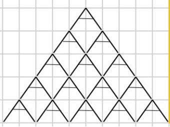
Menschenpyramide

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Auf Instagram im Internet habe ich unter #purebloomcbd eine Menschenpyramide gefunden, bei der sich die Frage stellt, wie gross denn die Belastungen auf Händen und Füssen der beteiligten Menschen wohl sind. Wir nehmen an, dass jede Person in dieser Pyramide das Gewicht 1 hat und dass bei dieser Art der Abstützung je die Hälfte des Gewichts auf die Füsse resp. auf die Hände fallen. Zusätzlich nehmen wir an, dass dank der Bauchmuskeln die Kräfte der Füsse und Hände auf die Unterlage stets genau vertikal gerichtet sind. Damit drängt sich eine Excel-Tabelle auf, in der aufgelistet wird, welches Gewicht auf dem Gesäss jeder Person lastet.

Math. Abstraktion			Nenner					Zähler						Anzahl Personen
						1		0						0
					2		1		1					1
				4		3		6		3				3
			8		7		17		17		7			6
		16		15		40		50		40		15		10
	32		15+16		15+16 & 40+16		40+16 & 50+16		50+16 & 40+16		40+16 & 15+16		15+16	15

In der Zeile 0 haben wir das Gewicht 0, weil auf der obersten Person kein Gewicht lastet. In der Zeile 1 haben wir links und rechts je das Gewicht $1/2$. Wir notieren in der Tabelle mit den Zählern zwei Einsen und den Nenner 2 ganz links. In der Zeile 2 wird es interessanter: Das Beingewicht $1/2$ der obersten Person verteilt sich zur Hälfte auf die Beine und zur Hälfte auf die Arme der linken Person der Zeile 2. Zum eigenen Beingewicht $1/2$ der linken Person kommt also noch $1/4$ dazu. Somit drückt sie mit ihren Beinen mit $3/4$ Gewicht nach unten. Auch mit den Händen drückt sie mit $3/4$ nach unten. Dazu kommt an diesem mittleren Punkt noch das Gewicht der Füsse der rechten Person, das natürlich auch $3/4$ ist. In der Mitte hat man also das Gewicht $6/4$. Ganz rechts hat man wegen der Symmetrie wieder $3/4$. In der Tabelle notieren wir die Zähler 3, 6, 3 und den Nenner 4 ganz links aussen. Für jeden Punkt im Innern der Pyramide wird das Gesamtgewicht nun folgendermassen bestimmt: Man halbiert die Gewichte der beiden darüber liegenden Punkte und addiert noch zweimal $1/2$, also 1. In der Tabelle der Zähler addiert man zwei nebeneinander liegende Zahlen und addiert den doppelt so grossen Nenner der nachfolgenden Zeile, was der Addition des Gewichts 1 entspricht. Am Rand der Tabelle mit den Zählern stehen die um 1 reduzierten Zweierpotenzen, weil dort die Gewichte als Summe der inversen Zweierpotenzen berechnet werden: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 15/16$. Das Bildungsgesetz der Tabelle ähnelt demjenigen der Binomialkoeffizienten mit dem entscheidenden Unterschied, dass nicht nur zwei benachbarte Zahlen einer Zeile n addiert werden, sondern zusätzlich noch der Nenner der nächsten Zeile $n+1$. Die Summe dieser drei Zahlen ergibt die Zahl in der Zeile $n+1$ zwischen den beiden Zahlen in Zeile n. Bei der untersten Zeile schlüsseln wir die Gewichte auf nach Händen und Füssen und setzen zwischen die beiden Zahlen das Zeichen &. Es erstaunt, dass die grösste Last auf Händen resp. Füssen unten in der Mitte nur $66/32$ beträgt, also wenig mehr als 2.

Natürlich stellt sich jetzt die Frage, ob es möglich ist, eine geschlossene Formel für die Zahlen der Tabelle zu finden. Zu diesem Zweck schreiben wir die Tabelle in anderer Form und erweitern sie um ein paar Zeilen und Spalten, damit die Chance besteht, ein Bildungsgesetz zu finden. Die Variable n

gibt die Zeilennummer an, beginnend mit 0, die Variable s gibt analog die Spaltennummer an. Addiert man in jeder Zeile alle Zahlen und dividiert durch den zugehörigen Nenner dieser Zeile, erhält man das Gesamtgewicht in dieser Zeile und somit – weil jede Person das Gewicht 1 hat – die Anzahl Personen der ganzen Pyramide oberhalb bis und mit dieser Zeile. Das sind die sogenannten Dreieckszahlen.

			s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n	Anzahl Personen	Nenner																		
0	0	1		0																
1	1	2		1	1															
2	3	4		3	6	3														
3	6	8		7	17	17	7													
4	10	16		15	40	50	40	15												
5	15	32		31	87	122	122	87	31											
6	21	64		63	182	273	308	273	182	63										
7	28	128		127	373	583	709	709	583	373	127									
8	36	256		255	756	1212	1548	1674	1548	1212	756	255								
9	45	512		511	1523	2480	3272	3734	3734	3272	2480	1523	511							
10	55	1024		1023	3058	5027	6776	8030	8492	8030	6776	5027	3058	1023						
11	66	2048		2047	6129	10133	13851	16854	18570	18570	16854	13851	10133	6129	2047					
12	78	4096		4095	12272	20358	28080	34801	39520	41236	39520	34801	28080	20358	12272	4095				
13	91	8192		8191	24559	40822	56630	71073	82513	88948	88948	82513	71073	56630	40822	24559	8191			
14	105	16384		16383	49134	81765	113836	144087	169970	187845	194280	187845	169970	144087	113836	81765	49134	16383		
15	120	32768		32767	98285	163667	228369	290691	346825	390583	414893	414893	390583	346825	290691	228369	163667	98285	32767	
16	136	65536		65535	196588	327488	457572	584596	703052	802944	871012	895322	871012	802944	703052	584596	457572	327488	196588	65535

Nun geht es darum, einen Term $x_{n,s}$ zu finden, der für jede Zeile n und Spalte s den Wert in der Tabelle liefert und die Rekursionformel $x_{n+1,s+1} = x_{n,s} + x_{n,s+1} + 2^{n+1}$ erfüllt $(0 \leq s \leq n)$.

Zuerst habe ich die Spaltenfolgen untersucht und die Differenzenfolgen vertikal daneben aufgelistet. Als Beispiel soll hier die Spalte $s = 4$ dienen.

		Randzahlen										
s=4		15				Differenzen der Randzahlen						
		87	72			57		Differenzen der Differenzen der Randzahlen				
		273	186	114			42	15				
		709	436	250	136			22	20			
		1674	965	529	279	143			7	15		
		3734	2060	1095	566	287	144			1	6	
		8030	4296	2236	1141	575	288	144			0	1
		16854	8824	4528	2292	1151	576	288				
		34801	17947	9123	4595	2303	1152	576				
		71073	36272	18325	9202	4607	2304	1152				
		144087	73014	36742	18417	9215	4608	2304				
		290691	146604	73590	36848	18431	9216	4608				
		584596	293905	147301	73711	36863	18432	9216				

Es fällt auf – und das ist bei allen Spalten so –, dass die sogenannten Randzahlen der vertikal notierten Differenzenfolgen zunehmen und dann konstant bleiben, hier von 15 bis 144. Die Randzahlen sind die zuoberst notierten Startwerte der Differenzenfolgen. Die Konstanz bedeutet, dass die Differenzenfolgen ab einer gewissen Nummer – hier ab der fünften – besondere Folgen sind: Die Differenzenfolgen sind ab dort immer die gleichen geometrischen Folgen mit dem Quotienten 2. Weiter fällt auf, dass die Differenzen der Differenzen der Randzahlen Binomialkoeffizienten der $(s+2)$-ten Zeile des Pascal-Dreiecks sind.

Als anderen Ansatz habe ich versucht, geschlossene Terme für die Spalten der Tabelle zu finden. Das ist mir für die ersten paar Spalten gelungen. Klar ist der Fall $s = 0$: $x_{n,0} = 2^n - 1$. Für $s = 1$ hat die Internetseite «https://oeis.org/?language=german» einen Vorschlag geliefert: $x_{m,1} = 6 \cdot 2^m - m - 5 = 3 \cdot 2^{m+1} - m - 5$. Hier ist $m = n - 1$. Bei der Spalte $s = 2$ führte die Rekursionsbeziehung der Tabelle

$$x_{m+1,2} - x_{m,2} = x_{m+1,1} + 2^{m+3} = 6 \cdot 2^{m+1} - (m+1) - 5 + 2^{m+3} = 5 \cdot 2^{m+2} - m - 6$$

(hier ist $m = n - 2$) zusammen mit dem Ansatz $x_{m,2} = 5 \cdot 2^{m+2} - (am^2 + bm + c)$ mit den Parametern a, b und c zum Ziel:

$$x_{m,2} = 5 \cdot 2^{m+2} - \frac{m}{2}(m + 11) - 17 \qquad (m = n - 2)$$

Analog ergab sich:

$$x_{m,3} = 7 \cdot 2^{m+3} - \frac{m}{6}(m^2 + 18m + 119) - 49 \qquad (m = n - 3)$$

Man erkennt, dass neben den Zweierpotenzen Polynome von immer höherem Grad in m subtrahiert werden. Ob diese Polynome sich durch Binomialkoeffizienten ausdrücken lassen, bleibt vorerst offen.

So bin ich zurückgekehrt zum ersten Weg mit den Differenzenfolgen. Zuerst wollte ich die Randzahlen $r_{s,j}$ für die Spalte s bestimmen. Während für alle s die erste für $j=0$ mit $r_{s,0}=2^s-1$ sofort klar war, musste die letzte, ab der dann lauter Konstanten auftreten, bestimmt werden. Nach einigem Suchen ergab sich:

$$r_{s,s+1}=2^s(2s+1)$$

Das ist die Konstante, von der aus sich die anderen Randzahlen $r_{s,s}$, $r_{s,s-1}$, ... , $r_{s,0}$ absteigend bestimmen lassen. Das geschieht durch fortlaufendes Subtrahieren von Binomialkoeffizienten, von denen linear abnehmende Vielfache genommen werden müssen. Längeres Probieren lieferte schliesslich:

$$r_{s,j}=2^s(2s+1)-\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}$$

Für $j=0$ verfiziert man mittels der Formel $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$, dass $r_{s,0}=2^s-1$. Für $j=s$ ergibt sich korrekterweise $r_{s,s}=2^s(2s+1)-1$ und für $j>s$ wegen der wegfallenden Summe der konstante Wert $2^s(2s+1)$. Sobald man die Randzahlen kennt, kann man für jedes s die ursprüngliche Folge $x_{n,s}$ durch das Aufaddieren der mit Binomialkoeffizienten gewichteten Randzahlen berechnen:

$$x_{n,s}=\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}r_{s,j}=\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\left(2^s(2s+1)-\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}\right)$$

Da der erste Summand in der Klammer nicht von j abhängt, können wir vereinfachen und erhalten:

$$\boxed{x_{n,s}=2^n(2s+1)-\sum_{j=0}^{n-s}\left(\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}\right)\quad,\quad 0\le s\le n}$$

Damit sind die oben angesprochenen Polynome doch noch durch Binomialkoeffizienten ausgedrückt. Jetzt bleibt noch zu beweisen, dass diese Schlussformel für alle Werte der Tabelle auch die Rekursionskonstruktion der Tabelle erfüllt: $x_{n,s}+x_{n,s+1}+2^{n+1}=x_{n+1,s+1}$

Beweis: Wir führen den Beweis rückwärts und starten also bei der Behauptung, welche wir äquivalent so lange umformen, bis eine wahre Aussage entsteht.

$2^n(2s+1)-\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}+$
$2^n(2s+3)-\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}+2^{n+1}\overset{?}{=}$
$2^{n+1}(2s+3)-\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}$

Alle vorkommenden Zweierpotenzen heben sich weg: $2^n(2s+1)+2^n(2s+3)+2^{n+1}\overset{\checkmark}{=}2^{n+1}(2s+3)$

Damit ist die Gleichheit dieser Bestandteile gezeigt und es bleibt noch Folgendes zu beweisen:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}+\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}\overset{?}{=}$
$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}$

Von der Summe der rechten Seite schreiben wir den letzten Summanden separat:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}+\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}\overset{?}{=}$
$\binom{n-s}{n-s}\sum_{k=0}^{s+1-(n-s)}(s-(n-s)-k+2)\binom{s+3}{k}+\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}$

Jetzt können wir die zweite Summe der linken Seite nach rechts nehmen und die Grundidentität der Binomialkoeffizienten aus dem Pascal-Dreieck anwenden:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+3}{k}+\sum_{j=0}^{n-s-1}\left(\binom{n-s}{j}-\binom{n-s-1}{j}\right)\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}$

Da im nächsten Schritt der neu entstehende Binomialkoeffizient die untere Zahl $j-1$ aufweist, können wir den Summationsindex j der letzten Summe ab 1 anstatt ab 0 laufen lassen. So erhalten wir:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+3}{k}+\sum_{j=1}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j-1}\sum_{k=0}^{s+1-j}(s-j-k+2)\binom{s+3}{k}$

Nun substituieren wir dort $j'=j-1$:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+3}{k}+\sum_{j'=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j'}\sum_{k=0}^{s-j'}(s-j'-k+1)\binom{s+3}{k}$

Die beiden Summen über j schreiben wir auf die linke Seite und ersetzen j' durch j:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+3}{k} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+3}{k}$

Nun teilen wir die Binomialkoeffizienten mit ihrer Grundidentität so auf, dass alle einheitlich aussehen, nämlich oben entweder $n-s-1$ oder $s+2$ haben:

$\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}+\sum_{j=0}^{n-s}\binom{n-s-1}{j-1}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}$
$-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k-1} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k}+\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k-1}$

Jetzt müssen wir die Summationsgrenzen anpassen, da gewisse Binomialkoeffizienten verschwinden:

$\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}+\sum_{j=1}^{n-s}\binom{n-s-1}{j-1}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}$
$-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k}-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=1}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k-1} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k}+\sum_{k=1}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k-1}$

Von der ersten und dritten Summe bleibt nur noch ein Summand für $j=n-s-1$ übrig und in der zweiten Summe ersetzen wir den Summationsindex $j'=j-1$:

$\binom{n-s-1}{n-s-1}\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k}+\sum_{j'=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j'}\sum_{k=0}^{s-j'-1}(s-j'-k)\binom{s+2}{k}$
$-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=1}^{s-j}(s-j-k+1)\binom{s+2}{k-1} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k=0}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k}+\sum_{k=1}^{2s+1-n}(2s-n-k+2)\binom{s+2}{k-1}$

Jetzt hebt sich die erste Summe der rechten mit der ersten Summe der linken Seite weg. Anstelle von j' schreiben wir wieder j und ausserdem setzen wir in zwei Summen, die mit $k=1$ beginnen, $k'=k-1$:

$\sum_{j=0}^{n-s-1}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k=0}^{s-j-1}(s-j-k)\binom{s+2}{k}-\sum_{j=0}^{n-s-2}\binom{n-s-1}{j}\sum_{k'=0}^{s-j-1}(s-j-k')\binom{s+2}{k'} \stackrel{?}{=}$
$\sum_{k'=0}^{2s-n}(2s-n-k'+1)\binom{s+2}{k'}$

Von der linken Seite bleibt nur noch ein Summand für $j=n-s-1$ übrig, und wieder schreiben wir statt k' nun k:

$\binom{n-s-1}{n-s-1}\sum_{k=0}^{s-(n-s-1)-1}(s-(n-s-1)-k)\binom{s+2}{k} \stackrel{\checkmark}{=} \sum_{k=0}^{2s-n}(2s-n-k+1)\binom{s+2}{k}$

Damit ist die Gleichheit bestätigt.