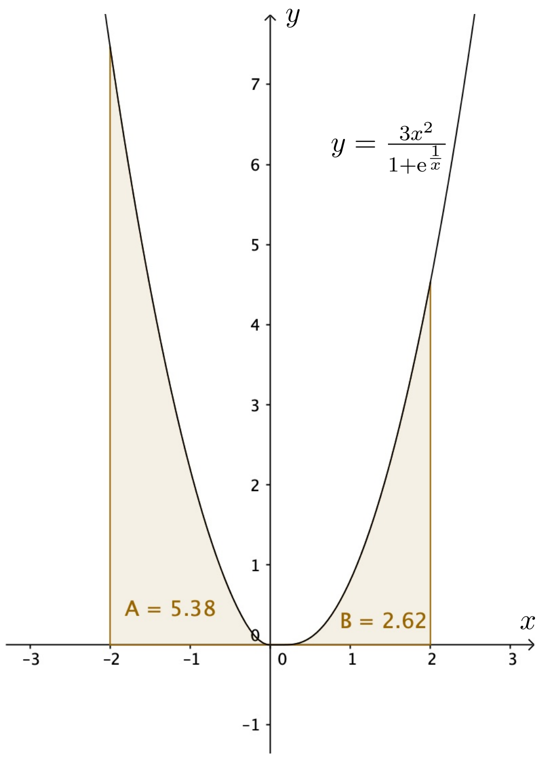
Ein schweres Integral

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Auf Instagram im Internet habe ich unter #welove.math eine Integrationsaufgabe gefunden, die sich zuerst allen Lösungsversuchen widersetzte.

Man beweise, dass

$$\int_{-2}^{2} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x = 8 \quad .$$



Mit GeoGebra lässt sich rasch ein Überblick gewinnen und auch das Resultat 8 gibt das Programm numerisch klaglos aus. Jedoch eine Stammfunktion ist mit allen mir zugänglichen Tricks auch mit Mathematica nicht zu haben. Die Flächeninhalte A und B der Teilflächen werden in Mathematica und in GeoGebra numerisch problemlos berechnet und ergeben in ihrer Summe genau 8.

Erst der Gedanke an eine Symmetrie führte weiter. Zwar ändert sich der Integrand, wenn man x durch $-x$ ersetzt, aber es könnte ja sein, dass sowohl links wie rechts der y-Achse an sich unlösbare Integrale entstehen, die sich aber zusammen irgendwie ergänzen oder aufheben.

Das Aufteilen in ein linkes und ein rechtes Integral, die Substitution von x durch $-u$ und schliesslich das Ersetzen der Integrationsvariable u durch x brachten dann den Durchbruch:

$$\int_{-2}^{2} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x - \int_{0}^{-2} \frac{3u^2}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}}\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} \frac{3u^2\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}+1}\mathrm{d}u = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} \frac{3x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{3x^2(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 3x^2\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_{-2}^{0} = 8$$