Sicherheitsparabel – Computational Physics Lab

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

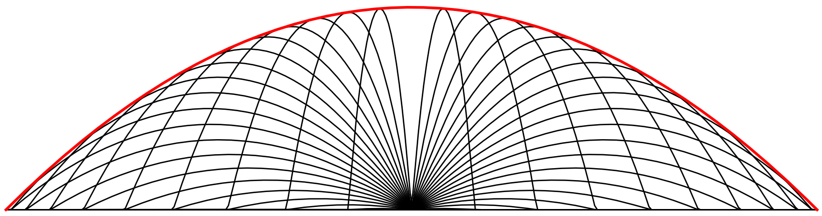
Im letzten Semester probierte ich mit meinen Schülerinnen und Schülern des Schwerpunktfachs Physik etwas Neues aus: ein "computational physics lab". Zuerst lernten wir mit Hilfe von Templates, die ich aus den Internet zusammensuchte, etwas Python und wendeten diese Programmiersprache gemeinsam auf physikalische Probleme an. Beispielsweise berechneten wir den äusseren Lagrangepunkt L_2 im System Erde-Sonne. Die Bestimmungsgleichung ist einfach aufzustellen – eine Anwendung von $F = ma$ – aber nicht geschlossen zu lösen. Die Bestimmungsgleichung wurde in die Form $f(x) = 0$ gebracht. Dann musste die Klasse eine Vorlage so umschreiben, dass die Funktion $f(x)$ im erwarteten Bereich der Nullstelle grafisch dargestellt wird. So wurde die Nullstelle etwas eingegrenzt. Anschliessend bestimmten sie die Nullstelle genauer mit einem Intervallhalbierungsverfahren aus dem SciPy-Modul. Die Schülerinnen und Schüler brachten ihren eigenen Laptop mit, auf dem sie vorgängig das Anaconda-Paket installierten. In diesem Paket sind alle wesentliche Komponenten enthalten. Die Rückmeldungen der Klasse waren soweit gut: Die meisten wussten bereits, dass Python in ihrem Wunsch-Studium eingesetzt wird und waren entsprechend motiviert.

Damit die Leistung bewertet werden konnte, erhielten alle zwanzig Schülerinnen und Schüler in der zweiten Semesterhälfte ein eigenes Projekt, das sie selbständig bearbeiten mussten. Ich wollte verhindern, dass sich jemand ums Programmieren drücken kann. Im Folgenden ist ein Beispiel dargestellt. Ich habe es nicht verwendet, weil dieser Text von meinen Schülerinnen und Schülern online gefunden werden kann.

Eine Kanone schiesst wild um sich. Wo muss man sich hinstellen, damit man gar nicht oder mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit getroffen wird?

Eine analoge Aufgabe ist 1641 vom italienischen Physiker Evangelista Torricelli, einem Schüler von Galilei, gelöst worden. Zeichnet man eine Schar von Wurfparabeln gleicher Abschuss-Schnelligkeit υ zu verschiedenen Elevationswinkeln α, so deckt diese Schar nicht die ganze xy-Ebene ab. Torricelli hat als Erster eine Einhüllende (Enveloppe) berechnet, die "parabola di sicurezza". Die Rechnung ist heute Standard und soll hier nicht wiederholt werden. Bleibt man ausserhalb dieser "Sicherheitsparabel", siehe Abbildung 1, so kann man nicht getroffen werden. Aber was ist, wenn man in Reichweite der Geschosse bleiben muss? Stellt man sich besser in die Nähe der Kanone oder möglichst weit weg?

Abbildung 1: Wurfparabelschar mit Einhüllender (parabola di sicurezza)



2 Theorie

Die Gleichungen des schiefen Wurfs sind jeder Lehrkraft wohlbekannt:

$$y = x \cdot \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} \qquad \text{Wurfparabel} \tag{1}$$

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2} \qquad \text{Einhüllende (Sicherheitsparabel)} \tag{2}$$

$$r = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{g} \qquad \text{Wurfweite} \tag{3}$$

Wir nehmen an, dass die Elevationswinkel α auf $[0, \pi/2[$ gleichverteilt seien.

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \tag{4}$$

wobei N die normierte Anzahl Schüsse ist. Wir brauchen die Verteilung nur vom Winkel α auf die Wurfweite r umzurechnen. Im Infinitesimalkalkül muss dazu lediglich "der Bruch erweitert werden".

$$\frac{dN}{d\alpha} = \frac{dN}{dr}\frac{dr}{d\alpha} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \tag{5}$$

$$\frac{dN}{dr} = \frac{2}{\pi}\frac{d\alpha}{dr} = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{rg}{v^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{dN}{dr} = \frac{g}{\pi v^2}\frac{1}{\sqrt{1-(gr/v^2)^2}} \tag{7}$$

Bei solchen Rechnungen schauen mich die Schülerinnen und Schüler jeweils ziemlich schräg an. Können wir sicher sein, dass sie stimmt? Wird der Elevationswinkel α von 0 auf $\pi/2$ erhöht, so wächst die Schussweite zuerst von 0 auf ein Maximum und vermindert sich anschliessend wieder auf 0. Das Intervall $[0, \pi/2[$ wird also zweimal auf das Intervall $[0, r_{\max}]$ abgebildet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte dN/dr könnte noch einen weiteren Faktor zwei enthalten.

3 Simulation

Eine Simulation ist genau das richtige Instrument, um die Rechnung zu prüfen. Bestätigt sie die Rechnung, sind wir beruhigt. Liefert die Simulation etwas anderes, müssen wir die Rechnung verbessern.

Eine Simulation mit Python war schnell geschrieben, jedenfalls schneller, als Abbildung 2 nach meinen Wünschen zu formatieren. Die Tücken impliziter Defaults in verschachtelten Modulen sind würdige Nachfolger des ausgestorbenen Spaghetticodes.

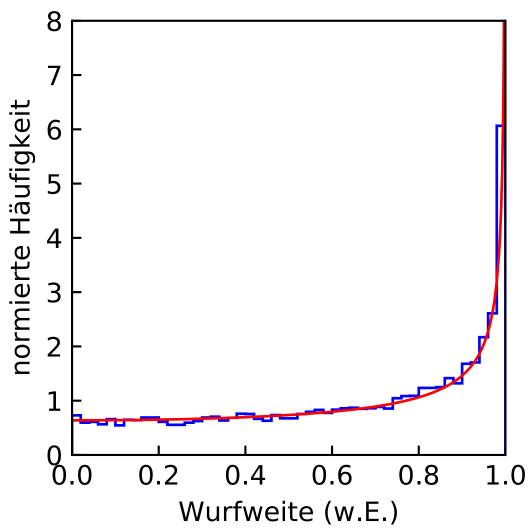


Abbildung 2: Simulierte Verteilung der Wurfweiten (Stufen) mit theoretisch berechneter Verteilung (glatte Kurve). Die Simulation erfolgte nur über 10 000 Würfe, damit die zufälligen Unterschiede zwischen Simulation und Theorie sichtbar bleiben. Damit die Theorie zur Simulation passt, musste die ursprünglich berechnete Verteilungsfunktion (Gleichung 8) mit einem Faktor Zwei multipliziert werden.

4 Schlusswort

Die Simulation hat gezeigt, dass die Wurfweiten wie vermutet nach

$$\frac{dN}{dr} = \frac{2g}{\pi v^2} \frac{1}{\sqrt{1-(gr/v^2)^2}} \tag{8}$$

verteilt sind. Die grösste Dichte findet in der Nähe der maximalen Wurfweite. Man muss den optimalen Winkel also gar nicht so genau treffen, wenn man etwas möglichst weit werfen will. Die Rechnung kann leicht erweitert werden, denn wir haben nur den eindimensionalen Fall betrachtet. Die Kanone könnte ja nicht nur den Höhenwinkel zufällig einstellen, sondern auch den Seitenwinkel.

Die Schülerinnen und Schüler waren motiviert, aber leider nicht besser als sonst. Die Mühen mit der Abstraktion oder dem systematischen Denken blieben jedenfalls erhalten, die Mühen mit der Terminplanung sowieso. Für mich war der Unterricht mit Beamer und ohne Papier auch Neuland: Ich stellte die Templates online zur Verfügung und verlangte zum Abschluss ein digitales Dokument (bevorzugt ein Jupyter Notebook, das Text, Code und Grafiken kombinieren kann). Das Bewerten ist mir aber genauso schwer gefallen wie zu analogen Zeiten.

Computational Physics ist ein dankbarer Unterrichtsgegenstand mit einer langen Geschichte. Das früheste Beispiel, das ich kenne, war das (numerische) Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou Experiment[1] aus dem Jahr 1953, bei dem quasiperiodisches Verhalten in einem nichtlinearen Schwingungssystem entdeckt wurde. Informatik gehört – neben Arithmetik, Algebra und anderem – zum Handwerkszeug jeder Physikerin oder jedes Physikers. Ich finde, wir sollten das unseren Schülerinnen und Schülern auch zeigen dürfen.

5 Anhang

Und weil es noch etwas Platz auf der Seite hat: Ein Beispiel aus dem computational physics lab (Abb. 3).

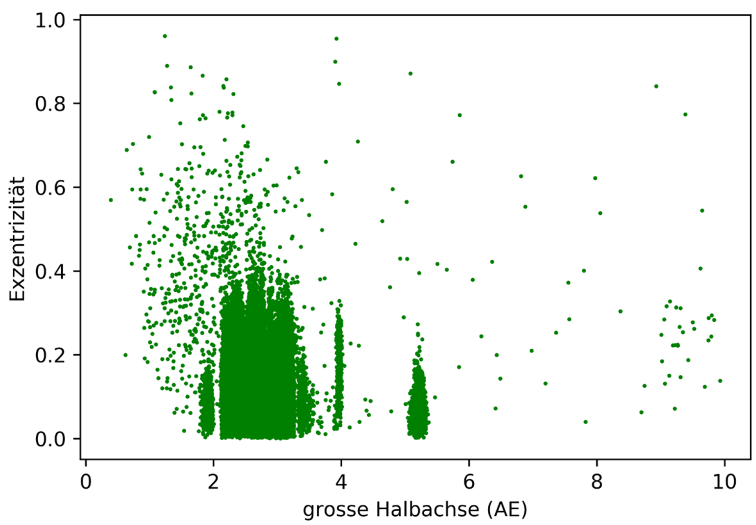


Abbildung 3: Numerische Exzentrizität gegen grosse Halbachse für 100 000 Asteroiden. Wir haben geübt, aus einem grösseren Datensatz vom Minor Planet Center die gewünschten Informationen zu extrahieren. Die Lücken heissen "Kirkwood-gaps" und sind auf Bahnresonanzen mit den grossen Planeten zurückzuführen.

9. März 2020, Lie.

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou-Experiment (7. März 2020)