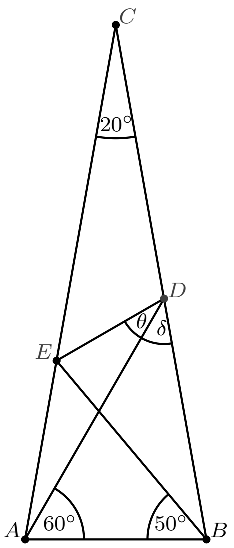
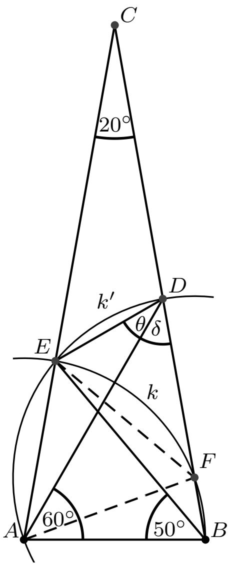
Von der Kronenfunktion zu der Blumenkurve

Bruno Cappelli, bruno.cappelli@kzo.ch

Die genaue Untersuchung einer geometrischen Aufgabe zur Berechnung eines berühmten 30°-Winkels führt zu einer kronenartigen Funktion mit Spitzen und einer symmetrischen Kurve in Form einer Blume.

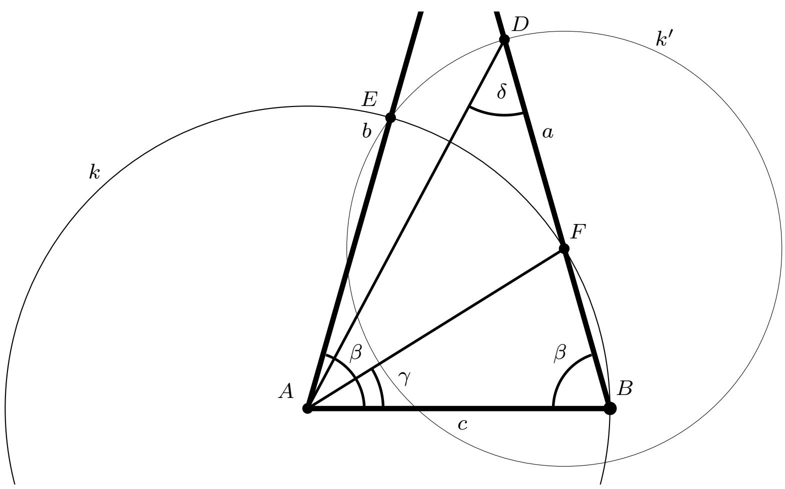
Die Aufgabe wurde schon im VSMP-Bulletin Nr. 67, 1995 von Peter Gallin in einem «Comix» thematisiert. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Scheitelwinkel $\gamma = 20°$. Zwei Winkel von $60°$ bzw. $50°$ werden von der Basis aus bei A bzw. B eingetragen und ergeben die Punkte D bzw. E auf den beiden Schenkeln des Dreiecks. Man kann zeigen, dass der Winkel $\theta = \sphericalangle EDA = 30°$. Zuerst wird der Punkt F auf dem Schenkel BC mit dem Kreis k (Radius AB und Zentrum A) konstruiert. Da der Winkel $EBA = 50°$ und $BAE = 80°$, muss das Dreieck ABE gleichschenklig sein und der Punkt E liegt auf dem Kreis k. Das Dreieck AFE ist gleichseitig und das Dreieck FDA ist wegen $\delta = 40°$ gleichschenklig.





Also geht der Kreis k' (Radius FE und Zentrum F) durch D. Da das Dreieck FDE auch gleichschenklig ist, sind alle Winkel eindeutig bestimmbar. (Siehe Originalcomix via QR-Code)

Gibt es noch andere Winkel γ, die eine so schön aufgehende Figur ergeben und wieso kommt man mit der Konstruktion des «Comix» genau auf D? Also wieso beträgt δ genau $40°$? Um diese Fragen zu beantworten, verallgemeinern wir die Aufgabe wie folgt:

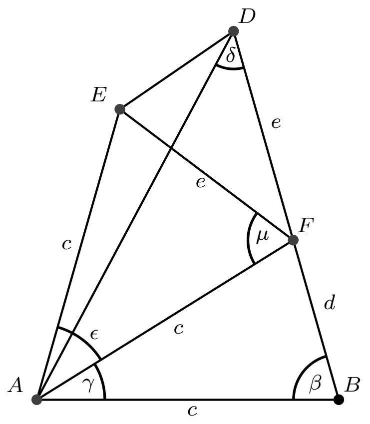


Wir starten mit der Basis $AB = c$ des Dreiecks und konstruieren den Kreis k mit Radius c und Zentrum A. Der Winkel β wird einmal bei A und dann bei B eingetragen. So finden wir die beiden

Schnittpunkte E und F auf dem Kreis k. Die Strecken AE und BF werden verlängert und ergeben die beiden Schenkel b und a des gleichschenkligen Dreiecks mit Basiswinkel β. Den Scheitelwinkel γ des Dreiecks finden wir auch bei BAF, und er lässt sich als Funktion von β angeben:

$$\gamma = \pi - 2\beta \tag{1}$$

Jetzt wird der Kreis k' mit Radius EF und Mittelpunkt F analog zum Verfahren im «Comix» konstruiert. Sei D der Schnittpunkt zwischen dem Kreis k' und dem Schenkel a.



Wir suchen dann einen algebraischen Ausdruck für den Winkel δ in Abhängigkeit von β, indem wir die Trigonometrie im Dreieck ABD anwenden. Aus dem Sinussatz folgt:

$$\frac{c}{\sin\delta} = \frac{AD}{\sin\beta}$$

Die Gleichung wird nach $\sin\delta$ aufgelöst:

$$\sin\delta = \frac{c}{AD}\sin\beta \tag{2}$$

Sei d die Strecke BF und e die Strecke FD.

Nach dem Cosinussatz folgt:

$$AD^2 = c^2 + (d+e)^2 - 2c(d+e)\cos\beta \tag{3}$$

Jetzt drücken wir die Strecken d und e in Abhängigkeit von c aus. Die Strecke d ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basiswinkel β bei B und F. Es folgt mit Trigonometrie:

$$d = 2c\cos\beta$$

Ähnlich lässt sich auch e ermitteln, weil die Dreiecke FDE und AFE gleichschenklig sind und die gemeinsame Seite FE der Länge e besitzen. Im Dreieck AFE folgt also:

$$e = 2c\cos\mu$$

wobei μ der Basiswinkel im Dreieck AFE ist. Im Dreieck AFE finden wir eine Beziehung zwischen dem Scheitelwinkel ϵ und dem Basiswinkel μ:

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$$

Da $\epsilon = \beta - \gamma$ und mit (1), folgt:

$$\mu = \frac{2\pi - 3\beta}{2} \tag{4}$$

Jetzt können wir die beiden Ausdrücke für d und e in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} AD^2 &= c^2 + 4c^2(\cos\beta + \cos\mu)^2 - 4c^2(\cos\beta + \cos\mu)\cos\beta \\ &= c^2 \cdot (1 + 4(\cos\beta + \cos\mu)^2 - 4(\cos\beta + \cos\mu)\cos\beta) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergeben:

$$\begin{aligned} AD^2 &= c^2 \cdot (1 + 4\cos^2\mu + 4\cos\mu\cos\beta) \\ &= c^2 \cdot (1 + 4\cos\mu(\cos\mu + \cos\beta)) \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (4) für μ gilt dann:

$$AD^2 = c^2 \cdot \left[1 + 4\cos\left(\frac{2\pi - 3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi - 3\beta}{2}\right) + \cos\beta\right)\right]$$

Mit dem Einsetzen in (2) bekommen wir folgende Formel für den Winkel δ:

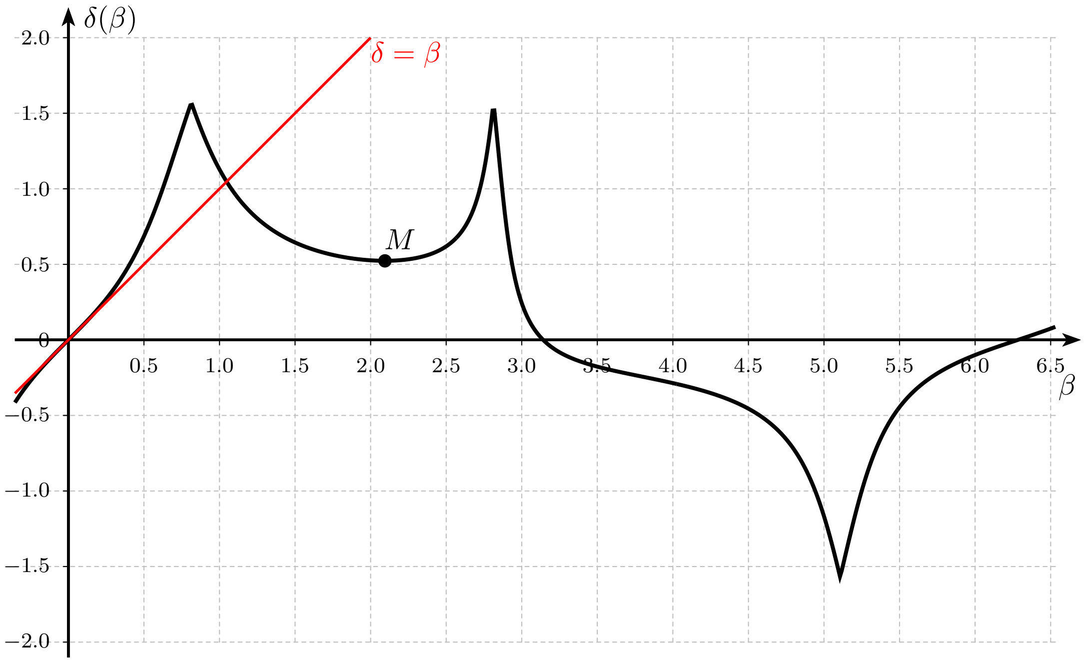
$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{1 + 4\cos\left(\frac{2\pi-3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi-3\beta}{2}\right) + \cos\beta\right)}}\right)$$

oder mit der trigonometrischen Beziehung

$$\cos\left(\frac{2\pi - 3\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi - 3\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\beta - \pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta(\beta) = \arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sqrt{1 + 4\sin\left(\frac{3\beta-\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{3\beta-\pi}{2}\right) + \cos\beta\right)}}\right)} \qquad (5)$$

Diese Funktion hat eine Periode von 4π und besitzt charakteristische Spitzen, wo der Winkel δ genau $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ beträgt. Die β-Werte für die Kronenspitzen geben keine einfache Ausdrücke und die algebraische Ermittlung dieser Werte ist aufwendig. Die Winkelhalbierende $\delta = \beta$ ist Tangente im Ursprung. Hier ist der Bereich für $0 \leq \beta \leq 2\pi$ abgebildet:



Berechnen wir jetzt δ für $\beta = \frac{4\pi}{9}$ (also 80°) mit der Formel (5):

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sqrt{1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{4\pi}{9}\right)}}\right)$$

Mit $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ und alles unter die Wurzel gebracht, folgt:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{1}{2} + \cos\frac{4\pi}{9}\right)}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\sin^2\frac{4\pi}{9}}{2 + 2\cos\frac{4\pi}{9}}}\right)$$

Wir wandeln den Sinus in einen Cosinus um:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{4\pi}{9}}{1+\cos\frac{4\pi}{9}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\frac{4\pi}{9}}\right)$$

Die Doppelwinkelformel $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ liefert:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\right)}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sin^2\frac{2\pi}{9}}\right) = \frac{2\pi}{9}$$

also $\delta = 40°$, was man erwartet hat.

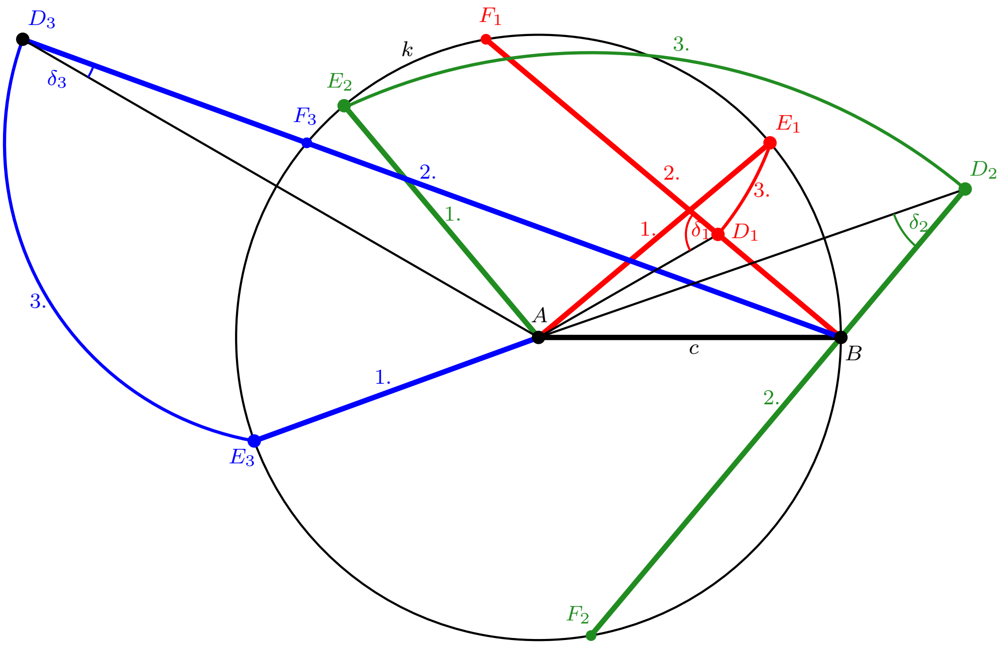
Mit Hilfe von einem CAS-Programm und Ausprobieren findet man noch andere Werte, die «schöne» Winkel ergeben. Bei $\beta = \frac{2\pi}{3}$ hat man das lokale Minimum M in der Kronenmulde.

β	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{11}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{14\pi}{15}$
δ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{11}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

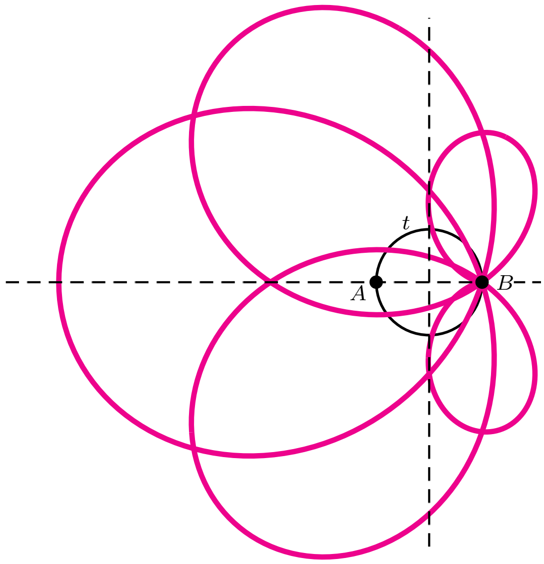
Wenn man mit dem folgenden Verfahren den Punkt D für $0 \le \beta \le 2\pi$ konstruiert, ergibt sich eine interessante Ortslinie für D und man kann die Funktion $\delta(\beta)$ geometrisch veranschaulichen:

1. Konstruiere den Strahl mit Winkel β zu AB mit Startpunkt A. β wird oberhalb von AB mit positivem Drehsinn eingetragen und der Schnittpunkt des Strahls mit dem Kreis k ist E.
2. Konstruiere die Gerade durch B mit Winkel β zu AB. β wird oberhalb von AB mit negativem Drehsinn eingetragen und der Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis k ist F.
3. Konstruiere den Kreisbogen mit Zentrum F und Radius FE mit Startpunkt E und in die negative Drehrichtung. Der erste Schnittpunkt mit der Geraden BF ist D.

Im nächsten Bild sind drei Konstruktionsbeispiele für $\beta_1 = 40°$, $\beta_2 = 130°$ und $\beta_3 = 200°$ abgebildet. Auch wurden die dazugehörigen Winkel δ eingetragen. Die Beträge dieser Winkel stimmen mit den Werten der Kronenfunktion überein, wenn man als δ immer den spitzen Winkel zwischen den Geraden AD und BD nimmt, wie das bei β_1 der Fall ist. Das Vorzeichen des Winkels δ lässt sich mit dem Vektor $\overrightarrow{AE}$ bestimmen. Das Vorzeichen der y-Komponente dieses Vektors ist gerade das Vorzeichen von δ, wie beim dritten Fall, wo δ_3 negativ ist.



Mit dem obigen Konstruktionsverfahren für $0 \leq \beta \leq 2\pi$ und mit umgekehrten Drehrichtungen bei allen drei Konstruktionspunkten für $-2\pi \leq \beta \leq 0$ bekommt man eine sehr schöne, geschlossene Ortslinie für D in Form einer Blume. Der Kreis t gehört nicht zur Ortslinie aber seine Schnittpunkte mit der Kurve ergeben die Spitzen der Kronenfunktion. An diesen Punkten ist δ ein rechter Winkel und t der dazugehörige Thaleskreis.



Wenn man das Zentrum dieses Thaleskreises mit Durchmesser c als Mitte eines Koordinatensystems wählt, kann man die Koordinaten des Punktes D in Abhängigkeit von c und β ausdrücken. Aus der Abbildung links von Gleichung (2) lassen sich die Koordinaten für D relativ leicht bestimmen:

$$D\left(\frac{c}{2} - (d+e)\cos\beta \,\middle|\, (d+e)\sin\beta\right)$$

Somit lässt sich mit den Ausdrücken $d = 2c\cos\beta$ und $e = 2c\sin\left(\frac{3\beta-\pi}{2}\right)$, die wir bei der Herleitung der Formel (5) gebraucht haben, folgende parametrische Form für die Blumenkurve herausfinden für $-2\pi \leq \beta \leq 2\pi$:

$$\begin{cases} x(\beta) = \frac{c}{2}\left[1 - 4\cos\beta\left(\cos\beta + \sin\left(\frac{3\beta-\pi}{2}\right)\right)\right] \\ \\ y(\beta) = 2c\left[\cos\beta + \sin\left(\frac{3\beta-\pi}{2}\right)\right]\sin\beta \end{cases}$$

Es gibt noch einige interessante Eigenschaften dieser Ortslinie. Hier sind einige davon aufgelistet:

- Die y-Achse schneidet die Kurve an 8 Punkten mit Vielfachen von $\frac{\pi}{7}$ und $\frac{\pi}{3}$ für β.
- Die Blumenkurve schneidet die x-Achse bei $(-\frac{7c}{2}, 0)$, $(-\frac{3c}{2}, 0)$ und $(\frac{c}{2}, 0)$.
- Die Blumenkurve lässt sich in einem Rechteck der Breite $\frac{9c}{2}$ und Höhe $\frac{3c\sqrt{3}}{2}$ einschliessen und berührt das Rechteck an fünf Punkten mit speziellen Werten für β.
- Die 10 Schnittpunkte der Blumenschleifen schneiden sich bei speziellen Werten von β und liegen in der Regel an den Spitzen von gleichseitigen Dreiecken, so dass man viele Punkte der Kurve leicht konstruieren kann.

Weitere Eigenschaften lassen sich bestimmt noch finden. Ich danke an dieser Stelle Peter Gallin für seine wertvollen Rückmeldungen und den spannenden mathematischen Austausch.