

**Berichte zu Maturaarbeiten**

Peter Hänsli, Alte Kantonsschule Aarau

Die folgenden Maturaarbeiten sind im Schuljahr 2009/10 im Schwerpunktfach PAM (12./13. Schuljahr, Teil AM je 3 Wochenlektionen) entstanden. Als es darum ging, Themen für Maturaarbeiten zu finden, bemühte ich mich im Unterricht wenn immer möglich, Werbung für Maturaarbeiten im Fach Mathematik zu machen. Meine Absicht war, ausgehend von gerade behandelten Themen mögliche Ausblicke auf Vertiefungen oder Erweiterungen zu machen. Das Konzept war offensichtlich erfolgreich, denn ich erhielt in der Folge Anfragen von neun Schülerinnen und Schülern. Aus Kapazitätsgründen konnte ich nicht mehr als drei Arbeiten betreuen. Ihre Themen waren:

- Das Apollonische Berührungsproblem: Algebraisch gelöst und visualisiert
- Klassifikation der Kegelschnittgleichung
- Möbiustransformationen: Klassifikation und Visualisierung

Allen drei Arbeiten ist gemeinsam, dass sie von klassischen Fragestellungen ausgehen, zu denen es viel Literatur gibt. Neu ist hingegen, dass die klassischen Lösungen ergänzt wurden durch eine Realisierung in Visual Basic. Der klassische Teil macht dann gerade mal die Analyse des Problems aus. Bei der dritten Arbeit wurde zu Illustrationszwecken zusätzlich auch Cinderella eingesetzt. Damit konnten insbesondere Iterationen von Möbiustransformationen geschickt demonstriert werden.

**1. Maturaarbeit:****Das Apollonische Berührungsproblem: Algebraisch gelöst und visualisiert**

Problemstellung:

Zu drei beliebig vorgegebenen Kreisen soll ein vierter konstruiert werden, welcher die drei gegebenen berührt. Unter Kreisen versteht man in diesem Zusammenhang auch Punkte und Geraden. Dadurch erhält man insgesamt zehn verschiedene Probleme. Je nach Problem ergeben sich maximal acht Lösungen.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Die Schülerin SS und der Schüler AB hatten schon vom Apollonischen Berührungsproblem gehört und wollten sämtliche zehn Probleme lösen. Ihre Idee war, die geometrischen Konstruktionen aus einem Buch aus dem Jahre 1890 ins Algebraische zu übersetzen. Sie merkten bald, dass dies ein riesiges Unterfangen und reichlich kompliziert war. Deshalb begannen sie unabhängig vom Buch, die zehn Aufgaben algebraisch zu lösen. Damit beschäftigte sich in erster Linie SS, während AB sich selbständig in Visual Basic einarbeitete und die Lösungen von SS in ein ausgeklügeltes Programm übersetzte. Die Arbeit enthält für jedes der zehn Probleme den algebraischen Lösungsweg mit einer kurzen Analyse der Lösungen und einer graphischen Darstellung. Im Anhang befinden sich der Quellcode des Visual-Basic-Programms und eine CD mit einem exe-File. Dieses erlaubt es dem Leser, ein beliebiges der zehn Probleme in irgendeiner Disposition vorzugeben, sämtliche Lösungen zu berechnen und graphisch darzustellen.

**2. Maturaarbeit:****Klassifikation der Kegelschnittgleichung**

Problemstellung:

Die Kegelschnitte lassen sich durch algebraische Gleichungen zweiten Grades in zwei Unbekannten beschreiben. Das Ziel der Arbeit bestand darin, umgekehrt eine beliebig vorgegebene Gleichung der erwähnten Art als Kegelschnitt zu klassifizieren. Zudem sollte ein Visual-Basic-

Programm geschrieben werden, das den betreffenden Kegelschnitt darstellt und seine geometrischen Parameter bestimmt.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Im Unterricht wurden die Kegelschnitte als geometrische Örter eingeführt und durch Gleichungen beschrieben. Ein anderes Thema waren Matrizen und lineare Abbildungen. Der Schüler NG löste nun die Aufgabe, indem er die Hauptachsentransformation mittels Diagonalisierung der zur Gleichung gehörenden symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrix vornahm. Er bewältigte die Aufgabe gut und mehrheitlich selbständig. Von mir erhielt er lediglich ein paar entscheidende Inputs. Ich überliess es aber ihm, die Details auszuarbeiten und zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufügen. Sein Hauptbeitrag war ein Visual-Basic-Programm, das er vollständig alleine entwickelte. Seine Rechnungen dienten ihm dabei als Grundlage. Aus Zeitgründen fehlen leider eine übersichtliche Darstellung aller Fälle und eine genauere Untersuchung der Spezialfälle. Das Programm hingegen leistet hervorragende Dienste und erfüllt die gestellten Erwartungen.

### **3. Maturaarbeit:**

#### **Möbiustransformationen: Klassifikation und Visualisierung**

Problemstellung:

Jede Möbiustransformation lässt sich in eine der folgenden Klassen einteilen: Loxodromische, hyperbolische, elliptische oder parabolische Transformationen. Die vier Typen unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Fixpunkte und in ihrem Iterationsverhalten. Typische Vertreter sind die Drehstreckungen, die reinen Streckungen, die reinen Drehungen bzw. die Translationen. Man kann zeigen, dass jede Möbiustransformation bis auf eine Bewegung der Riemannschen Sphäre ähnlich (d.h. kongruent im Sinne der Gruppentheorie) zu einem der genannten typischen Vertreter ist. Dabei ist die Spur der Abbildung eine Invariante, mit der sich die Einteilung in die vier Typen vornehmen lässt.

Ergebnisse und Erfahrungen:

Im Unterricht wurden komplexe Zahlen eingeführt. Danach behandelten wir komplexe Abbildungen, in erster Linie ganze und gebrochene lineare (d.h. Möbiustransformationen). Die Schülerin SH und der Schüler PS wollten eine Maturaarbeit in Mathematik schreiben. Das gewählte Thema ergab sich erst nach längeren gemeinsamen Vorarbeiten. Die Arbeit besteht zunächst aus einer Einführung in die Thematik. Dabei hat SH mit Hilfe der interaktiven Geometrie-Software Cinderella viele Aspekte im Zusammenhang mit komplexen Zahlen und Abbildungen visualisiert. PS entwickelte darüber hinaus ein umfangreiches Visual-Basic-Programm, welches eine beliebige Möbiustransformation im oben erwähnten Sinne klassifiziert und ihr Iterationsverhalten visualisiert. Die verschiedenen Files sind auf der beigelegten CD enthalten.

Diese Arbeit ist für Gymnasiasten auf einem relativ hohen Niveau. SH und PS mussten vieles selber erarbeiten und vertiefen. Sie waren auf mehrere Inputs meinerseits angewiesen, was durchaus verständlich ist. Mich hat diese Arbeit auch viel Zeit gekostet, da ich mich selber einlesen musste, um mithelfen zu können, ein realistisches Ziel zu definieren und den Weg dorthin zu finden. Es ist sozusagen eine echte Arbeitsgemeinschaft entstanden und sie hat Spass gemacht.

Bei allfälligen Fragen freue ich mich auf Ihr Mail an [peter.haensli@alte-kanti-aarau.ch](mailto:peter.haensli@alte-kanti-aarau.ch).