

## Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (1. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, [tpeter@math.ethz.ch](mailto:tpeter@math.ethz.ch)

Um das Jahr 1900 bewies F. Morley seinen berühmten Satz, der besagt, dass in irgend einem Dreieck die Schnittpunkte von je zwei, einer Dreiecksseite anliegenden Winkeldrittelnden ein gleichseitiges Dreieck bilden (Fig. 6). Explizit veröffentlichte er diesen Satz allerdings erst Jahre später [4, 5], denn er erhielt ihn ursprünglich als einfaches Korollar aus einem viel allgemeineren Satz über Kardioden. Ueberraschend sind allerdings schon die Resultate, welche er am Anfang seiner Forschung, die ihn schliesslich zu seinem Kardioden- respektive Winkeldrittelnden-Satz führte, fand oder erneut bewies, und um die es in der dreiteiligen, mit diesem Text beginnenden Serie geht. Morleys Ausgangspunkt ist eines der faszinierendsten Kapitel der Elementargeometrie überhaupt: Sätze von Miquel, Steiner (man sehe z.B. den auch sonst sehr interessanten Artikel [5]), Kantor [7] und Clifford [8]. In seinen Arbeiten [1, 2, 3, 4] verallgemeinert er diese sukzessive. Interessant dabei ist vor allem auch seine Methode, welche eine elegante Verbindung zwischen ebener Geometrie und komplexer Analysis herstellt.

Im 1. Teil beschreiben wir die Aussagen, von denen Morley ausgeht, und erste seiner Verallgemeinerungen in drei Sätzen, und geben einen Zusatz, der diese lose verbindet. Ausserdem erwähnen wir eine erstaunliche Ergänzung zur einfachsten Situation, und wir erinnern an die Definition der Limaçon Kurven, die bei Morley eine wichtige Rolle spielen. Schliesslich illustrieren wir die Aussagen, Situationen und Begriffe durch Figuren.

Im 2. Teil stellen wir den erwähnten Zusammenhang her, indem wir die wichtigsten Elemente von Morleys Methode, insbesondere die komplexen Kreiskoordinaten, einführen, um anschliessend seine, daraus fast unmittelbar folgenden, Beweise der ersten zwei Sätze zu geben.

Im 3. Teil behandeln wir den Beweis des dritten Satzes. Dieser ist formal wesentlich aufwändiger aber inhaltlich wirklich raffiniert, sodass es Spass macht, ihn nachzuvollziehen.

Die drei Texte geben eine ausführlichere Darstellung des ersten Teils von Morleys Arbeit [1] mit dem Ziel, den Leserinnen und Lesern die erstaunlichen und faszinierenden Zusammenhänge, die darin zur Sprache kommen, sowie Morleys Methode bekannt zu machen und ihnen — hoffentlich — das Studium seiner elitär kurz gehaltenen Ausführungen zu den Beweisen etwas zu erleichtern.

### Sätze

Wir nennen  $n$  Geraden einer Ebene in allgemeiner Lage, das heisst, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen, eine  $(n)$ -Konfiguration.

Eine  $(n)$ -Konfiguration enthält  $n = \binom{n}{n-1}$   $(n-1)$ -Konfigurationen, kurz die  $(n-1)$ -Konfigurationen der Ausgangskonfiguration.

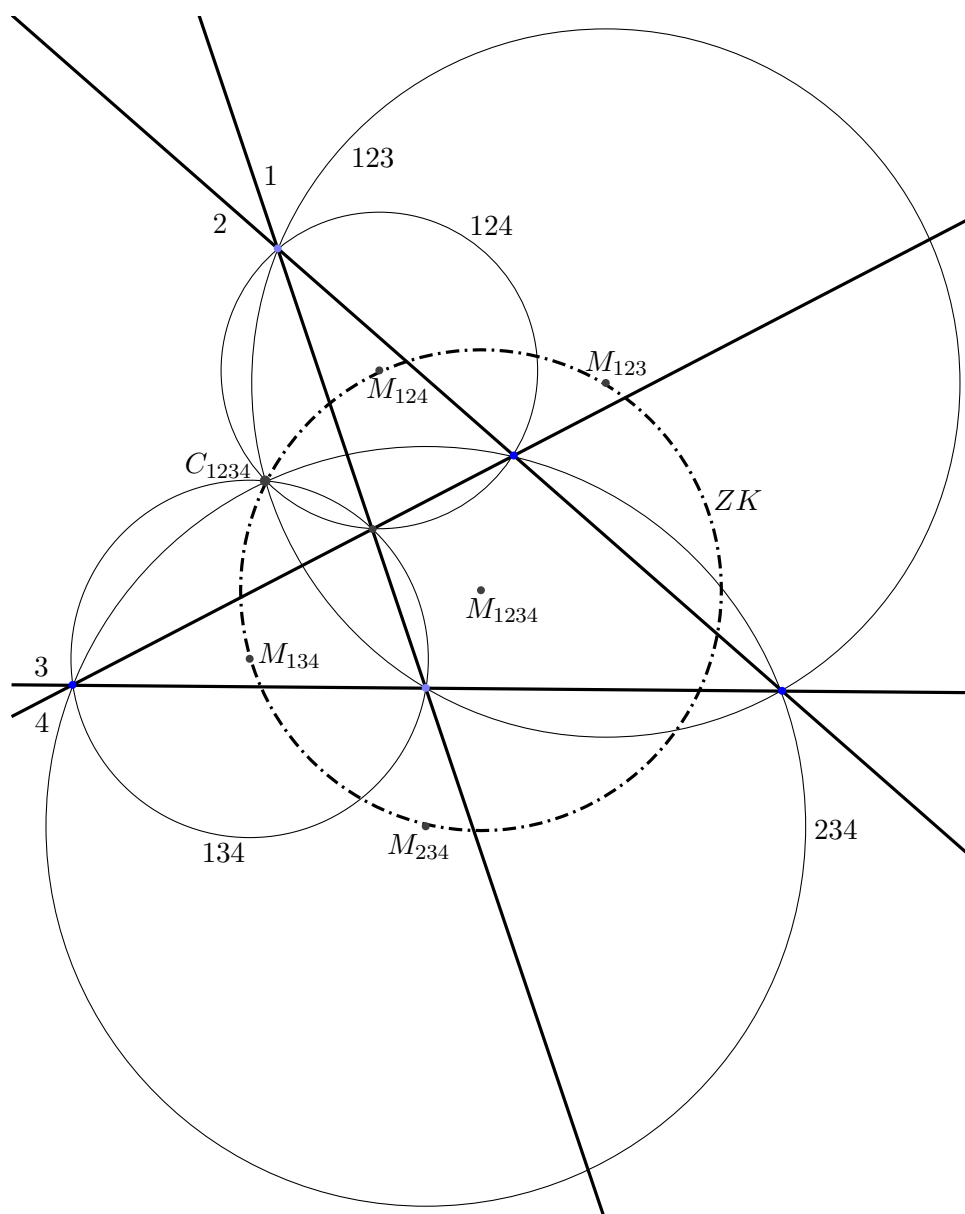
**Satz 1.** *Die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke einer  $(4)$ -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der Konfiguration (siehe Fig. 1). Die Mittelpunkte der Zentrumskreise der fünf  $(4)$ -Konfigurationen einer  $(5)$ -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der  $(5)$ -Konfiguration. Und so weiter: Die Mittelpunkte der Zentrumskreise der  $n$   $(n-1)$ -Konfigurationen einer  $(n)$ -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Zentrumskreis der  $(n)$ -Konfiguration.*

**Satz 2.** Die Zentrumskreise der  $n$   $(n-1)$ -Konfigurationen einer  $(n)$ -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Zentrumspunkt der  $(n)$ -Konfiguration. Dieser ist der Knoten einer Limaçon Kurve (siehe unten; Bemerkung (e) und Fig. 5), welche die Schar dieser Zentrumskreise umhüllt.

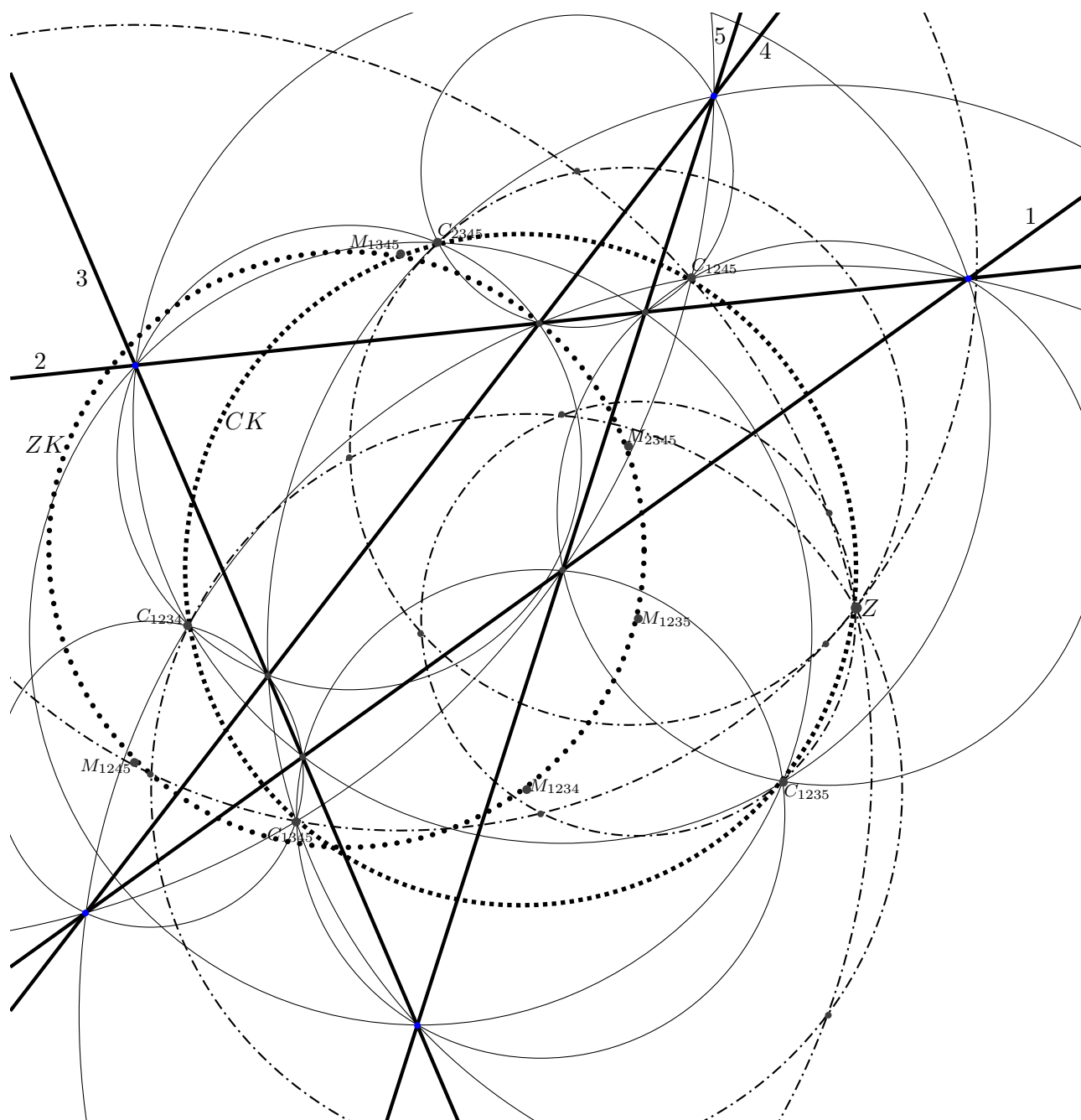
**Satz 3.** Die Umkreise der vier Dreiecke einer  $(4)$ -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Cliffordpunkt der Konfiguration. Die Cliffordpunkte der fünf  $(4)$ -Konfigurationen einer  $(5)$ -Konfiguration liegen auf einem Kreis, dem Cliffordkreis der  $(5)$ -Konfiguration. Die Cliffordkreise der sechs  $(5)$ -Konfigurationen einer  $(6)$ -Konfiguration gehen durch einen Punkt, den Cliffordpunkt der  $(6)$ -Konfiguration. Und so weiter!

Nicht erwähnt hat Morley den folgenden

**Zusatz.** Der Cliffordpunkt einer  $(4)$ -Konfiguration liegt auf dem Zentrumskreis der Konfiguration (Fig. 1). Damit ist die Hüllkurve der Umkreise der vier durch die Konfiguration definierten Dreiecke eine Kardioide mit Spitze im Cliffordpunkt. Der Zentrumspunkt einer  $(5)$ -Konfiguration liegt auf dem Cliffordkreis der Konfiguration (Fig. 2).



Figur 1:  $C_{1234}$ : Cliffordpunkt,  $ZK$ : Zentrumskreis



Figur 2: Z: Zentrumspunkt, CK: Cliffordkreis; (ZK: Zentrumskreis)

**Bemerkungen.**

(a) Morley beweist in [1] die ganz allgemeine und heute allgemein bekannte

**Aussage** (Fig. 4, hinten). *Die Hüllkurve einer Schar von Kreisen, welche durch einen Punkt  $P$  gehen und deren Mittelpunkte auf einem Kreis  $k$  liegen, ist eine Limaçon Kurve mit Knoten in  $P$ . Liegt  $P$  auf  $k$ , so ist die Hüllkurve eine Kardioide.*

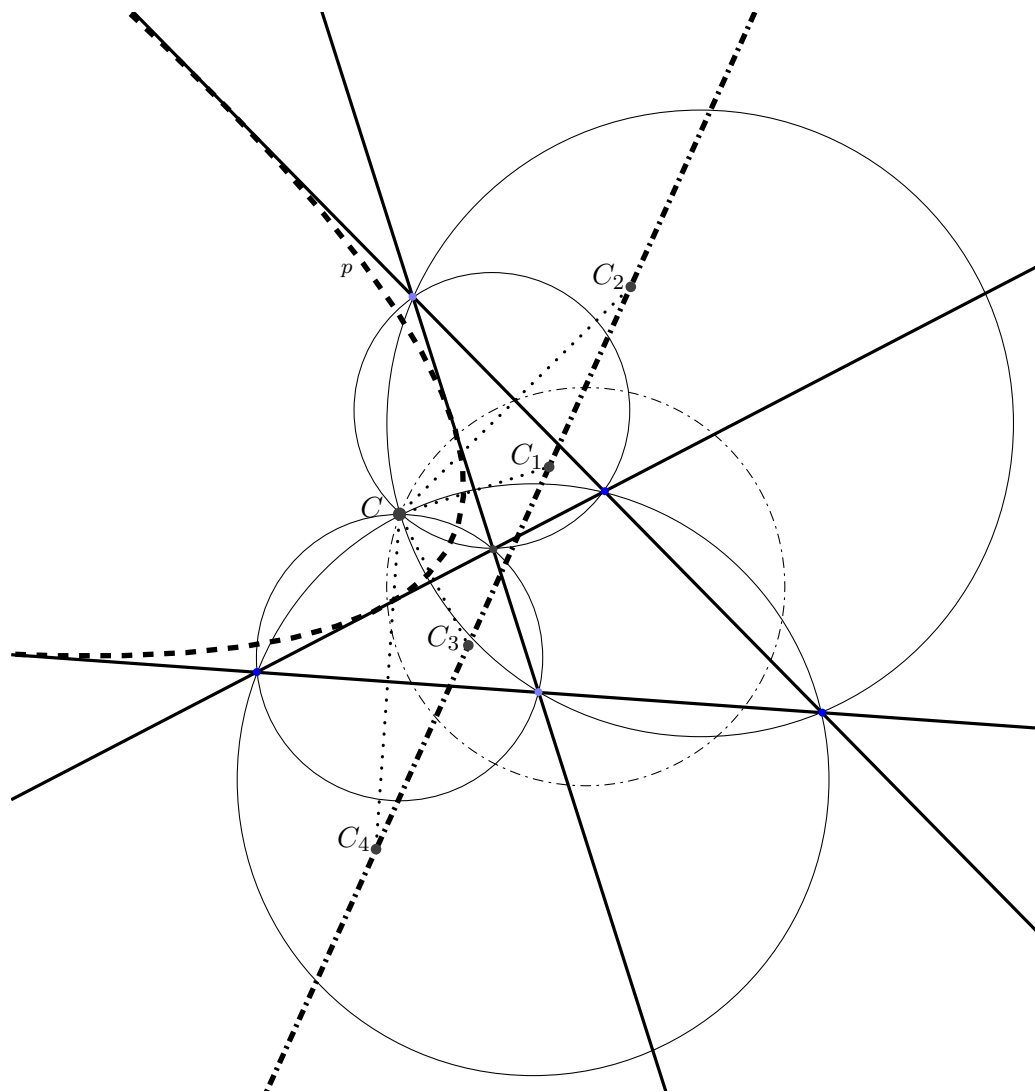
Wir geben unten Morleys direkten Beweis für die entsprechende Aussage in Satz 2. Morley nennt die Kreise der von der Limaçon Kurve umhüllten Schar die Penoskulanten der Limaçon Kurve. Er zeigt dann — unter vielem anderem — dass Aussagen ganz analog zu denjenigen in den obigen Sätzen 1 bis 3 auch gelten, wenn man anstelle der Umkreise der Dreiecke einer (4)–Konfiguration ausgeht von den Hüllkreisen von jeweils drei von vier Penoskulanten.

- (b) Morley beweist nicht nur die Existenz der Punkte und Kreise, von denen die Sätze 1 bis 3 handeln, sondern er beschreibt sie darüber hinaus auch explizit in Funktion der Geraden in den  $(n)$ -Konfigurationen.
- (c) Die Aussagen der Sätze können, vor allem für  $(4)$ -Konfigurationen, mit elementargeometrischen Hilfsmitteln, insbesondere den Kreiswinkelsätzen, bewiesen werden. Die betrachteten Situationen und die Resultate verleiten allenfalls zu vielerlei Spekulationen und Vermutungen. Auch Interpretationen im Raum drängen sich auf. So erhält man zum Beispiel aus den Sätzen 1 und 3 fast unmittelbar die folgende

**Aussage.** *Schneidet man vier Ebenen durch einen Punkt, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, mit einer fünften Ebene so, dass vier Tetraeder entstehen, so liegen die Mittelpunkte deren Umkugeln auf einer ebenen Ellipse.*

- (d) Der Satz von Miquel–Steiner fasst im Wesentlichen die Aussagen der Sätze 1 und 3 im Falle  $n = 4$  zusammen und enthält zudem die folgende überraschende

**Ergänzung** (Miquel–Steiner, Fig. 3). *Spiegelt man den Cliffordpunkt einer  $(4)$ -Konfiguration an den Geraden der Konfiguration, so erhält man vier Punkte, die auf einer Geraden liegen. Diese ist die Leitlinie und der Cliffordpunkt der Brennpunkt einer eindeutig definierten Parabel, welche die vier Geraden der Konfiguration berührt.*



Figur 3

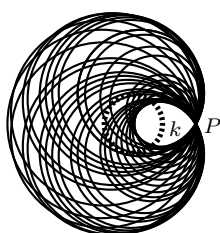
(e) Limaçon Kurve (Fig. 5). Eine Limaçon Kurve wird beschrieben durch folgende euklidische respektive Polar-Koordinatengleichung

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0, \quad a, b \text{ reelle Konstanten.}$$

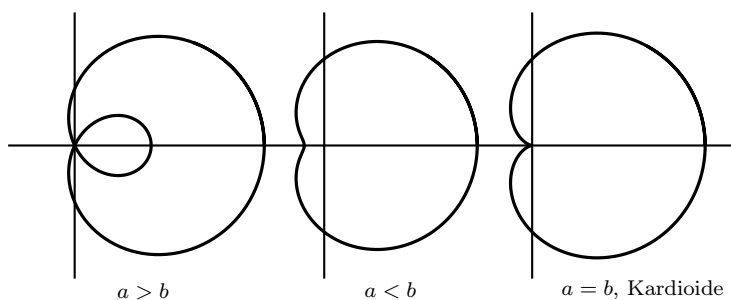
$$r(\varphi) = a \cos \varphi + b,$$

Parametrisieren lässt sich die Kurve folgendermassen:

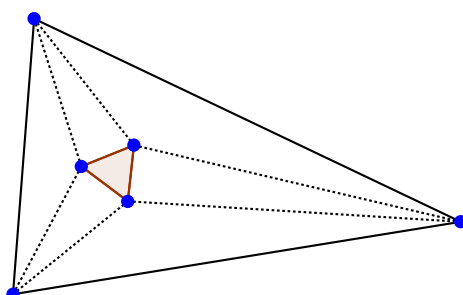
$$\begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \\ a \sin \varphi \cos \varphi + b \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ reelle Konstanten.} \quad (1)$$



Figur 4



Figur 5: Limaçon Kurven



Figur 6

**Dank.** Vielmals danken möchte ich Dr. Daniel Perez dafür, dass er mit sehr viel Kompetenz und Engagement den Text und die Figuren darstellungsmässig so schön auf den Punkt gebracht hat.

## Literatur

- [1] F. Morley. On the metric geometry of the plane  $n$ -line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1(2):97–115, 1900.
- [2] F. Morley. Orthocentric properties of the plane  $n$ -line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4(1):1–12, 1903.
- [3] F. Morley. On reflexive geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 8(1):14–24, 1907.
- [4] F. Morley. Extensions of Clifford’s Chain-Theorem. *Amer. J. Math.*, 51(3):465–472, 1929.
- [5] F. Morley. In *Mathematical Association of Japan for Secondary Mathematics*, volume 6, pages 260–262, 1924.

- [6] G. Weiss. Geometrie — Tochter der Kunst, Mutter der Mathematik, 2014.  
[http://kaernten.geometry.at/2014/kunst\\_tochter\\_mathe\\_mutter.pdf](http://kaernten.geometry.at/2014/kunst_tochter_mathe_mutter.pdf).
- [7] S. Kantor. Über das vollständige Fünfeit/Die Tangengeometrie an der Steinerschen Hypercy-  
cloide. *K.K. Hof- und Staatsdruckerei*, 1878.
- [8] W. Clifford. Synthetic proof of Miquel's theorem. *Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*,  
5:124–141, 1870.