IMO, Parität, Gleichdick und Archimedische Spirale

Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

Worum geht es?

Eine kleine Erweiterung einer IMO-Aufgabe führt zu einem Paritätsproblem, zu Kurven mit konstantem Durchmesser und zu einer Art archimedischer Spiralen.

Problemstellung

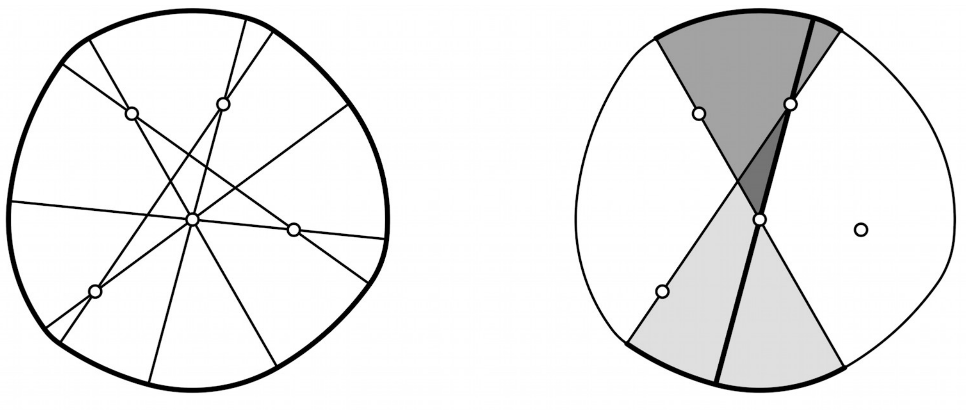
An der IMO 2011 in Amsterdam wurde folgende Aufgabe gestellt [1]:
Aufgabe 2. Sei S eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von S kollinear sind. Als Windmühle bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden l, die genau einen Punkt P von S enthält. Die Gerade l wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus S, der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus S trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt.
Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes P von S und einer Ausgangsgeraden l, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus S unendlich oft als Drehpunkt hat.
Die Aufgabe und ihre Lösung werden von Arnaud (2018) diskutiert.
Und nun die Erweiterung: Wir wählen auf der Geraden l einen beliebigen Punkt B und fragen nach der Bahnkurve von B beim Windmühlenprozess.

Bearbeitung

Die Bahnkurve verhält sich völlig unterschiedlich je nach der Parität der Anzahl der Punkte in S. Zu Paritätsfragen siehe Jaggi (2018).
Für eine ungerade Anzahl von Punkten ergibt sich eine geschlossene Kurve. Diese hat überall denselben Durchmesser.
Für eine gerade Anzahl von Punkten ergibt sich ein Verhalten nach der Art einer archimedischen Spirale.

Ungerade Anzahl von Punkten

Die Abbildung 1a zeigt ein Beispiel für fünf Punkte. Es sind sämtliche Positionen der Geraden l eingezeichnet, wo diese beim Windmühlenprozess durch zwei der fünf Punkte geht. In diesen Positionen wechselt der Drehpunkt.



a) b)

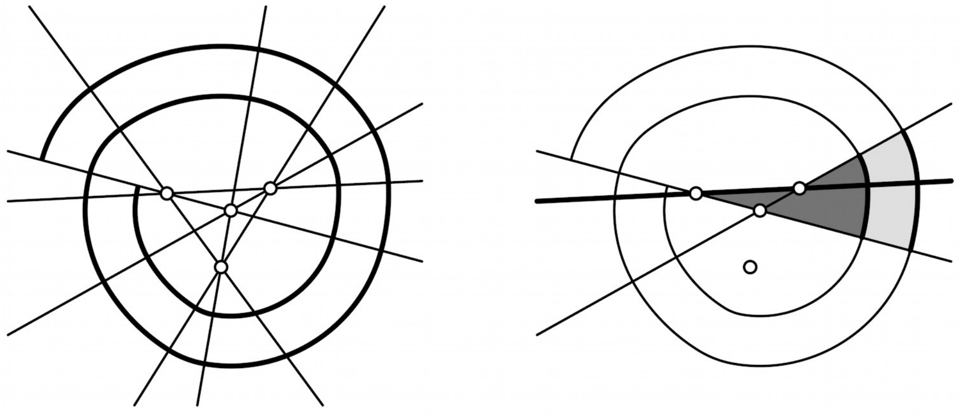
Abb. 1: Beispiel für fünf Punkte

Bei einer ungeraden Anzahl von Punkten verläuft die Gerade l nach einer Drehung um 180° wieder durch denselben Punkt von S (Arnaud 2018, S. 29). Daher gibt es zu jedem durch die Bahnkurve definierten Kreissektor einen Gegensektor mit dem Scheitelwinkel als Sektorwinkel. Die Radien der beiden Sektoren sind verschieden. Beim Übergang von einem solchen Sektorenpaar zum benachbarten Sektorenpaar (Abb. 1b) wird aber die Summe der beiden Sektorradien übernommen. Daher ist die Kurve geschlossen und hat überall den gleichen Durchmesser. (Falls der Punkt B zu nahe an den gegebenen Punkten aus S liegt, ist die Kurve nicht konvex und die Frage nach dem „Durchmesser“ muss diskutiert werden. Das Problem kann behoben werden, indem wir mit dem Punkt B nach aussen fahren.)

Kurven mit konstantem Durchmesser wurden von Euler als *Orbiforme* bezeichnet. Der Schülerinnenausdruck dafür ist *Gleichdick*. Das bekannteste Beispiel ist (nach dem Kreis) das Reuleaux-Dreieck. Der Umfang der Orbiforme ist Durchmesser mal π.

Gerade Anzahl von Punkten

Die Abbildung 2a zeigt ein Beispiel für vier Punkte.



a) b)

Abb. 2: Beispiel für vier Punkte

Bei einer geraden Anzahl von Punkten verläuft *l* erst nach einer Drehung um 360° wieder durch denselben Punkt von *S*. Wir erhalten daher nicht Gegensektoren, sondern gleichliegende Sektoren (Abb. 2b). An der Schnittstelle zum benachbarten Sektorenpaar wird die Radiendifferenz weitergegeben. Daher erhalten wir eine spiralartige Kurve mit überall demselben Abstand zwischen zwei Kurvendurchgängen. Das einfachste Beispiel dazu ist die archimedische Spirale.

Links

[1] http://www.imo-official.org/problems.aspx

Literatur

Arnaud, Maret (2018): Die Schweizer Mathematik-Olympiade. VSMP Bulletin. Ausgabe 138, September 2018, 26-29.
Jaggi, Beat (2018): Gerade oder ungerade — das ist hier die Frage! VSMP Bulletin. Ausgabe 138, September 2018, 30-45.