie Ellipsen, es sind auch welche.

Wer es bis jetzt noch nicht glaubt, kann mit derselben Technik nachrechnen, dass beliebige Geraden auf Geraden abgebildet werden. Die Transformation ist geradentreu, aber weder flächen-, noch winkeltreu.

14. April 2017, Lie.