"Beinahe-Pythagoras = Pell"

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch und Philipp Reinhard, philippreinhard@hotmail.com

1 Einleitung

Eugen Jost ist ein Künstler aus Thun, der es mit seinen Bildern meisterhaft versteht, Kunst und Mathematik (und Sprache!) zu verbinden (siehe zum Beispiel [1], [2], [3]).
Eines seiner Bilder scheint eine Pythagoras-Konfiguration darzustellen, ein rechtwinkliges Dreieck zusammen mit den beiden Kathetenquadraten und dem Hypotenusenquadrat.

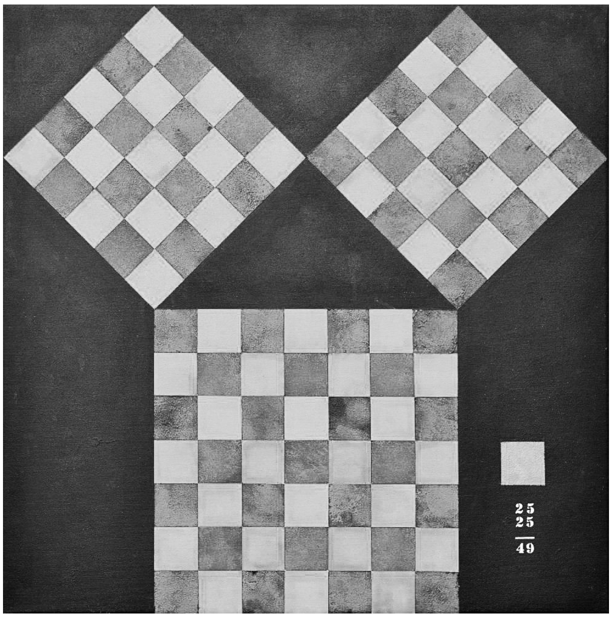


Abbildung 1

Auf den zweiten Blick (auch die angegebenen Zahlen $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ verraten es) sieht man schnell, dass die beiden "Kathetenquadrate" aus je 25 Häuschen bestehen, das "Hypotenusenquadrat" aber 'nur' aus 49 Häuschen. Sind die kleinen hellen und dunkleren Häuschen alle gleich gross, dann ist das schwarze gleichschenklige Dreieck in der Mitte gar nicht rechtwinklig. Auf dem obigen Bild ist das schwarze Dreieck übrigens trotzdem rechtwinklig, der Künstler hat bei den Seitenlängen der Quadrate und also der Häuschen leicht geschummelt!

Eine Konfiguration wie oben (mit lauter gleich grossen kleinen Häuschen) kann natürlich gar nie zu einem rechtwinkligen Dreieck führen. Bezeichnet x die (ganzzahlige) Seitenlänge der Kathete, y die (ganzzahlige) Seitenlänge der Hypotenuse, dann müsste $x^2 + x^2 = 2x^2 = y^2$, also $\frac{y^2}{x^2} = 2$ und folglich $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$ sein. Das steht im Widerspruch zur Tatsche, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

In Zusammenhang mit dem obigem Bild ist die Frage aufgetaucht, ob es andere Konfigurationen gibt, bei denen nach dem 'Geschmack des Pythagoras' entweder ein Häuschen fehlt oder eines zu viel ist.

Bezeichnet wieder x die Seitenlänge der Kathete, y die Seitenlänge der Hypotenuse, dann lautet die Aufgabe: Finde alle (positiven) ganzzahligen Lösungen der Gleichungen $x^2 + x^2 = 2x^2 = y^2 \pm 1$ resp.

$$y^2 - 2x^2 = \pm 1.$$

Diese beiden Gleichungen $y^2 - 2x^2 = 1$ und $y^2 - 2x^2 = -1$ sind Spezialfälle der sogenannten Pellschen Gleichung, einer diophantischen Gleichung, die allgemein die Form $y^2 - dx^2 = c$ hat (siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Pellsche_Gleichung`). Diese Gleichung (mit $d = 2$) wurde wegen des Zusammenhangs mit $\sqrt{2}$ bereits im Altertum studiert.

Gleichungen, bei denen 'nur' ganzzahlige Lösungen gesucht sind, heissen diophantisch (benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantos von Alexandria (irgendwann zwischen -100 und +350).

2 Die Lösungen der Pell-Gleichungen $y^2 - 2x^2 = 1$ und $y^2 - 2x^2 = -1$

Wir bezeichnen die Gleichung $y^2 - 2x^2 = 1$ mit Pell(+) und $y^2 - 2x^2 = -1$ mit Pell(−).
Gesucht sind alle Paare (y, x) natürlicher Zahlen, welche eine der beiden Gleichungen erfüllen.

Satz:

a) Die Zahlenpaare (y_n, x_n), rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} y_1 = 1 \quad &; \quad y_{n+1} = y_n + 2x_n \\ x_1 = 1 \quad &; \quad x_{n+1} = y_n + x_n, \end{aligned}$$

liefern abwechselnd Lösungen von Pell(−) und von Pell(+).

b) Es gibt keine weiteren Lösungen für eine der beiden Gleichungen.

Beweis:

a) Für jede natürliche Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen y_n und x_n mit $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = y_n + x_n\sqrt{2}$. So ist $y_1 = x_1 = 1$ und wegen $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ weiter $y_2 = 3$ und $x_2 = 2$ etc.

Es ist einfach einzusehen, dass auch $\left(1 - \sqrt{2}\right)^n = y_n - x_n\sqrt{2}$ gilt.

Wegen

$$(-1)^n = \left[\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)\right]^n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n \left(1 - \sqrt{2}\right)^n = \left(y_n + x_n\sqrt{2}\right)\left(y_n - x_n\sqrt{2}\right) = y_n^2 - 2x_n^2$$

ist (y_n, x_n) für jede natürliche Zahl n entweder Lösung von Pell(+) oder von Pell(−).

Weiter folgt aus

$$\begin{aligned} y_{n+1} + x_{n+1}\sqrt{2} &= \left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)^n \\ &= \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(y_n + x_n\sqrt{2}\right) = (y_n + 2x_n) + (y_n + x_n)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

dass sich (y_{n+1}, x_{n+1}) aus (y_n, x_n) berechnen lässt.

Ausgehend von $(y_1, x_1) = (1, 1)$ liefern die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2x_n \\ x_{n+1} &= y_n + x_n \end{aligned}$$

folglich abwechselnd Lösungen von $\mathsf{Pell}(+)$ oder von $\mathsf{Pell}(-)$:

$$\begin{array}{rcll} (y_1, x_1) = (1, 1) & : & 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1 & \\ (y_2, x_2) = (1 + 2 \cdot 1, 1 + 1) = (3, 2) & : & 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 & \\ \boldsymbol{(y_3, x_3) = (3 + 2 \cdot 2, 3 + 2) = (7, 5)} & : & \mathbf{7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1} & : \text{ vergleiche mit Abbildung 1.} \\ (y_4, x_4) = (7 + 2 \cdot 5, 7 + 5) = (17, 12) & : & 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1 & \\ (y_5, x_5) = (17 + 2 \cdot 12, 17 + 12) = (41, 29) & : & 41^2 - 2 \cdot 29^2 = -1 & \\ (y_6, x_6) = (41 + 2 \cdot 29, 41 + 29) = (99, 70) & : & 99^2 - 2 \cdot 70^2 = 1 & \\ & \vdots & & \end{array}$$

b) Eine einfache Rechnung zeigt: Für jede Lösung (y, x) von $\mathsf{Pell}(+)$ oder von $\mathsf{Pell}(-)$ mit $x > 1$ und $y > 2$ gilt: $x < y < 2x$ resp. $0 < y - x < x$.

Wie nehmen an, es gebe Lösungen von $\mathsf{Pell}(+)$ oder von $\mathsf{Pell}(-)$, die <u>nicht</u> mit den obigen Rekursionsformeln erzeugt werden können. Wir wählen unter all diesen Lösungen diejenige mit dem kleinsten x-Wert und nennen sie $(\tilde{y}, \tilde{x})$.

Aus $y_{n+1} = y_n + 2x_n$ und $x_{n+1} = y_n + x_n$ folgt umgekehrt $y_n = -y_{n+1} + 2x_{n+1}$ und $x_n = y_{n+1} - x_{n+1}$.

Wegen

$$(-\tilde{y} + 2\tilde{x})^2 - 2(\tilde{y} - \tilde{x})^2 = -\left(\tilde{y}^2 - 2\tilde{x}^2\right)$$

wäre mit $(\tilde{y}, \tilde{x})$ auch $(-\tilde{y} + 2\tilde{x}, \tilde{y} - \tilde{x})$ Lösung von $\mathsf{Pell}(+)$ oder von $\mathsf{Pell}(-)$, welche ebenfalls nicht durch die Rekursionsformeln erzeugt werden kann.

Wegen $0 < \tilde{y} - \tilde{x} < \tilde{x}$ hätte die neue Lösung aber einen kleineren (immer noch positiven) x-Wert als $(\tilde{y}, \tilde{x})$. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung: Auch mit grossen Werten für y_n und x_n wird die entstehende "Beinahe-Pythagoras"-Konfiguration nie ganz rechtwinklig sein. Der Winkel im zentralen gleichschenkligen Dreieck beträgt nach Kosinussatz $y_n^2 = x_n^2 + x_n^2 - 2x_n^2 \cos\gamma$ und wegen $y_n^2 - 2x_n^2 = \pm 1$

$$\gamma = \arccos \frac{\pm 1}{2x_n^2}.$$

Wären in Abbildung 1 alle Häuschen gleich gross, bekäme man mit $x = 5$

$$\gamma = \arccos \frac{1}{50} \approx 88.85^0.$$

3 Die Lösungen von Pell(−) oder Pell(+) und Kettenbrüche

Die Lösungen $(1,1)$, $(3,2)$, $(7,5)$, $(17,12)$, $(41,29)$, $(99,70)$ von Pell(−) oder von Pell(+), je als Bruch geschrieben, tauchen in einem weiteren Bild von Eugen Jost auf!

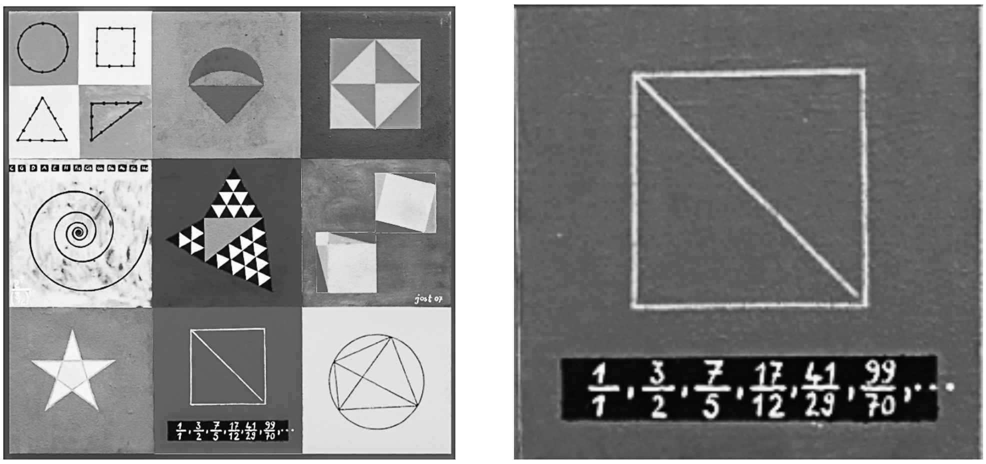


Abbildung 2

Die Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$ sind Näherungsbrüche des Kettenbruches von $\sqrt{2}$.

Den Kettenbruch von $\sqrt{2}$ bekommt man, wenn man den Euklidischen Algorithmus mit $\sqrt{2}$ und 1 durchführt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1\cdot 1+\left(\sqrt{2}-1\right) && \text{mit } 0<r_1=\sqrt{2}-1<1\\
1 &= 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right) && \text{mit } 0<r_2=3-2\sqrt{2}<\sqrt{2}-1\\
\sqrt{2}-1 &= 2\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)+\left(5\sqrt{2}-7\right) && \text{mit } 0<r_3=5\sqrt{2}-7<3-2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Die Terme werden immer komplizierter! Multipliziert man aber die letzte Gleichung auf beiden Seiten mit $\sqrt{2}+1$, dann bekommt man gerade die mittlere Gleichung! Folglich werden alle folgenden Divisionen mit Rest immer von der Form $p=2\cdot q+r$ mit $r<q$ sein.

$$\text{Der Kettenbruch von } \sqrt{2} \text{ lautet also:} \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Die ersten Näherungsbrüche lauten (siehe Abbildung 2):

$$1=\frac{1}{1}=\frac{y_1}{x_1}\ ,\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{y_2}{x_2}\ ,1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}=\frac{y_3}{x_3}\ ,\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}=\frac{y_4}{x_4}.$$

Näherungsbrüche sind - wie der Name schon sagt - Brüche, die eine gegebene irrationale Zahl sehr gut approximieren. Man kann zum Beispiel zeigen, dass kein Bruch mit (natürlichem) Nenner ≤ 12 existiert, der sich von $\sqrt{2}$ weniger unterscheidet als $\frac{17}{12}$.

Sei $\frac{y_n}{x_n}$ der gekürzte n-te Näherungsbruch von $\sqrt{2}$. Dann gilt für den nächsten Kettenbruch

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{y_n}{x_n}} = \frac{y_n + 2x_n}{y_n + x_n}.$$

Der Bruch rechts ist dabei bereits vollständig gekürzt, denn für den grössten gemeinsamen Teiler gilt

$$\mathrm{ggT}(y_n + 2x_n, y_n + x_n) = \mathrm{ggT}(x_n, y_n + x_n) = \mathrm{ggT}(x_n, y_n) = 1.$$

Da nach Definition $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ ebenfalls vollständig gekürzt ist, können wir die Zähler und Nenner je gleichsetzen:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2x_n \\ x_{n+1} &= y_n + x_n. \end{aligned}$$

Wir finden die gleichen Rekursionsformeln wie oben für die Lösungen der beiden Pellschen Gleichungen!

Fazit: Alle Konfigurationen, bei denen 'Pythagoras' um 1 verfehlt wird, ergeben sich als Lösungen der beiden Pell-Gleichungen, durch die Entwicklung von $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n$ oder durch den Kettenbruch von $\sqrt{2}$.

4 Pell(+) $\longleftrightarrow$ "Dreieckszahl=Quadratzahl"

Betrachten wir noch einmal die Gleichung Pell(+): $y^2 - 2x^2 = 1$.

Satz:

Ist (y, x) Lösung von $y^2 - 2x^2 = 1$, dann ist (k, s) mit $k = \frac{y-1}{2}$ und $s = \frac{x}{2}$ Lösung von $\frac{k(k+1)}{2} = s^2$.

Ist (k, s) Lösung von $\frac{k(k+1)}{2} = s^2$ dann ist (y, x) mit $y = 2k + 1$ und $x = 2s$ Lösung von $y^2 - 2x^2 = 1$.

$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$ ist die k-te Dreieckszahl.

Jeder Lösung von Pell(+) entspricht eindeutig eine Dreieckszahl, die gleichzeitig eine Quadratzahl ist.

Beweis: Da $2x^2$ gerade ist, muss $y^2 = 2x^2 + 1$ ungerade sein. Damit ist auch y ungerade, also von der Form $y = 2k + 1$.

$y^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2x^2 + 1 \implies x^2 = 2k^2 + 2k = 2(k^2 + k)$.

Also ist x^2 gerade und damit auch x. Einsetzen von $x = 2s$ ergibt schliesslich

$$\frac{k(k+1)}{2} = s^2.$$

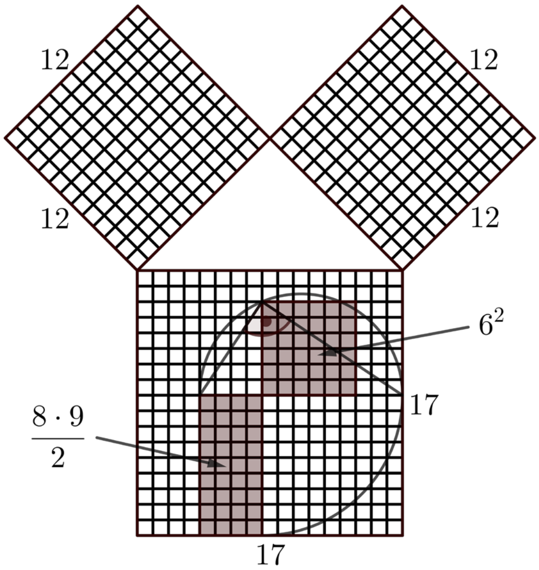
Die Schlussrichtungen lassen sich umkehren. □

Beispiele:

$$\text{Für } (y,x)=(3,2) \text{ gilt } 3^2-2\cdot 2^2=1 \iff \text{Für } (k,s)=(1,1) \text{ gilt } \frac{1\cdot 2}{2}=1=1^2$$

$$\mathbf{Für}\ \boldsymbol{(y,x)=(17,12)}\ \mathbf{gilt}\ \boldsymbol{17^2-2\cdot 12^2=1} \iff \mathbf{Für}\ \boldsymbol{(k,s)=(8,6)}\ \mathbf{gilt}\ \boldsymbol{\frac{8\cdot 9}{2}=1+\cdots+8=6^2}$$

$$\text{Für } (y,x)=(99,70) \text{ gilt } 99^2-2\cdot 70^2=1 \iff \text{Für } (k,s)=(49,35) \text{ gilt } \frac{49\cdot 50}{2}=1+\cdots+49=35^2$$



$$17^2-2\cdot 12^2=1$$
$$\iff$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8=\frac{8\cdot 9}{2}=6^2$$

Abbildung 3

Das dunkle Rechteck der Breite $\frac{8}{2}$ und der Höhe $8+1$ steht für $1+2+3+4+5+6+7+8=\frac{8\cdot 9}{2}$, das dunkle Quadrat für 6^2. Auch wegen des Höhensatzes sind beide Flächen gleich.

5 Pell($-$) $\longleftrightarrow$ Spezielle pythagoräische Zahlentripel

Satz:

Ist (y,x) Lösung von $y^2-2x^2=-1$, dann ist (k,x) mit $k=\frac{y-1}{2}$ Lösung von $k^2+(k+1)^2=x^2$.

Ist (k,x) Lösung von $k^2+(k+1)^2=x^2$ dann ist (y,x) mit $y=2k+1$ Lösung von $y^2-2x^2=-1$.

Jeder Lösung von $y^2-2x^2=-1$ entspricht eindeutig ein pythagoräisches Zahlentripel, bei dem sich die Kathetenlängen um 1 unterscheiden!

Beweis: Auch bei der Gleichung $y^2-2x^2=-1$ muss y^2 und damit y ungerade sein: $y=2k+1$.

$$y^2-2x^2=(2k+1)^2-2x^2=4k^2+4k+1-2x^2=-1 \implies 2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2=x^2$$

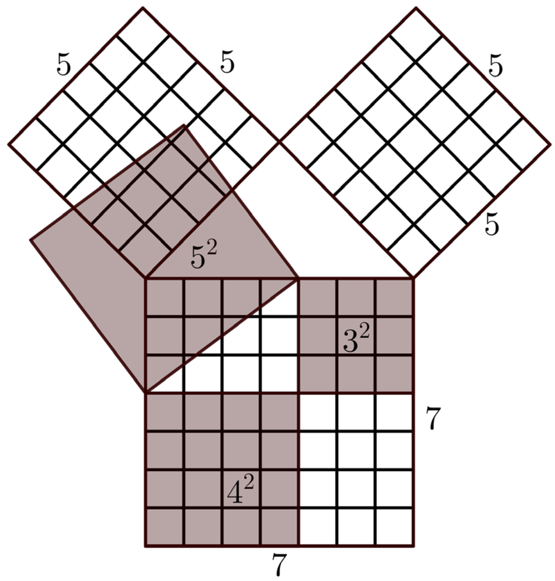
Die Schlussrichtungen lassen sich ebenfalls umkehren. $\square$

Beispiele:

$$\text{Für } (y,x) = (1,1) \text{ gilt } 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1 \iff \text{Für } (k,x) = (0,1) \text{ gilt } 0^2 + 1^2 = 1^2$$

$$\boldsymbol{\text{Für } (y,x) = (7,5) \text{ gilt } 7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1 \iff \text{Für } (k,x) = (3,5) \text{ gilt } 3^2 + 4^2 = 5^2}$$

$$\text{Für } (y,x) = (41,29) \text{ gilt } 41^2 - 2 \cdot 25^2 = -1 \iff \text{Für } (k,x) = (20,29) \text{ gilt } 20^2 + 21^2 = 29^2$$



$$7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1 \iff 3^2 + 4^2 = 5^2$$

Abbildung 4: Dem Bild von Eugen Jost in Abbildung 1 entspricht gerade das berühmteste pythagoräische Zahlentripel $3^2 + 4^2 = 5^2$.

6 Kommentar

Die hier vorgestellten Tatsachen sind natürlich alle längst bekannt.

Es ging den Autoren darum, aufzuzeigen, wie Kunst, die Bilder von Eugen Jost im Speziellen, spannende Reisen in die Welt der Mathematik ermöglichen können.

Auf der hier beschriebenen Reise sind wir dem Satz des Pythagoras, Pell-Gleichungen, Rekursionsformeln, dem Kosinussatz, Kettenbrüchen, Näherungsbrüchen, dem Euklidischen Algorithmus, Dreieckszahlen, Quadratzahlen, dem Höhensatz und pythagoräischen Zahlentripeln begegnet!

Es warten weitere Reisen! (Siehe zum Beispiel [1], [2], [3].)

Literatur, Quellen

[1] Eli Maor and Eugen Jost, Beautiful Geometry, Princeton University Press, 2014

[2] Peter Baptist, Albrecht Beutelsbacher, Alles ist Zahl, mit Motiven von Eugen Jost, IW Medien, 2009

[3] Peter Baptist, Eugen Jost, Carsten Miller, Alles ist Zahl: Mathematik andersARTig, Bayreuth, 2013