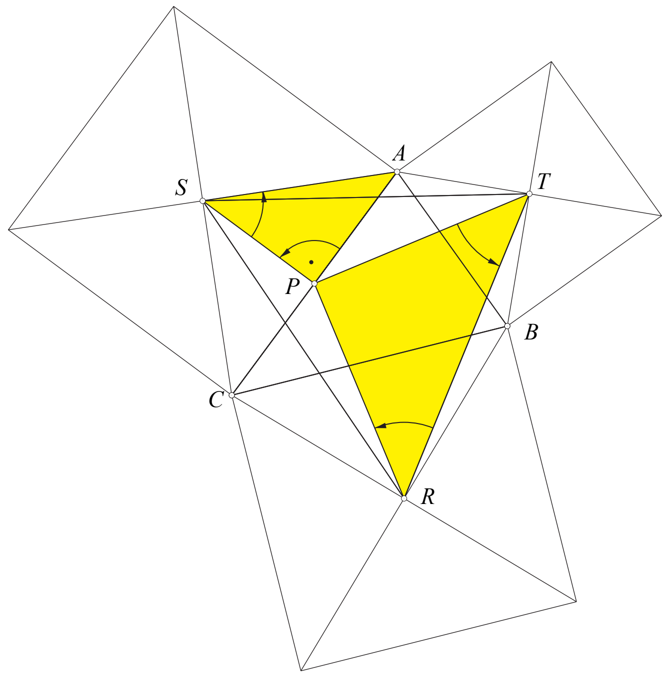
Aufgabe von Elia von Salis, Bulletin Nr. 140, Seite 36

Peter Gallin, peter@gallin.ch



Die Aufgabe lautet: Gegeben sind die Mittelpunkte R, S und T der Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC. Konstruiere daraus das Dreieck ABC!

Die Aufgabe bietet sich dafür an, mit der Abbildungsgeometrie behandelt zu werden, und zwar speziell mit der Tatsache, dass jede Drehung in der Ebene als Verkettung von zwei Geradenspiegelungen erzeugt werden kann. Dabei schneiden sich die beiden Geraden im Fixpunkt der Drehung und schliessen einen orientierten Schnittwinkel ein, der halb so gross ist wie der Drehwinkel. Entscheidend ist nun, dass die beiden Geraden unter den genannten Bedingungen beliebig gewählt werden dürfen.

In der obigen Figur betrachten wir zuerst die Drehung mit $+90°$ um T, verketten sie mit der Drehung mit ebenfalls $+90°$ um R und verketten dieses Produkt schliesslich mit der Drehung mit $+90°$ um S. Bei diesem dreifachen Produkt geht der Punkt A zuerst in B, dann in C und schliesslich zurück in A über. Das heisst, der Punkt A ist Fixpunkt dieses Produkts und kann damit aus den drei Punkten T, R und S bestimmt werden. Die erste Drehung stellen wir durch zwei Geradenspiegelungen dar, von denen die zweite die Gerade TR sei. Dann findet man die erste Gerade so, dass sie mit der zweiten Geraden einen Winkel von $+45°$ einschliesst. Die zweite Drehung um R wird ihrerseits durch eine erste Spiegelung an der Geraden RT und eine zweite Spiegelung an der Geraden durch R derart realisiert, dass RT mit ihr einen $+45°$ einschliesst. Das bedeutet, dass wir über der Strecke TR ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck zu errichten haben. So erhalten wir dessen Spitze P. Die Verkettung der beiden ersten Drehungen ist ein Produkt aus vier Geradenspiegelungen, von denen die beiden mittleren sich aufheben, weil zweimal an der gleichen Geraden gespiegelt wird. Damit ist das Produkt der beiden ersten Drehungen nichts anderes als die Verkettung der beiden Spiegelungen an den Geraden PT und PR. Diese stehen senkrecht zueinander und stellen also eine Drehung mit $180°$ um P dar. Es handelt sich also um eine Punktspiegelung an P.

Diese Punktspiegelung muss nun mit der Drehung um S mit $+90°$ verkettet werden. Das sind insgesamt wieder vier Geradenspiegelungen, von denen wir als die mittleren Beiden die Spiegelung an der Gerade SP wählen. Dann ist die erste Spiegelung jene an der Geraden, die senkrecht zu SP steht und die vierte Spiegelung an der Geraden, die so gelegt werden muss, dass SP mit ihr einen $+45°$-Winkel einschliesst. Die erste und die vierte Gerade schneiden sich im gesuchten Punkt A. Er ist der Fixpunkt der Verkettung der drei Drehungen. Diese Verkettung ist also eine Drehung um den Punkt A mit einem Drehwinkel von $+270°$.

Dreht man nun A um S mit $-90°$, erhält man C. Da ja die Verkettung der beiden ersten Drehungen die Punktspiegelung an P ist, muss C auch das Bild von A bei dieser Punktspiegelung sein. P ist also Mittelpunkt der Strecke AC. Dreht man A um T mit $+90°$, erhält man B. Das Dreieck ABC ist damit konstruiert und die Aufgabe vollständig gelöst.