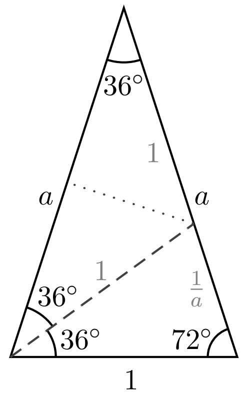
Quelques sujets de trigonométrie

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nous abordons divers thèmes de trigonométrie en espérant pouvoir donner un sens plus concret à certaines formules, même si elles ne sont établies ici que pour des angles aigus. Les démonstrations sont élémentaires et s'appuient sur des illustrations judicieuses.

1 Valeurs des fonctions trigonométriques pour $\alpha = 36°$

On considère un triangle isocèle présentant un côté de longueur 1 et un angle opposé de 36°. En traçant (en traitillés) sa bissectrice par rapport à un des deux autres angles, on obtient deux triangles isocèles ayant chacun deux côtés de longueur 1. Le plus petit d'entre eux est une réduction de facteur a du triangle initial, la longueur de son côté restant vaut donc $\frac{1}{a}$. On a ainsi la relation $a = 1 + \frac{1}{a}$, autrement dit $a^2 = a + 1$ et le nombre a, qui est positif, n'est rien d'autre que le nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

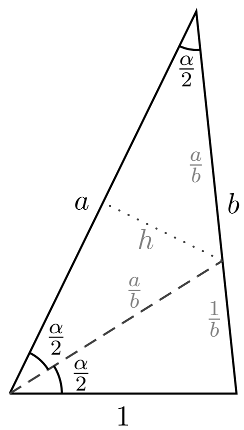


Le triangle isocèle moyen peut être séparé en deux triangles rectangles en considérant sa hauteur (en pointillés). En appliquant la relation "cos-adj-hyp" dans l'un d'eux, on trouve alors $\cos(36°) = \dfrac{\phi}{2}$ et le théorème de Pythagore donne la hauteur :

$$\sin(36°) = \sqrt{1 - \cos^2(36°)} = \sqrt{1 - \frac{\phi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{\phi + 1}{4}} = \sqrt{\frac{3 - \phi}{4}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

2 Formules de bissection

Avec un schéma comparable au précédent, nous établissons ici des formules générales pour déterminer le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle $\frac{\alpha}{2}$ à partir d'un angle aigu α. On considère un triangle présentant un angle α et un angle $\frac{\alpha}{2}$ situé en face d'un côté de longueur 1. La bissectrice de l'angle α donne lieu à une réduction de facteur b du triangle initial (indirectement semblable), avec des côtés de longueurs $\frac{a}{b}$ et $\frac{1}{b}$, ainsi qu'à un triangle isocèle qui admet alors deux côtés de longueur $\frac{a}{b}$. On a donc la relation $b = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$, autrement dit $b^2 = a + 1$. Par le théorème du cosinus ($b^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$), on en déduit que $a = 1 + 2\cos\alpha$ et donc $b^2 = 2 + 2\cos\alpha$.



La hauteur (en pointillés) du triangle isocèle est donnée par le théorème de Pythagore :

$$h = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}} = a\sqrt{\frac{4 - b^2}{4b^2}} = \frac{a}{2b}\sqrt{4 - b^2}.$$

Les relations “cos-adj-hyp” et “sin-opp-hyp” dans un des triangles rectangles issus du triangle isocèle donnent

1) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a/2}{a/b} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}$

2) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{a/b} = \frac{bh}{a} = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha}}{2}$

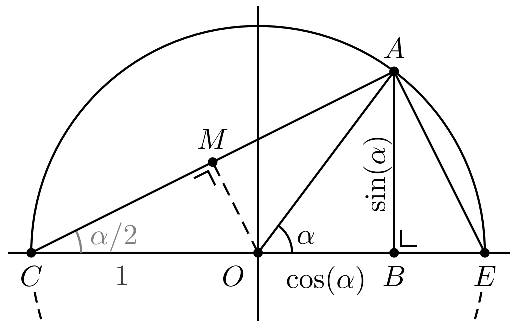
3) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\sqrt{2-2\cos\alpha}}{\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

En amplifiant par $\sqrt{1+\cos\alpha}$ ou par $\sqrt{1-\cos\alpha}$, on trouve $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Une autre preuve

Inspiré par le théorème de l’angle au centre qui relie un angle à sa moitié, nous pouvons démontrer les formules de bissection sans le théorème du cosinus.

À un angle aigu α est associé un point A sur le cercle trigonométrique et les indications fournies pour le triangle rectangle OAB dans le schéma ci-contre sont claires. Dans le triangle OAC, l’angle en O est $180° - \alpha$ et la somme des deux angles restants est α. Comme le triangle est isocèle (avec deux côtés de longueur 1), chacun de ces deux angles est donc $\frac{\alpha}{2}$. Le point M est le milieu du côté AC et le triangle OCM est rectangle. Comme la longueur de son hypoténuse vaut 1, celles de ses cathètes sont $\cos(\alpha/2)$ et $\sin(\alpha/2)$.



Dans le triangle ABC, les formules “tan-opp-adj”, “cos-adj-hyp” et “sin-opp-hyp” donnent

1) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

2) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2\cos(\alpha/2)}$, donc $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{2\cos(\alpha/2)}$, donc $\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Comme le triangle OAE est isocèle, l’angle en E vaut $\frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Dans le triangle rectangle ABE, l’angle en A est donc $90° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ et la formule “tan-opp-adj” donne

4) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, donc $\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}$ et $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Ainsi, si on connaît les valeurs des fonctions trigonométriques pour un angle aigu α, on peut calculer

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

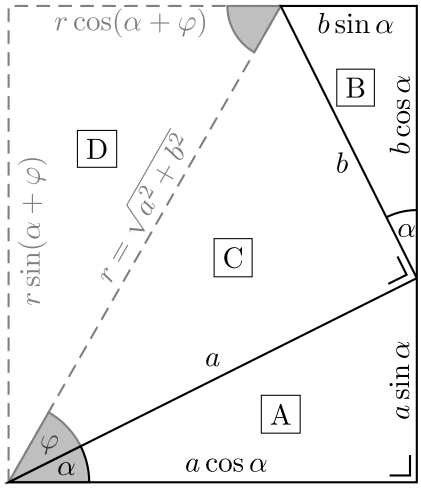
Application. En considérant les angles $\alpha = 45°$, $\alpha = 30°$ et $\alpha = 36°$, on obtient

1) $\sin(22.5°) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\quad \cos(22.5°) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\quad \tan(22.5°) = \sqrt{2} - 1$

2) $\sin(15°) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\quad \cos(15°) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\quad \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$

3) $\sin(18°) = \dfrac{\sqrt{2-\phi}}{2} = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$, $\quad \cos(18°) = \dfrac{\sqrt{2+\phi}}{2} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\quad \tan(18°) = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

3 Combinaisons de sinus et de cosinus



Pour un angle aigu α et des nombres positifs a et b, on considère le schéma ci-contre. Les triangles rectangles $\boxed{\text{A}}$ et $\boxed{\text{B}}$ sont donnés, avec un angle α et des hypoténuses respectives a et b. Le triangle $\boxed{\text{C}}$ a un certain angle aigu φ, un angle droit et l'hypoténuse $r = \sqrt{a^2+b^2}$, commun avec le triangle rectangle $\boxed{\text{D}}$ qui admet un angle $\alpha + \varphi$.

Le schéma montre les relations suivantes :

$$a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$$

$$a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\alpha+\varphi)$$

où l'angle φ vérifie

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

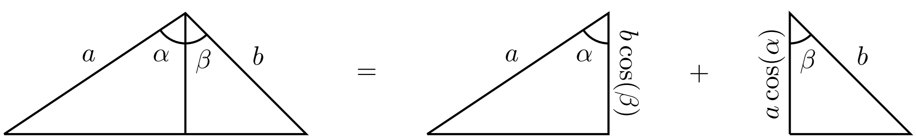
En fait, l'angle φ est entièrement défini (modulo 360°) par deux de ces relations et ces formules restent valables pour un angle α et des nombres a et b quelconques.

Application. Si $a = b = 1$, alors $\tan(\varphi) = 1$ donc $\varphi \in \{45°, 225°\}$. Comme $\cos(\varphi) > 0$, on a $\varphi = 45°$. Il s'ensuit que $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$ et $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha + 45°)$.

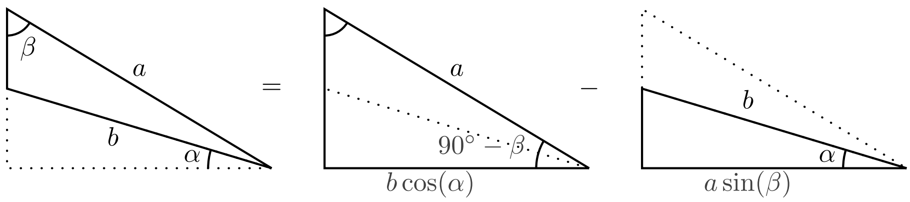
4 Formules d'addition des angles

En considérant simplement $a = \cos(\beta)$ et $b = \sin(\beta)$ dans les formules précédentes, on a $\sqrt{a^2+b^2} = 1$ et $\varphi = \beta$. On retrouve ainsi les relations bien connues "$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$" et "$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$". Nous pouvons les établir d'une autre manière en calculant des aires de triangles selon la formule "$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$" avec les notations standard.

1)



$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{ab}\sin(\alpha+\beta) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{ab}\cos(\beta)\sin(\alpha) + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{ab}\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

2) 

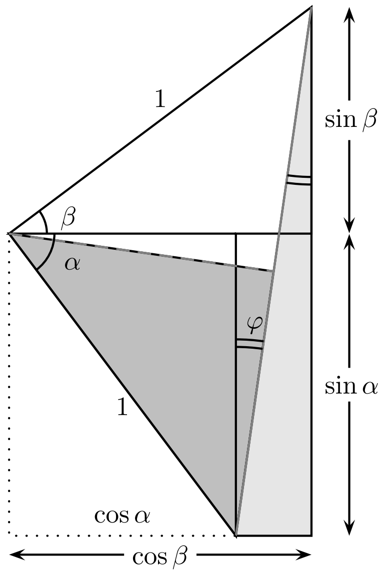
$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{a}\cancel{b}\sin((90^\circ-\beta)-\alpha) \quad = \quad \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{a}\cancel{b}\cos(\alpha)\sin(90^\circ-\beta) \quad - \quad \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{a}\cancel{b}\sin(\beta)\sin(\alpha)$$

On conclut alors en utilisant la relation $\sin(90^\circ-\gamma)=\cos(\gamma)$.

Remarque. Les formules des paragraphes 3 et 4 peuvent être présentées dans l'autre ordre. En divisant un vecteur non nul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ par sa norme, on obtient un vecteur $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de norme 1, lequel peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ pour un certain angle φ. On a alors

$$\begin{aligned}
a\sin(\alpha)+b\cos(\alpha) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin(\alpha)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos(\alpha)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin(\alpha)\cos(\varphi)+\cos(\alpha)\sin(\varphi)) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi).
\end{aligned}$$

5 Somme de sinus et différence de cosinus



On accole deux triangles rectangles d'hypoténuse 1, l'un présentant un angle α et l'autre un angle $\beta \leqslant \alpha$. Le triangle rectangle gris foncé dans le schéma ci-contre est un demi-triangle isocèle qui admet un angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Le côté opposé est $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ et l'angle aigu restant est $90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}$. On a

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} - (90^\circ-\alpha) = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

L'angle φ se retrouve dans le triangle rectangle gris clair à droite du schéma. Les relations "cos-adj-hyp" et "sin-opp-hyp" se traduisent de la manière suivante.

1) $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, donc $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

2) $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \dfrac{\cos(\beta)-\cos(\alpha)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, donc $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.