

Náboj 2019 - Rückblick auf die erste Schweizer Ausführung

Nina Stumpf, ETH, stumpfn@student.ethz.ch

Ondrej Budac, Google, ondrob@gmail.com, Marek Tesar, Google, tesulo@gmail.com

Am 22. März 2019 war es so weit: Der Mathematikwettbewerb Náboj fand erstmals auch in der Schweiz statt. 15 Teams aus neun verschiedenen Gymnasien und sechs verschiedenen Kantonen traten an der ETH Zürich gegeneinander an – und gegen knapp 500 weitere Teams in neun verschiedenen Ländern Europas, von Grossbritannien bis Russland.



Abbildung 1 – Impressionen aus Prag, Cambridge, Budapest und Krakau.

Mit 22 gelösten Aufgaben übertraf das Schweizer Gewinnerteam der Kantonsschule Solothurn sämtliche Teams Österreichs und schloss auf Rang 87 einen Punkt hinter dem besten deutschen Team ab. Einzame Spitze war Polen, das internationale Siegerteam aus Krakau erreichte stolze 44 von 46 möglichen Punkten.

Die höchste in Zürich gelöste Aufgabe war Nummer 35, abgegeben vom Schweizer Gewinnerteam nach einer super Zeit von 3'33" – schaffen Sie das auch?

Jahr 2019, Aufgabe 35: Paul hat eine rechteckige Schokoladentafel der Grösse 5×3 . Er hat extra Zucker auf das linke, obere Schokoladenstückchen gelegt, um es süsser zu machen. Er isst die Schokoladentafel in folgender Weise: In jedem Schritt wählt er zufällig die Spalte ganz rechts oder die unterste Reihe, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$. Das wiederholt er, bis die gesamte Schokolade gegessen ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er im letzten Schritt nur das einzelne süssere Schokoladenstückchen isst?

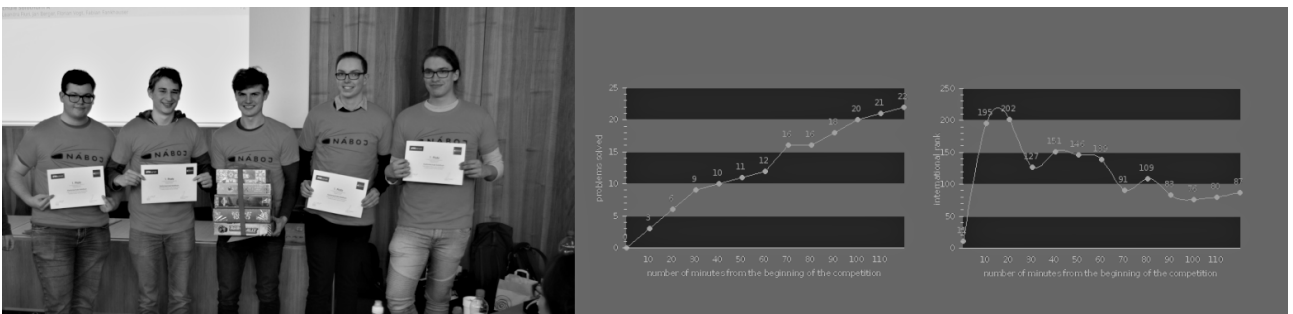


Abbildung 2 – Gewinnerteam in Zürich, daneben ihre gelöste Anzahl Aufgaben und ihr internationaler Rang über die 120 Minuten Dauer des Wettbewerbs.

Ergebnis: 15/64

Lösungsweg: Angenommen, die Schokoladentafel hat drei Reihen und fünf Spalten. Die Schokolade ist aufgegessen, sobald dreimal die unterste Reihe (R) oder fünfmal die rechte Spalte (S) gewählt

wurde. Das ist frühestens nach drei und spätestens nach sieben Schritten der Fall. Dass im letzten Schritt nur das einzelne süssere Schokoladenstückchen gegessen wird, kann nur dann geschehen, wenn in den ersten sechs Schritten, egal in welcher Reihenfolge, genau zweimal R und viermal S gewählt wurde (im siebten Schritt wird unabhängig von der Wahl von R oder S das einzelne süssere Schokoladenstückchen gegessen). Es gibt 62 Sequenzen aus R und S der Länge 6, die genau zwei R und vier S enthalten. Jede dieser Sequenzen hat eine Wahrscheinlichkeit von $1/2^6$, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{62}{2^6} = \frac{15}{64}$.

Mit fast einer Stunde länger die Zähne ausgebissen haben sie sich an folgender Aufgabe:

Jahr 2019, Aufgabe 30: Bestimme alle vierstelligen positiven ganzen Zahlen \overline{abcd} , die gleich dem Wert von $a^a + b^b + c^c + d^d$ sind. Dabei darf keine der Ziffern die Null sein.

Knapp zwei Minuten vor Wettbewerbsende hatten sie schliesslich die Lösung heraus:

Ergebnis: 3435

Lösungsweg: Wegen $6^6 \geq 10000$ darf keine der Ziffern grösser als 5 sein. Wenn alle Ziffern eine 4 wären, dann wäre die geforderte Bedingung nicht erfüllt, und wenn höchstens drei Mal die Ziffer 4 vorkäme, dann wäre die Summe wegen $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$ nicht vierstellig. Also muss mindestens eine Ziffer 5 vorkommen und wegen $5^5 = 3125$ darf auch höchstens eine Ziffer 5 enthalten sein, da ansonsten die erste Ziffer der vierstelligen Zahl grösser als 5 wäre. Aufgrund von $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$ muss dann die erste Ziffer eine 3 sein. Jetzt weiss man, dass die gesuchte Zahl mindestens $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$ sein muss. Da 3154 die Bedingung nicht erfüllt und 3155 wegen der beiden Fünfen nicht möglich ist, muss an der Hunderterstelle mindestens eine 2 stehen. Die nächste in Frage kommende Zahl ohne eine Ziffer grösser als 5 ist $3215 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$. Deshalb muss mindestens eine 4 dabei sein, aber es kann wegen $5^5 + 2 \cdot 4^4 = 3637$ auch höchstens eine 4 enthalten sein. Durch Untersuchen der letzten noch möglichen drei Fälle sieht man nun leicht, dass es nur die einzige Lösung 3435 gibt.

Doch schnell sein und gewinnen ist nicht alles – hauptsächlich hoffen wir, dass sämtliche Teilnehmer Spass hatten und viele von ihnen nächstes Jahr wieder mit dabei sein werden. Am **13. März 2020** ist es wieder so weit, gut einen Monat zuvor startet die Anmeldephase.



Abbildung 3 – Impressionen aus Zürich (von links nach rechts): Konzentriert sitzen die Teams an ihren Aufgaben. Bis 15 Minuten vor Ende werden die internationalen und lokalen Zwischenergebnisse ständig aktualisiert und für alle ersichtlich projiziert. Am Ende wird es noch einmal hektisch bei den Kontrollposten, viele wollen noch eine Lösung abgeben. Die Ruhe nach dem Sturm: Glücklicherweise sammeln sich alle Organisatoren und Helfer, die den Anlass erst möglich gemacht haben.

Aufgrund des grossen Interesses ist für 2020 der Ausbau auf 30 Teams geplant. Die Hälfte davon soll in der Kategorie Junior antreten, die wir dieses Jahr noch nicht anboten. Sie unterscheidet sich darin von den Senioren, dass erst zehn einfachere Aufgaben bearbeitet werden und dass die TeilnehmerInnen sich noch nicht in den letzten beiden Jahren vor der Matur befinden dürfen.

Bei Fragen oder sonstigen Anliegen sind wir per E-Mail erreichbar unter info-ch@math.naboj.org.

Weitere Impressionen, Aufgaben inkl. Lösungen und Statistiken sind verfügbar auf math.naboj.org.