Sinusoidale Bewässerungen

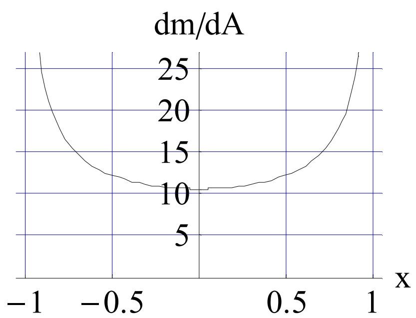
H.U. Keller (hukkeller@bluewin.ch), MNG Zürich

Die Temperaturen in diesem Sommer sind hoch, und die Pflanzen dürsten nach Wasser! Da kann mit einer Spritzkanne, einem Schlauch oder mit einer Berieselungsvorrichtung Abhilfe geschaffen werden. Nur: Wie schaffe ich es, dass alle Pflanzen in meinem Beet gerecht gleich viel Wasser erhalten?

Schauen wir uns in vereinfachender Weise ein schmales, rechteckiges und horizontal liegendes Beet der Länge 2*a* und der Breite *b* $\ll 2a$ an. Weiter soll die Spritzkanne oder der Schlauch konstant die gleiche Wasserleistung $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_o}{T}$ erbringen und so geführt werden, dass das Wasser an einer Stelle *x* =*x*(*t*) entlang der Länge des Beetes senkrecht nach unten aus dem Ausguss ausfliesse und sich sofort uniform über die ganze Breite b verteile. Für die Orts–Zeit–Funktion nehmen wir eine nicht ganz unplausible Form $x = x(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ an, also eine "sinusoidale" Bewässerung! Wie viel Wasser erhält nun jedes Flächenstück entlang der Länge des Beetes? Dazu lösen wir die Orts–Zeit–Funktion nach der Zeit *t* auf und erhalten $t = t(x) = \frac{T}{2\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, wobei wir natürlich nur gerade einen einzigen Halb–Zyklus mit $\frac{-T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ anschauen.

Der Quotient $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ gibt dabei an, wie lange der Ausguss über dem zugehörigen Längenintervall zu finden ist, und der Ausdruck $\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ gibt an, welche Wassermasse Δm in einem Zeitintervall $\Delta t << T$ auf das Flächenstück $\Delta A = b \cdot \Delta x$ der Breite *b* an der Stelle *x* zwischen $x(t)$ und $x(t + \Delta t)$ auftrifft. Das stimmt exakt natürlich nur für den Grenzfall $\Delta t \to 0$: Mit dem üblichen und meist erfolgreichen Glauben der Physiker, dass die Ableitung eine gute Näherung für einen Differenzenquotienten darstellt, ergibt sich nach der Ableitung von *t(x)* nach *x* der Ausdruck

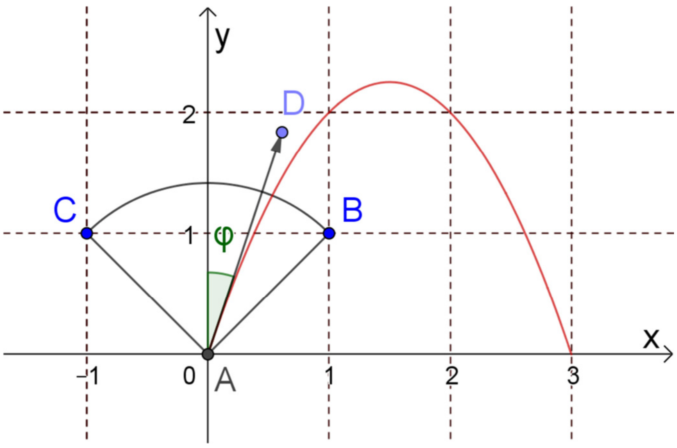
$$\frac{dm}{dA} = \frac{dm}{dA}(x) = 2 \cdot \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{m_o}{a \cdot b} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2}}$$



Der Faktor 2 ergibt sich aus der Tatsache, dass wegen $\frac{-T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ nur die Hälfte der Periode *T* abgedeckt wird. Mit den Annahmen *a* = 1 m, *b* = 0.3 m und m_o = 10 kg erhalten wir für $\frac{dm}{dA}$ (in kg/m^2) als Funktion von *x* (in m) die links wiedergegebene Graphik.

Es kann z. B. leicht gezeigt werden, dass ein äusserster Viertel des Beets doppelt so viel Wasser erhält wie einer der inneren Viertel.

Die Verteilung ist für Pflanzen im Zentrum des Beets also ziemlich ungerecht! Vielleicht wird das besser mit einer automatischen Sprinkleranlage, die wiederum die gleiche konstante Wasserleistung $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_o}{T}$ erbringen soll, wobei das Wasser nun aber in einem Winkel φ zur Vertikalen, im Wesentlichen nach oben, zwischen einem Winkel $-\varphi_o \le \varphi \le \varphi_o$, und mit einer konstanten Schnelligkeit v_o, ausgebracht wird. Für den Winkel φ nehmen wir auch hier wieder eine sinusoidale Bewegung an: $\varphi = \varphi(t) = \varphi_o \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$; der Wasserstrahl soll dabei wiederum auf eine Breite *b* beschränkt sein, die klein ist verglichen mit der maximalen Reichweite des Sprinklers.



Die nebenstehende Graphik zeigt die Verhältnisse. Für φ_o wurde als Beispiel ein Winkel von 45° gewählt. Die Geschwindigkeit des Wasserstrahls wurde hier zu $v_o \approx 7m/s$ gewählt. Natürlich wird der Einfachheit halber hier auf die Berücksichtigung des Luftwiderstandes verzichtet.

Wir übernehmen aus dem Physikunterricht die Formel für die Wurfweite $x = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2\varphi)$, die netterweise auch richtig ist, wenn statt des üblichen Elevations–Winkels der in obiger Figur verwendete Winkel zur Vertikalen mit φ bezeichnet wird! Damit wird die Wurfweite

$$x = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin\left(2\varphi_o \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right)$$

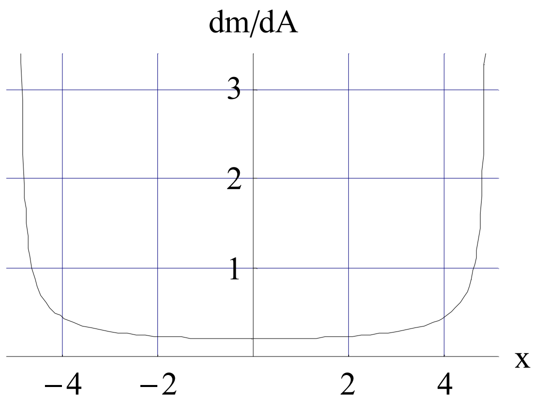
Diese Gleichung lässt sich mit der nötigen Vorsicht nach t auflösen:

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin\left(\arcsin\left(\frac{g \cdot x}{v_o^2}\right) / (2\varphi_o)\right)$$

Auch hier gibt der Ausdruck $\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ an, welche Wassermasse Δm in einem Zeitintervall $\Delta t << T$ auf das Flächenstück $\Delta A = b \cdot \Delta x$ der Breite *b* an der Stelle *x* zwischen $x(t)$ und $x(t + \Delta t)$ auftrifft. Wir betrachten hier nur eine erste Phase von $0 \le t \le T/4$, und kompensieren dies wegen des Rücklaufs des Berieselungsfans von φ_o zurück zu $\varphi = 0$ mit einem Faktor 2. Die Periodenzeit *T* kürzt sich natürlich weg, und wir erhalten für die Verteilung des Wassers mit der Masse m_o über die maximale Wurfweite $x_{\max} = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2\varphi_o)$:

$$\frac{dm}{dA} = \frac{dm}{dA}(x) = 2 \cdot \frac{m_o}{T} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot \frac{m_o}{b} \cdot \frac{g}{4\pi \cdot \varphi_o \cdot v_o^2} \cdot \left(1 - \frac{g^2 \cdot x^2}{v_o^4}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 - \frac{\left(\arcsin(\mathrm{g} \cdot \mathrm{x} / \mathrm{v}_o^2)\right)^2}{4\varphi_o^2}\right)^{-1/2}$$

Ist diese Verteilung "gerechter" für alle Pflanzen unter diesem Sprinkler? Als Beispiel wählen wir hier v_o = 7 m/s, m_o = 10 kg, φ_o = 45°, und $g \approx 10\ m/s^2$, was eine maximale Wurfweite x_{max} von 4.9 m ergibt:



Die nebenstehende Grafik gibt die Wasserverteilung für die oben gewählten Parameter (alle in SI–Einheiten) an.

Die Integration dieser Verteilungsfunktion $\frac{dm}{dA}$ über den Ort *x* zeigt, dass diese Verteilung noch viel extremer ausfällt als bei der ersten Giessvariante: So bekommt beispielsweise der Bereich –4.4m ≤ x ≤ 4.4 m etwa die Hälfte des Wassers, und je ein Viertel des Wassers ergiesst sich in die äusseren Bereiche 4.4 m < *x* ≤ 4.9 m (= x_{max}), resp. (– x_{max}) = –4.9 m ≤ *x* < –4.4 m!

Ich wünsche auf jeden Fall allen Pflanzen – mit oder ohne sinusoidale Bewässerung – ausreichend Wasser, um diese heissen Sommertage erfolgreich zu überleben!